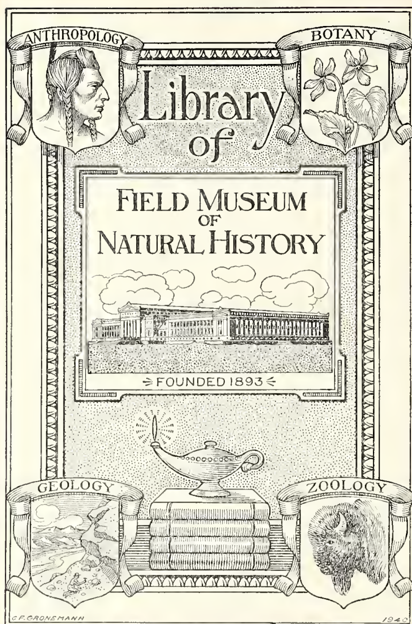


THE FIELD MUSEUM LIBRARY
3 5711 00073 7362

ANTHROPOLOGY
BOTANY
Library of
FIELD MUSEUM OF NATURAL HISTORY
FOUNDED 1893
GEOLOGY
ZOOLOGY
C.F. GRONEMANN
1940

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

# VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

## VAN 25 MEI 1918 TOT 3 MEI 1919

**DEEL XXVII**

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
: SEPTEMBER 1919 :

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

# VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

## - VAN 25 MEI 1918 -
## TOT 30 NOVEMBER 1918

DEEL XXVII
(1STE GEDEELTE)



JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
: : MAART 1919 : :

# INHOUD.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

# VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 25 MEI 1918.

DEEL XXVII.

N°. 1.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

## INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Een missive van Zijne Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 8 Mei 1918 met bericht dat H.M. de Koningin bekrachtigd heeft de benoeming van de Heeren C. PH. SLUITER, hoogleeraar te Amsterdam en G. VAN ITERSON JR., hoogleeraar te Delft, tot gewone leden der Afdeeling.

Aangenomen voor kennisgeving.

2°. Een schrijven namens Administrateuren van het P. W. Korthals-fonds, berichtende, dat in de maand Juli van dit jaar weder een bedrag van *f* 600.— beschikbaar gesteld kan worden ten nutte van de kruidkunde.

Naar aanleiding van dit bericht verzoekt de Voorzitter den Heeren J. W. MOLL, M. W. BEIJERINCK, F. A. F. C. WENT en J. C. SCHOUTE als leden-botanici der Afdeeling, om met het lid, den Heer G. VAN ITERSON JR., in de volgende vergadering een voorstel in te dienen over de bestemming, welke, naar hun oordeel, ditmaal te geven zal zijn aan de beschikbaar gestelde som.

De Heeren WENT, SCHOUTE en VAN ITERSON aanvaarden deze opdracht; aan de Heeren MOLL en BEIJERINCK, niet ter vergadering aanwezig, zal van het verzoek kennis gegeven worden.

De Voorzitter heet de Heeren C. PH. SLUITER en G. VAN ITERSON JR., die als nieuwbenoemde leden voor 't eerst eene vergadering bijwonen, welkom en installeert hen als leden der Afdeeling, waarbij hij uiting geeft aan de waardeering van hun wetenschappelijken arbeid. die tot hunne benoeming heeft geleid en het vertrouwen uitspreekt, dat zij, als leden der Akademie, hunne wetenschappelijke krachten verder ook in haren dienst zullen stellen.

**Scheikunde.** De Heer ERNST COHEN doet, mede namens den Heer A. L. Th. MOESVELD eene mededeeling: *„De experimenteele toetsing der wet van Braun."*

(Voor deze mededeeling wordt verwezen naar Deel XXVI dezer Zittingsverslagen, blz. 1553).

**Scheikunde.** — De Heer HOLLEMAN biedt, mede namens den Heer B. F. H. J. MATTHES, eene mededeeling aan over: „*De additie van broomwaterstof aan allylbromide*".

Bij de vele malen, dat ik in mijn laboratorium trimethyleenbromide heb laten bereiden door inleiden van HBr-gas in allylbromide, viel mij op, dat nu eens eene nagenoeg quantitieve opbrengst werd verkregen, dan weder eene veel kleinere, zonder dat de oorzaak dezer wisselende opbrengst kon worden aangegeven. Toen nu mijn assistent, de Heer DEN HOLLANDER, in een zeer helder verlicht lokaal nagenoeg uitsluitend trimethyleenbromide bij deze additie had verkregen, terwijl eenige jaren geleden de Heer WHITE in het gewone werklokaal aanzienlijke hoeveelheden van een lager kokend product (propyleenbromide) daarnevens waarnam, lag het vermoeden voor de hand, dat het daglicht hierop invloed uitoefent. De Heer MATTHES nam op zich, om dit nader te onderzoeken.

Hiertoe werd eene hoeveelheid allylbromide in twee gelijke deelen verdeeld en het eene in eene gewone glazen flesch gegoten, het andere in eene flesch, die van buiten met vuurlak geheel zwart was gemaakt. De vloeistof in de gewone flesch werd tijdens en na het inleiden van HBr zooveel mogelijk in het zonlicht gehouden. Telkens wanneer geen HBr meer werd opgenomen, werd zij gesloten en tot den volgenden dag aan zichzelf overgelaten. Na eenige dagen werd geen verder HBr opgenomen. Met de zwartgemaakte flesch werd op dezelfde wijze gehandeld. De opname van HBr had hier zeer veel langzamer plaats, zoodat de bewerking eenige weken moest worden voortgezet, voordat volledige verzadiging was bereikt.

Toen daarna de inhoud der beide flesschen aan distillatie werd onderworpen, ging het preparaat uit de gewone flesch bijna geheel bij constante temperatuur en wel bij het kookpunt van trimethyleenbromide over. Na distillatie in vacuo bedroeg zijn kookpunt 167°.1 bij 760 mm.

De inhoud der andere flesch daarentegen vertoonde een zeer aanzienlijk kooktraject, nl. van 100—190°. Bij gefractioneerde distillatie werd eene fractie van circa 7 gr., tusschen 140°—150° overgaande, verkregen, terwijl tusschen 155° en 165° eene fractie van 22 gr. overging. Eerstgenoemde had nagenoeg het spec. gew. van propyleenbromide, nl. 1.9259 bij 23°.2; laatstgenoemde had het

spec. gew. van trimethyleenbromide nl. 1.9801 bij 23.2. Tusschen 100° en 105° waren ook nog enkele druppels gedistilleerd, die blijkens dit kookpunt nog onveranderd allylbromide waren. De conclusie is dus, dat bij additie van HBr aan allylbromide in het heldere daglicht nagenoeg uitsluitend trimethyleenbromide ontstaat; in het donker, naast deze verbinding als hoofdproduct, ook vrij veel propyleenbromide.

*Amsterdam*, Mei 1918. *Org. Chem. Lab. d. Univ.*

---

**Scheikunde**. — De Heer BÖESEKEN biedt mede namens den Heer CHR. VAN LOON een mededeeling aan over: *„De bepaling van de configuratie der cis-trans-isomeren"*.

1. Het verschijnsel van het optreden van een aantal isomeren bij onverzadigde en ringvormige stoffen is ongetwijfeld een gewichtige hefboom geweest om de hypothese van VAN 'T HOFF over het, in het zwaartepunt zijner valenties gedachte, koolstofatoom ingang te doen vinden.

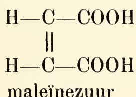
Aangezien de bestendigheid der optisch-activiteit bij matige temperatuur de aanname van een vrij groote stabiliteit dier valenties noodzakelijk maakte, lag het voor de hand om die onverwrikbaarheid niet alleen bij ringvormige molekulen, maar ook bij de dubbele binding te aanvaarden.

Wanneer wij afzien van bedenkingen, die tegen den dieperen grond dezer aanname kunnen rijzen, bedenkingen welke verband houden met de hypothesen over de inwendige structuur van het atoom, dan moet toegegeven worden, dat de aanname zelve een buitengewoon elegante verklaring gegeven heeft van de bestaansmogelijkheid der bedoelde isomeren.

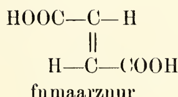
Het is inderdaad slechts zeer zelden voorgekomen, dat cis-trans-isomerie uitbleef in het geval, dat de theorie haar eischte, terwijl aan den anderen kant, wanneer twee gelijke groepen aan één der onverzadigde of ringvormende atomen gebonden zijn en dus geen isomeren te verwachten zijn, deze ook niet werden gevonden.

2. Is dus aan de verklaring zelve moeilijk te twijfelen, het vaststellen welk isomeer de cis- en welk de trans-configuratie toekomt is veel moeilijker op te lossen.

Het is een gelukkig toeval, dat het klassieke voorbeeld der cis-trans-isomerie, nml. dat van het maleïnezuur en van het fumaarzuur tevens datgene is geweest, waarbij ook in dit opzicht de grootste zekerheid bestaat.



maleïnezuur



fumaarzuur

De oorzaak daarvan is niet ver te zoeken: de bepaling der samenstelling berust hier bijna uitsluitend op eigenschappen, die uit de molekulen zelven worden afgeleid.

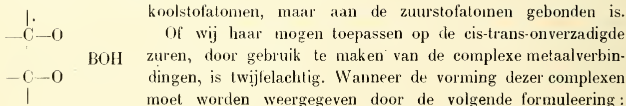
Het vaststellen der configuratie van geometrische isomeren geschiedt n.l. langs verschillende wegen.

Ten eerste kan men haar afleiden uit eigenschappen, die tengevolge van de wisselwerking tusschen de groepen in het molekuul te verwachten zijn; dit is, wanneer wij over voldoende (kritisch geschift) vergelijkingsmateriaal beschikken, de zekerste weg.

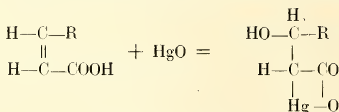
Tot deze eigenschappen behooren: de dissociatie-constanten der zuren, het vormen van anhydriden, *de al of niet splitsbaarheid in optische isomeren*, enz.

Wij kunnen hiertoe ook rekenen het vormen van complexe verbindingen, voorzoover daarbij de valenties, welke de dragers zijn der cis-trans-isomerie, niet worden aangetast.

Dit is, met het oog op de onzekerheid in de samenstelling van complexe verbindingen, niet altijd gemakkelijk uit te maken. Wij mogen deze bepalingswijze vermoedelijk toepassen bij de beoordeeling van de (cis-trans)-isomerie der cyclische glycolen door boorzuur, omdat de boorzuurrest niet aan de isomerie-bepalende




koolstofatomen, maar aan de zuurstofatomen gebonden is. Of wij haar mogen toepassen op de cis-trans-onverzadigde zuren, door gebruik te maken van de complexe metaalverbindingen, is twijfelachtig. Wanneer de vorming dezer complexen moet worden weergegeven door de volgende formuleering:




of iets dergelijks, waarbij in ieder geval aan te nemen is, dat de dubbele binding wordt aangetast, dan kunnen wij op deze bepalingswijze evenmin vertrouwen als op alle andere, waarbij de dragers der isomerie worden aangetast (z. o).

Nu is de tegenstelling tusschen de beide groepen H en COOH, die aan het zeer eenvoudige skelet van het fumaar- en maleïnezuur gebonden zijn, bijzonder groot, daarenboven kunnen de beide carboxylgroepen elkanders zure werking ondersteunen of door anhydridevorming op elkander inwerken. Ook is een afstooting der COOH-groepen te verwachten, waaruit afgeleid kon worden, dat het fumaarzuur bestendiger is dan het maleïnezuur.

De bijzonder eenvoudige structuur dezer zuren, waardoor de carboxylgroepen de leidende positie innemen, maakt, dat de bovengenoemde overwegingen bij de vaststelling hunner configuratie zooveel succes hebben gehad.

Zoodra deze wisselwerking der groepen ontbreekt of de structuur veel minder eenvoudig wordt, houdt onze zekerheid op.

Beschouwen wij in dit opzicht het $\alpha$- en iso-crotonzuur.

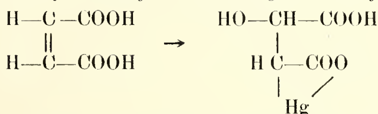
1°. De dissociatie-constanten zijn: $\alpha$-crotonzuur $2 \times 10^{-5}$.
iso- ,, $3{,}6 \times 10^{-5}$.

Men zoude nu door vergelijking van propionzuur met azijnzuur kunnen besluiten, dat een methylgroep het zure karakter vermindert, zoodat in het $\alpha$-crotonzuur de methylgroep aan de zijde van de zure groep gelegen is; inderdaad is ook het acrylzuur sterker gedissocieerd dan de beide crotonzuren ($k = 5.6 \times 10^{-5}$) en is het dimethylacrylzuur veel zwakker ($\pm 7 \times 10^{-6}$ volgens voorloopige metingen van den heer P. E. Verkade, Proefschrift Noot 2, pag. 66). Ook is het citraconzuur veel zwakker dan maleïnezuur.

Men moet hier echter toch voorzichtig mede zijn, daar het isoboterzuur iets sterker is dan propionzuur ($1.44$ tegen $1.31 \times 10^{-5}$) en de dimethylbarnsteenzuren veel sterker dan het barnsteenzuur ($1{,}9$ en $1{,}3$ tegen $0{,}6 \times 10^{-4}$) zijn.

2°. Anhydride-vorming is buitengesloten en kan ons dus niet helpen.

3°. Complex-vorming: Door Bjilmann is aangetoond, dat het maleïnezuur, het citraconzuur en het allokaneelzuur met kwikacetaat zouten vormen, die in natronloog oplossen en waaruit bij ontkwikking de oorspronkelijke zuren niet meer konden worden teruggewonnen; er ontstonden dan $\beta$-oxyzuren, zoodat B. vermoedt, dat het complexe Hg-zouten dezer oxyzuren zijn, die aldus gevormd zijn




$\alpha$-Crotonzuur bleef nu eveneens als complex kwikzout in oplossing, en kon met alkohol worden neergeslagen. Uit dit zout werd $\beta$-oxyboterzuur verkregen, zoodat ook hieruit voor het gewone hoogsmeltende crotonzuur de cis-configuratie werd afgeleid.

Ten einde aan dit besluit meerdere zekerheid te geven hebben wij het isocrotonzuur aan dezelfde bewerking onderworpen en daarbij een basisch onoplosbaar kwikzout verkregen, dat na ontleding met $H_2S$ een mengsel gaf van iso- en $\alpha$-crotonzuur.

In het voorbijgaan moge er op gewezen worden, dat het $\alpha$-crotonzuur hierbij moet ontstaan zijn *tijdens de ontkwikking*, daar dit zuur voorzoover het oorspronkelijk in het isocrotonzuur aanwezig was, als complex in oplossing is gebleven (z b.), terwijl $H_2S$ het vrije isocrotonzuur niet of tenminste uiterst langzaam in $\alpha$-crotonzuur overvoert.

Het samentreffen van de verwachtingen uit de dissociatie-constanten met het resultaat der onderzoekingen van BIILMANN geeft dus wel eenige zekerheid aan de configuratie van de crotonzuren. Hieruit volgt, dat de formuleering dezer complexen vermoedelijk anders is dan zooals zij door BIILMANN is gegeven. Deze onderscheidings-methode geldt echter uitsluitend voor de $\alpha\beta$-zuren; andere aethyleenderivaten, waaronder ook de esters der isomere zuren, zijn op deze wijze niet te onderscheiden, omdat zij alle met basische mercuri-zouten complexe verbindingen schijnen te vormen [1]).

Van het *angelica-* en het *tigline-zuur* kunnen wij uit de dissociatie-constanten $5 \times 10^{-5}$ en $1 \times 10^{-5}$ hoogstens vermoeden, dat in het eerste een waterstofatoom zich aan de zijde van de COOH-groep bevindt, in het laatste de methylgroep.

De hier gegeven configuraties worden ondersteund door de overweging, dat het meest stabiele zuur datgene zal zijn, waarin de relatief-positieve groep zich zoo dicht mogelijk bij de COOH-groep bevindt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| H—C—COOH<br>‖<br>H—C—COOH | HOOC—C—H<br>‖<br>H—C—COOH | $CH_3$—C—H<br>‖<br>H—C—COOH | H—C—$CH_3$<br>‖<br>H—C—COOH | $CH_3$—C—H<br>‖<br>$CH_3$—C—COOH | H - C—CH<br>‖<br>$CH_3$—C—CO |
| maleïnezuur | Fumaarzuur | isocrotonzuur | $\alpha$-crotonzuur | angelicazuur | tiglinezuu |
| vormt anhydride | geen anhydride | — | — | — | — |
| $k = 1.2 \times 10^{-2}$ | $9.3 \times 10^{-4}$ | $3,6 \times 10^{-5}$ | $2.0 \times 10^{-5}$ | $5 \times 10^{-5}$ | $1 \times 10^{-5}$ |
| complex Hg. zout + | 0 | 0 | + | — | — |
| | stabiel | | stabiel | | stabiel |

Bij het olie- en elaidinezuur heerscht volslagen onzekerheid, omdat wij de dissociatie-constanten niet kennen, alleen kan het vermoeden uitgesproken worden, dat in het stabiele elaidinezuur de relatief-positieve koolstofketen zich wel aan de zijde van de carboxylgroep zal bevinden.

Bij de cyclische cis-trans-isomeren wordt de beteekenis van de cis-trans gelegen groepen ten opzichte van den ring geringer naarmate deze laatste grooter wordt; de opvatting van v. BAEYER, dat de hoek, die de affiniteits-richtingen der trans-gelegen groepen ten opzichte van elkander maken, bij de ringverwijding kleiner wordt, is niet onjuist; v. BAEYER leidt deze afname echter af uit sterische overwegingen en dan kan zij niet heel veel te beteekenen hebben en daarmede gaat de zekerheid onzer beslissingen over de configuratie nog meer achteruit. Hier krijgen wij nu echter de zeer gelukkige omstandigheid, dat de trans-verbindingen veelal

[1]) B. **33** 1340, 1641, 2692, (1900); **34** 1385, 2906 (1901) **35** 2571 (1902); **43** 568 (1910).

asymmetrisch zijn en dus moeten kunnen worden gesplitst in optische isomeren.

Wanneer dit argument wegvalt, zooals bij de hexahydroterephtaalzuren, die beide symmetrisch zijn, of bij de verbindingen, waarbij het al of niet splitsbaar zijn in optische isomeren nog niet is onderzocht, dan ontbreekt alle zekerheid. Dit moge door het volgende overzicht worden gestaafd:

| | | k | Anhydride | Splitsbaar |
|---|---|---|---|---|
| cis-cyclopropaandicarbonzuur | 1.2 | $4 \times 10^{-4}$ | + | — |
| trans „ | 1.2 | $2.1 \times 10^{-4}$ | — | + |
| cis-cyclobutaandicarbonzuur | 1.2 | $6.6 \times 10^{-5}$ | + | niet onderzocht |
| trans „ | 1.2 | $2.8 \times 10^{-5}$ | — | |
| cis-cyclopentaandicarbonzuur | 1.2 | $1.58 \times 10^{-5}$ | + | " |
| trans „ | 1.2 | $1.2 \times 10^{-5}$ | — | |
| cis „ | 1.3 | $5.4 \times 10^{-5}$ | + | " |
| trans „ | 1.3 | $5.0 \times 10^{-5}$ | — | |
| cis-cyclohexaandicarbonzuur | 1.2 | $4.4 \times 10^{-5}$ | + | — |
| trans „ | 1.2 | $6.2 \times 10^{-5}$ | + | + |
| cis „ | 1.3 | niet onderzocht | + | niet onderzocht |
| trans „ | 1.3 | | — | |
| ? cis „ | 1.4 | $3 \times 10^{-5}$ | — | symmetrisch |
| ? trans „ | 1.4 | $4.6 \times 10^{-5}$ | — | |

Wij zien dat de anhydride-vorming, het belangrijkste argument bij het maleïnezuur, bij de cyclohexaanverbindingen haar beteekenis bijna geheel verloren heeft, daar de 1-2-dicarbonzuren beiden een anhydride vormen en de 1-4-zuren geen van beiden.

Nog meer is dit het geval met de dissociatie-constanten, waarvan de verschillen bij de cyclopentaandicarbonzuren reeds gering zijn, maar tenminste nog zoodanig georienteerd zijn, dat van het zuur met de grootste constante ook een anhydride bekend is.

Bij de cyclohexaandicarbonzuren tasten wij in dit opzicht geheel in het duister. Van het splitsbare 1-2-zuur, dat dus ongetwijfeld het trans-zuur is, is zij grooter dan van het cis-zuur; beide zuren vormen gemakkelijk een anhydride. Was dus in dit geval de splitsbaarheid onbekend, dan zouden wij allicht tot een verkeerde conclusie gekomen zijn.

Van de 1-4-dicarbonzuren, het klassieke voorbeeld der cis-trans-isomeren *hebben wij absoluut geen zekerheid*; het hoogst smeltende, dat door v. BAEYER met trans is aangeduid, heeft de hoogste dissociatie-constante en men zou het allicht daarom het cis-zuur moeten noemen. Daar het evenmin als het lager smeltend isomeer een anhydride vormt en geen van beiden gesplitst kan worden in optische antipoden, blijft als eenige argument voor de tot nog toe geldende opvatting de meerdere stabiliteit; een argument, dat uit hoofde van de geringe oplosbaarheid en het hooge smeltpunt, zeer zwak moet genoemd worden.

Geheel hopeloos is dit geval echter niet; na bespreking der chemische methoden, die ons ten dienste staan om de configuratie te bepalen zullen wij zien, dat ook hier nog een weg openstaat.

Het spreekt nu wel van zelf, dat in de gevallen, waarin minder karakteristieke groepen aan den ring gebonden zijn, zooals in de cyclohexaandiolen 1-4 of hexahydrotoluylzuren, waarbij een onderscheiding ingevolge de al of niet splitsbaarheid in optische isomeren ontbreekt, de vaststelling der configuratie vrijwel ondoenlijk schijnt.

Hier heeft het verschil, optredende by complex-vorming bijv. voor de diolen met boorzuur, eenige hoop op succes gegeven, zooals bij de vaststelling van de configuratie van enkele suikers gebleken is, waarop wij hier niet nader ingaan.

3. Ten tweede kan men de configuratie afleiden uit hetgeen er geschiedt bij het opheffen van de dubbele binding; er ontstaan dan verzadigde verbindingen, die verschillend zijn al naarmate men van het cis- of trans-isomeer is uitgegaan.

Ook kan men de configuratie in verband brengen met de wijze van ontstaan, hetzij uit verzadigde verbindingen door afsplitsing van molekuuldeelen, uit acetyleenderivaten door partieele verzadiging of door vervanging van groepen bij andere stoffen wier configuratie bekend is.

Deze laatste wijzen van bepaling, waarbij dus de bindingen tusschen de atomen krachtig worden aangegrepen, hebben nu veelal verwarring gesticht, zoodat het vertrouwen hierin sterk geschokt is. Bij toepassing op het fumaar- en maleïnezuur schenen zij eerst uitmuntend uit te komen; nog steeds kunnen wij met voldoening vaststellen, dat bij oxydatie van fumaarzuur met $KMnO_4$ het te verwachten druivenzuur ontstaat en van maleïnezuur het antiwijnsteenzuur.

Maar het beroemde onderzoek van WISLICENUS over de bromeering der beide zuren, gevolgd door afsplitsing van één molekuul HBr, waarbij uit het fumaarzuur door het racemische dibroombarnsteenzuur

het broommaleïnezuur, en uit het maleïnezuur door het anti(iso)dibroombarnsteenzuur het broomfumaarzuur zou ontstaan, is alleen juist gebleken, voorzoover het de begin- en eindpunten betreft.

Mackenzie[1]) en Bror Holmberg[2]) hebben namelijk aangetoond, dat het laagst smeltende isodibroombarnsteenzuur in de beide antipoden splitsbaar was en daarmede valt deze geheele deductie.

Er heeft dus zoowel bij additie van broom aan de beide zuren als bij het onttrekken van HBr, juist het omgekeerde plaats van hetgeen wij kunnen verwachten en deze omkeering vinden wij vrij algemeen.

Er ontstaan bij inwerking van $PCl_5$ op acetazijnester de twee isomere β-chloorcrotonzuren, waarvan het eene met waterdamp vluchtig is. Dit heeft een dissociatie-constante $= 9.5 \times 10^{-5}$; die van het niet vluchtige $= 1.44 \times 10^{-4}$.. Hieruit kan met vrij groote zekerheid worden afgeleid, dat in het eerste het chlooratoom verder van de COOH-groep afgelegen is dan in het tweede. Nu geeft het relatief zwakkere zuur bij reductie het relatief sterkere iso-crotonzuur; terwijl het relatief-sterkere β-chloorcrotonzuur het relatief-zwakkere α-crotonzuur geeft; in beide gevallen moet dus een omkeering hebben plaats gevonden en komen wij evenals bij de opeenvolging maleïnezuur → isodibroombarnsteenzuur → broomfumaarzuur tot het besluit, dat bij de aantasting der configuratie-bepalende valentie een omkeering heeft plaats gevonden.

Alleen bij partieele katalytische reductie van phenylpropiolzuurnatrium in tegenwoordigheid van colloidaal platina ontstaat 80 °/₀ van het te verwachten allo-kaneelzuur, met zinkstof en azijnzuur resp. alkohol werd echter bijna uitsluitend gewoon kaneelzuur gewonnen.[3]) Daar *katalytische* reductie van acetyleenderivaten eenigen waarborg van zekerheid scheen te geven hebben wij haar toegepast op tetrolzuur, waarbij dus in hoofdzaak α-crotonzuur te verwachten is.

Bij een micro-chemisch onderzoek dat eenige jaren geleden met medewerking van Mej. O. B. van der Weide werd uitgevoerd, waarbij her natriumzout van het tetrolzuur werd gereduceerd, kon echter geen α-crotonzuur worden gevonden.

Bij reductie van het vrije zuur met palladium-sol ontstond het α-crotonzuur naast isocrotonzuur in de verhouding van 2 : 1.

Wij zien hier dus, dat evenmin als bij reductie van het phenyl

---

[1]) Proc. Chem. Soc. **1911**, 150.

[2]) Journ. pr. ch. **84** 145 (1911).

[3]) Holleman en Aronstein B. **22** 1181 (1889); Liebermann en Truchsäss B. **42** 4674 (1909); E. Fischer, Ann. **386** 385 (1912).

propiolzuur deze chemische methode ons omtrent de configuratie voldoende zekerheid kan geven.

4. Bij de cyclische cis-trans-diolen valt ook deze zeer onzekere wijze van bepaling in het algemeen weg, omdat de bijbehoorende onverzadigde diolen niet bestaanbaar zijn.

Een uitzondering daarop maken de hydro-aromatische glycolen; deze kunnen uit de aromatische diphenolen, wèlke als cis-diolen kunnen worden beschouwd, bereid worden. Geheel vergelijkbaar met de reductie van acetyleenderivaten is dit geval natuurlijk niet; wij weten met vrij groote zekerheid, dat de OH-groepen der phenolen in het vlak van den benzolring gelegen zijn, terwijl wij bij de acetyleenderivaten, met het oog op het aantal isomeren, kunnen vermoeden dat de groepen aan de acetyleen-C-atomen in elkanders verlengde liggen.

De op dit gebied tot nog toe verrichte onderzoekingen, nml. de katalytische reductie van de diphenolen met behulp van nikkel, doen zien, dat hierbij een *mengsel* der beide cyclohexaandiolen ontstaat; een reductie met platina of palladium bij lage temperatuur schijnt tot nog toe niet te zijn uitgevoerd.

Er is echter een algemeene synthese dezer diolen, nml. uit de onverzadigde ringvormige koolwaterstoffen, hetzij door direkte oxydatie met $KMnO_4$ of door middel van de oxyden; deze is herhaalde malen toegepast en wij hebben er gebruik van gemaakt om de hydrindeendiolen te bereiden. Volgens gangbare [1]) opvattingen zoude hierbij uitsluitend het cis-diol moeten ontstaan:

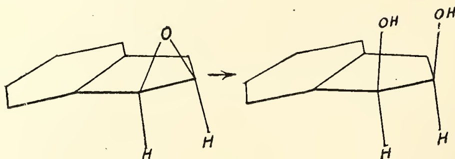



Fig. 1.

Het oxyde werd zoo voorzichtig mogelijk, nml. bij gewone temp. in waterige oplossing met een spoor azijnzuur gehydrateerd en toch konden wij ook hier zeer aanzienlijke hoeveelheden van het isomeer aantoonen. Ook bij deze hydratatie wordt een binding aan een der configuratiebepalende C-atomen verbroken en verkrijgen wij een partieele omkeering.

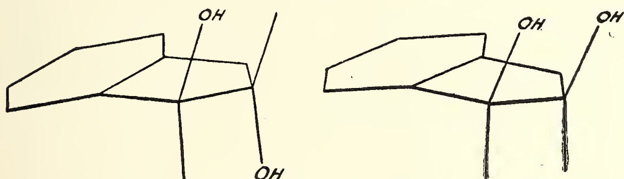
[1]) Versl. Kon. Ak. Wet. **26**, 1272 (1918).

Bij de beoordeeling der cis-trans-isomerie in dit geval vervalt voorloopig de bepaling van den zuurgraad, omdat de methoden van onderzoek nog niet gevoelig genoeg zijn.

Ook de anhydridevorming kan hier niet tot een resultaat voeren, omdat de dragers der stereoisomerie hierbij in het spel zijn, hetgeen *niet* het geval is bij de vorming der anhydriden van zuren zooals maleïnezuur en cumarinezuur.

Er resten hier 1e de splitsing in optische antipoden, die echter bij de glycolen niet eenvoudig is en nooit met succes is uitgevoerd.

2°. de vorming van complexen, die bij de suikers reeds succes heeft gehad, waardoor wij van de configuratie der $\alpha$- en $\beta$-glucose, $\alpha$- en $\beta$-fructose en $\alpha$- en $\beta$-galactose op de hoogte zijn gekomen. Ook in het boven beschreven geval heeft deze laatste methode uitsluitsel gegeven; het laagst-smeltend isomeer verhoogde nml. de geleidbaarheid van het boorzuur, terwijl het hoogstsmeltende haar eenigermate verlaagde en daaruit kon voor het eerste de cis-configuratie worden afgeleid. Ware dit niet zoo geweest, dan hadden wij hier voor een vrijwel hopeloos geval gestaan, omdat de al of niet splitsbaarheid in optische antipoden ons hier niet helpen kan:




Wij zien toch, dat de *beide* isomeren asymmetrisch zijn, dus in optische antipoden moeten kunnen worden gesplitst.

4. Wij hebben er de aandacht op willen vestigen, dat zoodra er valenties worden aangegrepen van atomen, die de stereo-isomerie bepalen, het blijkt dat de rangschikking der groepen in gevaar komt. Het verschijnsel aangeduid met den naam van Walden'sche omkeering valt hier natuurlijk ook onder; in zeer vele gevallen ontstaan beide mogelijke isomeren en zeer dikwijls in hoofdzaak, hetwelk wij niet zouden verwachten.

Niet alleen bij omzettingen zooals hier, waarbij stereo-isomeren ontstaan, zal dit plaats vinden; tengevolge van het ontstaan van stereo-isomere, duidelijk te onderscheiden verbindingen, is het verschijnsel hier zoowel als bij de Walden'sche omkeering waargenomen.

Maar het spreekt wel van zelf, dat het van algemeener aard is en dat wij den regel kunnen opstellen:

**Bij het plaats vinden van een chemische reactie, waarbij atomen worden opgenomen, afgestaan of verwisseld, heeft men steeds kans, dat de rangschikking der valenties aan het atoom of de atomen, waar de reactie plaats grijpt, gewijzigd wordt.**

Het zal nu verder overweging verdienen om uit te maken, of, wanneer er een bovengeformuleerde wijziging intreedt bij een of ander atoom, de rangschikking aan aangrenzende of verder af gelegen atomen wordt verstoord.

Zeer waarschijnlijk is dit niet en dit is gelukkig, want het zoude onze taak om de configuratie der stoffen te bepalen in hooge mate verzwaren, daar dan alle verband tusschen de optisch-actieve verbindingen zoude ontbreken. Ook zoude het feit van de anhydridevorming van maleïnezuur en citraconzuur geen waarde meer hebben en de verschillen, die waargenomen worden bij den invloed van de stoffen op de geleidbaarheid van het boorzuur zouden voor de configuratie-bepaling van geen beteekenis meer kunnen zijn.

Wanneer wij dus van deze onwaarschijnlijke gebeurtenis afzien, en aannemen, dat een aangrijpen der bindingen ergens in het molekuul de rangschikking aan de niet onmiddellijk betrokken atomen ongewijzigd laat, dan zullen wij in sommige oogenschijnlijk hopelooze gevallen nog een oplossing kunnen verkrijgen.

Wij hebben bij de beide isomere hexahydroterephtaalzuren gezien, dat de vergelijking van de dissociatie-constanten niet meer tot het doel kan leiden; zij zijn beide niet in optische antipoden te splitsen, ook kon van geen van beide een anhydride worden verkregen.

Van de $\Delta^2$tetrahydroterephtaalzuren (zie onderstaande afbeeldin-

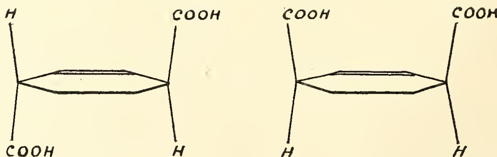



Fig. 2.

gen) moet het trans-zuur in optische isomeren te scheiden zijn en dus te onderkennen van het cis-zuur, dat niet splitsbaar is.

Door katalytische reductie moeten deze zuren nu in de bijbehoorende hexahydroterephtaalzuren over te voeren zijn, zonder den

stand van de carboxyl-groepen te veranderen en zal dus de configuratie van deze laatste definitief op te lossen zijn.

Een principieel hierop gelijkend geval is het volgende:

Benzochinon geeft bij voorzichtige oxydatie maleïnezuur; hieruit kunnen wij nu met vrij groote zekerheid besluiten, dat het zuur de cis-configuratie heeft, omdat deze rangschikking in het chinon-molekuul ligt opgesloten en er bij de afoxydatie van de —CH = CH-groep niet ingegrepen wordt in de bindingen, die de dragers zijn van de isomerie; waren wij voor het geval maleïnezuur-fumaarzuur zoo slecht toegerust als bij de hexahydroterephtaalzuren, dan was deze wijze van ontstaan voor de configuratie-bepaling van overwegend belang.

**Wiskunde.** — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. SCHOUTEN: *„Over het aantal graden van vrijheid van het geodetisch meebewegende assenstelsel en de omvattende euklidische ruimte met het geringste aantal afmetingen".*

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Zij $k$ een niet bijzondere kromme in een eindig deel $X_n$ eener algemeene ruimte van $n$ afmetingen, dat geen singuliere punten bevat, en waarin tusschen twee willekeurige punten één en slechts één geodetische lijn bestaat. Wordt in een punt $O$ van $X_n$ een stelsel van $n$ onafhankelijke richtingen aangenomen, dan kunnen we dit stelsel bij de verplaatsing van $O$ langs $k$ *geodetisch meebewegen.* Deze geodetische meebeweging kan meetkundig als volgt gedefinieerd worden. $X_n$ kan altijd met behoud van zijn lijnelement worden ondergebracht in een euklidische ruimte van $\frac{n(n+1)}{2}$ afmetingen. In deze ruimte bestaat een op een euklidische ruimte van $n$ afmetingen afwikkelbare uitgebreidheid $Y_n$, die $X_n$ in $k$ raakt. De geodetisch meebewogen richtingen zullen nu op ieder oogenblik coincideeren met de in de euklidische ruimte $Y_n$ evenwijdig aan zich zelf meebewogen richtingen. Analytisch blijkt, dat de bekende *kovariante* differentiaal van een gerichte grootheid bijv. een vektor, een *gewone* differentiaal is beoordeeld vanuit een geodetisch meebewogen assenstelsel. Is dus $\mathbf{v}$ een ten opzichte van dit stelsel in rust verkeerende vektor, dan voldoet $\mathbf{v}$ aan de differentiaalvergelijking:

$$d\mathrm{v} = 0$$

of in koordinaten:

$$dv^\lambda + \begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \lambda\end{Bmatrix} v^\mu \, dx^\nu = 0$$

en deze vergelijking geeft dan de analytische definitie van het

[1]) De kovariante notaties in dit artikel zijn de gebruikelijke, alleen worden de kontravariante kentallen van het lijnelement $d\mathrm{x}$ in tegenstelling tot G. RICCI en T. LEVI CIVITA doch in overeenstemming met G. HESSENBERG kontravariant geschreven. Voor de invariante notaties zie men de gelijktijdig aan de Koninkl. Akademie v. W. aangeboden verhandeling „Ueber die direkte Analysis der neueren Relativitätstheorie".

begrip geodetisch meebewegen. Een *geodetische* lijn is daardoor gekenmerkt, dat haar lijnelement in ieder punt dezelfde hoeken maakt met een langs de lijn geodetisch meebewogen assenstelsel.

Uitgaande van een punt $O$ wordt nu een assenstelsel geodetisch meebewogen langs een gesloten kromme. Bij terugkomst in $O$ zal het stelsel in het algemeen gedraaid blijken te zijn. Al naar de keus der kromme is het in het algemeen mogelijk op deze wijze $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ standen van het assenstelsel te verkrijgen. Is dit aantal voor een punt en dus voor ieder punt van het beschouwde gebied $\infty^N$, dan noemen wij $N$ het *aantal graden van vrijheid* van het geodetisch meebewegende assenstelsel. Nu bestaat de volgende eigenschap:

I. *Het aantal afmetingen der euklidische ruimte, waarin een gegeven uitgebreidheid $X_n$ met behoud van zijn lijnelement kan worden ondergebracht, is hoogstens gelijk aan het aantal graden van vrijheid van het geodetisch meebewogen assenstelsel vermeerderd met $n$.*

Het bewijzen van deze eigenschap is doel. Is het aantal graden van vrijheid kleiner dan $\frac{n(n-1)}{2}$, dan blijven er $r$ onderling volkomen loodrechte richtingen van $p_1$, $p_2$, $p_3$ afmetingen invariant, $p_1+\ldots+p_r=n$ (onder richting van 2 afmetingen of 2-richting wordt verstaan een vlakte richting, enz.). Het aantal mogelijkheden is juist gelijk aan het aantal wijzen, waarop $n$ als som van geheele positieve getallen kan worden geschreven. De $r$ invariante richtingen denken we ons in $O$ eens voor al gemarkeerd. Het assenstelsel worde dan geodetisch meebewegend in ieder punt van $X_n$ gebracht. De invariante $p_j$-richting, $j=1,\ldots,r$, bepaalt dan in elk punt een $p_j$-richting en het is de vraag of deze richtingen zich zullen samenstellen tot een stelsel van $\infty^{n-p_j}$ gebogen ruimten $P_j$ van $p_j$ afmetingen. Dit is een PFAFF'sch probleem in een algemeene ruimte.

We kiezen een bepaalde invariante richting, bijv. de $p_j$-richting, en schrijven eenvoudigheidshalve zoolang $p$ voor $p_j$. Bepalen we de bijbehoorende $p$-richting in ieder punt door de eenvoudige $p$-vektoren, ${}_p\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \frown \ldots \mathbf{v}_p$, die alle door geodetische verplaatsing in elkaar over kunnen gaan, en evenzoo de op deze volkomen loodrechte $(n-p)$-richting door ${}_q\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \frown \ldots \mathbf{w}_q$, $q=n-p$, dan is

$$d\,{}_p\mathrm{v} = 0 \quad , \quad d\,{}_q\mathrm{w} = 0,$$

en dientengevolge

$$\nabla\,{}_p\mathrm{v} = 0 \quad , \quad \nabla\,{}_q\mathrm{w} = 0.$$

Opmerking verdient, dat de vektoren $\mathbf{v}_k$, $k=1,\ldots,p$, door geodetische verplaatsingen *niet* in elkaar overgaan, en dus $d\mathbf{v}_k \neq 0$. Hetzelfde geldt voor $\mathbf{w}_l$, $l=1,\ldots,q$. Is nu het lijnelement $d\mathbf{x}$, dan is de gewone formuleering van een probleem als dit als volgt[1]). Gegeven de $pn$ functies van $x^1,\ldots,x^n$:

$$v_k^1,\ldots,v_k^n \quad ; \quad k=1,\ldots,p$$

(de kontravariante kentallen der vektoren $\mathbf{v}$) en de $qn$ functies:

$$w_{l_1},\ldots,w_{l_n} \quad ; \quad l=1,\ldots,q$$

(de kovariante kentallen der vektoren $\mathbf{w}$), voldoende aan de betrekking:

$$\sum_{\lambda}^{1,\ldots,n} v_k^\lambda \, w_{l\lambda} = 0$$

gelijkstaande met:

$$\mathrm{v}_k \cdot \mathrm{w}_l = 0,$$

en gevraagd, wanneer het systeem der totale differentiaalvergelijkingen:

$$\left\|\begin{matrix} dx^1 & \ldots & dx^n \\ v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \vdots & & \\ v_p^1 & \ldots & v_p^n \end{matrix}\right\| = 0$$

gelijkstaande met

$$d\mathrm{x} \;\; \mathrm{v}_1 \ldots\frown\ldots \mathrm{v}_p = 0$$

volkomen integrabel is.

Zijn $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ twee vektoren, die in den $p$-vektor ${}_p\mathbf{v}$ liggen en dus aan de betrekkingen voldoen:

$$\mathrm{w}_l \cdot \mathrm{r} = 0 \quad , \quad \mathrm{w}_l \cdot \mathrm{s} = 0 \quad , \quad l=1,\ldots,q$$

of, wat hetzelfde is:

$$\sum_{\lambda}^{1,\ldots,n} w_{l\lambda} r^\lambda = 0 \quad , \quad \sum_{\lambda}^{1,\ldots,n} w_{l\lambda} s^\lambda = 0 \quad , \quad l=1,\ldots,q,$$

overigens echter willekeurig zijn, dan zijn de integrabiliteitsvoorwaarden, zooals bekend is:

$$\sum_{\mu,\nu}^{1,\ldots,n} \left(\frac{\partial w_{l\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial w_{l\nu}}{\partial x^\mu}\right) r^\mu s^\nu = 0; \quad l=1,\ldots,q.$$

Deze vergelijkingen zijn algemeen kovariant[2]), en kunnen geschreven worden:

$$\mathrm{r} \frown \mathrm{s} \overset{2}{\cdot} \nabla \frown \mathrm{w}_l = 0; \qquad l=1,\ldots,q$$

---

[1]) Verg. bijv. E. von Weber, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem, blz. 93 e.v.

[2]) Tengevolge van het feit dat de uitdrukking $\frac{\partial w_{l\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial w_{l\nu}}{\partial x^\mu}$ algemeen kovariant is.

Uit die schrijfwijze volgt dan echter dat zij vervangen kunnen worden door de invariante vergelijking:

$$\mathrm{r} \frown \mathrm{s} \overset{2}{\cdot} \nabla \frown (\mathrm{w}_1 \cdot \overset{\frown}{\cdot} \cdot \cdot \mathrm{w}_q) = \mathrm{r} \frown \mathrm{s} \overset{2}{\cdot} \nabla \frown {}_q\mathrm{w} = 0,$$

of, zooals hieruit volgt, nog eenvoudiger, zonder gebruik te maken van twee hulpvektoren:

$${}_p\mathrm{v} \overset{2}{\cdot} \nabla \frown {}_q\mathrm{w} = 0.$$

Aan deze vergelijking is hier echter identiek voldaan, daar $\nabla \frown {}_q\mathbf{w}$ een veelvoudensom is van isomeren van $\nabla_q\mathbf{w}$, en $\nabla_q\mathbf{w}$ nul is.

Daar de vlakke $p_j$ afmetelijke raakruimten in de verschillende punten der uitgebreidheden $P_j$ $p_j$-richtingen hebben, die door geodetische verplaatsing in elkaar en in de invariante $p_j$-richting in $O$, doch nooit in een andere richting kunnen overgaan, kunnen twee ruimten $P_j$ elkaar dus nooit snijden. Een in $X_n$ geodetische lijn, die een lijnelement gemeen heeft met een bepaalde ruimte $P_j$, valt blijkbaar geheel in die ruimte en is ook in die ruimte geodetisch. Twee verschillende ruimten $P_j$ kunnen elkaar dus ook nooit raken. We noemen daarom de $P_j$-ruimten *parallel*. Daar, zooals bewezen zal worden, iedere geodetische lijn, die twee punten met een $P_j$-ruimte gemeen heeft, geheel in die ruimte ligt, noemen we een $P_j$-ruimte *geodetisch*. De $r$ verkregen stelsels van parallelle geodetische ruimten $P_1, \ldots, P_r$ staan in ieder punt van $X_n$ volkomen loodrecht op elkaar.

We beschouwen nu eerst het geval $r = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = q$. De $(n-1)$-afmetelijke parameterruimten der oervariablen $x^1, \ldots, x^p$ leggen we zoo, dat ieder $\infty^{n-p-1}$ ruimten $P$ bevat, die van $x^{p+1}, \ldots, x^n$ evenzoo ten opzichte der ruimten $Q$. In ieder punt brengen we weer de onderling volkomen loodrechte $p$- resp. $q$-vektoren ${}_p\mathbf{v}$ en ${}_q\mathbf{w}$ aan. De maatvektoren $\overset{,}{\mathbf{e}}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, p$ liggen dan in ${}_p\mathbf{v}$ en voor de maatvektoren $\overset{,}{\mathbf{e}}_\mu$, $\mu = p+1, \ldots, n$ geldt hetzelfde ten opzichte van ${}_q\mathbf{w}$. Daar algemeen $\overset{,}{\mathbf{e}}_\varkappa \perp \overset{,}{\mathbf{e}}_\mu$ is

$$g_{\varkappa\mu} = \overset{,}{\mathbf{e}}_\varkappa \cdot \overset{,}{\mathbf{e}}_\mu \; ; \quad \begin{array}{l} \varkappa = 1, \ldots, p \\ \mu = p+1, \ldots, n \end{array}$$

en de quadratische vorm $ds^2$ kan dus geschreven worden:

$$ds^2 = \sum_{\varkappa,\lambda}^{1,\ldots,p} g_{\varkappa\lambda}\, dx^\varkappa\, dx^\lambda + \sum_{\mu,\nu}^{p+1,\ldots,n} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

We zullen nu aantoonen dat $g_{\varkappa\lambda}$ onafhankelijk is van $x^{p+1}, \ldots, x^n$ en evenzoo $g_{\mu\nu}$ onafhankelijk van $x^1, \ldots, x_p$. Er kan altijd een skalar $k$ als functie van $x^1, \ldots, x^n$ gekozen worden, zoo dat:

$$_{p}\mathrm{v} = \mathrm{k}\, \overset{,}{\mathrm{e}_1} \ldots \overset{\frown}{\ } \ldots \overset{\nu}{\mathrm{e}_p}$$

Dientengevolge is:

$$\nabla k\, \overset{,}{\mathrm{e}_1} \overset{\frown}{\ldots} \overset{,}{\mathrm{e}_p} = (\nabla k)\, (\overset{,}{\mathrm{e}_1} \overset{\frown}{\ldots} \overset{,}{\mathrm{e}_p}) + k \sum_{\varkappa}^{1,\ldots,p} \nabla\, (\mathrm{a} \cdot \overset{,}{\mathrm{e}_\varkappa})\, (\overset{,}{\mathrm{e}_1} \ldots \overset{,\frown}{\mathrm{e}_{\varkappa-1}}\ \mathrm{a}\, \overset{,}{\mathrm{e}_{\varkappa+1}} \ldots \mathrm{e}_p) = 0.$$

Bij volledige overschuiving met:

$$\mathrm{e}_p \ldots \mathrm{e}_{\varkappa+1}\ \overset{,}{\mathrm{e}_\mu}\ \mathrm{e}_{\varkappa-1} \ldots \mathrm{e}_1\ \overset{,}{\mathrm{e}_\nu}$$

geven alle termen behalve de $(\varkappa + 1)$ - de nul en er ontstaat:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} a_\varkappa \right) a_\mu = 0 \qquad \begin{array}{l} \varkappa = 1, \ldots, p \\ \mu, \nu = p + 1, \ldots, n. \end{array}$$

Nu is:

$$g_{\mu\nu} = a_\mu\, a_\nu\ ,$$

en

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_\varkappa \right) a_\mu = a_{\varkappa\nu}\, a_\mu = \begin{bmatrix} \varkappa\nu \\ \mu \end{bmatrix} = a_{\nu\varkappa}\, a_\mu,$$

zoodat

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial a^\varkappa} = a_{\mu\varkappa}\, a_\nu + a_\mu\, a_{\nu\varkappa} = 0.$$

De maatverhoudingen in de $Q$ ruimten zijn dus onafhankelijk van $x^1, \ldots, x^p$, en evenzoo wordt de overeenkomstige eigenschap der $P$ ruimten met betrekking tot $x^{p+1}, \ldots x^n$ aangetoond.

Deze eigenschap kan ook als volgt worden uitgesproken:

II. *Ligt in een algemeene ruimte $X_n$ een stelsel van $\infty^{n-p}$ parallelle geodetische ruimten van p afmetingen P en volkomen loodrecht daarop een stelsel van $\infty^p$ dergelijke ruimten Q van $n-p$ afmetingen, dan wordt een figuur in een bepaalde P-ruimte door de ruimten Q op alle andere P-ruimten congruent geprojecteerd.*

Voor $p = 1$ is dit de bekende eigenschap, dat de afstand van twee bepaalde $Q$-ruimten gemeten langs de $P$-lijnen konstant is. In dit geval kan dus voor oervariabele $x^1$ de langs deze lijnen vanuit een bepaalde $Q$ ruimte gemeten booglengte worden ingevoerd, zonder dat de $Q$ ruimten ophouden parameterruimten te zijn. Het lijnelement kan dus in den vorm gebracht worden

$$ds^2 = dx^1{}_2 + \sum_{\mu,\nu}^{2,\ldots,n} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

waarin de $g_{\mu\nu}$ niet van $x^1$ afhangen. [1]) Daar nu echter een quadratische

[1]) Deze formule is reeds afgeleid door T. Levi Civita. Notione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. Rend. di Pal. 42 (17).

differentiaalvorm in $n-1$ veranderlijken altijd kan worden geschreven als een som van $\frac{n(n-1)}{2}$ quadraten van volledige differentialen, kan $ds^2$ tot een som van $\frac{n(n-1)}{2}+1$ dergelijke quadraten worden herleid. De ruimte $X_n$ is dus in dit geval onder te brengen in een euklidische ruimte van

$$\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n$$

afmetingen. Daar het aantal graden van vrijheid van het geodetische meebewegende assenstelsel juist

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

bedraagt, is het gestelde voor dit speciale geval bewezen.

Keeren we nu terug tot het geval $r=2$, $p_1=p$, $p_2=q$, dan is het aantal graden van vrijheid $\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}$. De quadratische vorm valt in twee vormen uiteen, die als een som van $\frac{p(p+1)}{2}$ resp. $\frac{q(q+1)}{2}$ quadraten te schrijven zijn. De ruimte $X_n$ is dus in elk geval in een euklidische ruimte van

$$\frac{p(p+1)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}=\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}+n$$

afmetingen onder te brengen, en ook hier is dus het gestelde bewezen.

Het geval $q>2$ laat zich tot het vorige herleiden. Daartoe wordt de differentiaalvorm in tweeën gesplitst. De ruimten van een der stelsels bijv. $P_2$ bevatten dan zelf weer minstens twee onderling volkomen loodrechte stelsels van evenwijdige geodetische ruimten. Het tweede deel van den differentiaalvorm is dan opnieuw te splitsen, enz.

Is de splitsing van den differentiaalvorm tengevolge van het bestaan van het $P_j$-stelsel:

$$ds^2=\mathbf{a}\overset{2}{\cdot}\overset{2}{d\mathbf{x}}=\mathbf{a}_p\overset{2}{\cdot}\overset{2}{d\mathbf{x}}+\mathbf{a}_q\overset{2}{\cdot}\overset{2}{d\mathbf{x}},$$

waarin $\mathbf{a}_p$ en $\mathbf{a}_q$ de ideale wortels zijn der beide deelen van den fundamentaaltensor $\mathbf{a}^2$, dan is de differentiaalvergelijking van een geodetische lijn:

$$d\frac{d\mathbf{x}}{ds}=d\left(\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\mathbf{a}=d\left(\mathbf{a}_p\cdot\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\mathbf{a}_p+d\left(\mathbf{a}_q\cdot\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\mathbf{a}_q=0.$$

Daar $\mathbf{a}_p$ zich alleen uit de maatvektoren $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_p$ samenstelt en $\mathbf{a}_q$ alleen uit $\mathbf{e}'_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n$, is:

$$d\left(\mathbf{a}_p \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\mathbf{a}_p = 0 \quad . \quad d\left(\mathbf{a}_q \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\mathbf{a}_q = 0$$

waaruit de eigenschap volgt.

III. *In de onderstelling bij de formuleering van II gemaakt, is de projectie van een geodetische lijn door middel van $Q$ ruimten op een $P$ ruimte, of omgekeerd, voor zoover die bestaat, weer een geodetische lijn.*

Liggen in een $P$ ruimte $P_1$ twee punten $A$ en $B$, dan vallen de projecties dezer punten op alle $Q$ ruimten samen. De projectie der in $X_n$ geodetische lijn $AB$ op een $Q$ ruimte gaat dus tweemaal door hetzelfde punt en is tevens geodetisch, wat alleen mogelijk is wanneer die projectie tot een punt ontaard is. Dan moet echter de geodetische lijn $AB$ geheel in een $P$ ruimte, dat is dus in dit geval in $P_1$, liggen.

Iedere geodetische lijn, die twee punten met een $P$-ruimte gemeen heeft, ligt dus geheel in die ruimte.

---

**Natuurkunde.** — De Heer KUENEN biedt eene mededeeling aan van den Heer D. COSTER: „*Over de rotatieslingeringen van een cylinder in een oneindig uitgestrekte onsamendrukbare vloeistof*".

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KLUYVER).

Bij de behandeling van dit probleem zal in hoofdzaak de methode gevolgd worden, die door Prof. VERSCHAFFELT in het analoge geval voor den bol gebruikt is[1]). We beschouwen de rotatieslingeringen om de as van een oneindig langen cylinder, die een gedwongen trilling uitvoert. Ons doel zal zijn de beweging in de vloeistof te leeren kennen, zooals die zich na oneindig langen tijd zal instellen, (praktisch na betrekkelijk korten tijd[2])) om daaruit het wrijvingskoppel te berekenen dat door de vloeistof op den cylinder wordt uitgeoefend. De berekeningen zullen wij ter vereenvoudiging betrekken op 1 cm. hoogte.

Laat de beweging van den cylinder worden gekenmerkt door $\alpha = a \cdot cos\, pt$ waarin $\alpha$ is de draaiingshoek. Het ligt alsdan voor de hand aan te nemen, dat de vloeistof zich zal gaan bewegen in concentrische cylinderschillen, die elk als geheel een slingering zullen uitvoeren. Dit aannemende, is het niet moeilijk de diff. verg. voor de beweging van de vloeistof op te stellen.

Zij $\varrho$ dichtheid van de vloeistof.
$\mu$ wrijvingsconstante van de vloeistof.
$\omega$ de hoeksnelheid van een cylinderschil.
$r$ de straal van de schil.

Dan is de wrijvingskracht per eenheid van oppervlak van een der beschouwde „cylinderschillen" $F = r\mu \dfrac{\partial \omega}{\partial r}$ en het wrijvingskoppel op een cylinderwand met straal $r : 2\pi\, r^3\, \mu \dfrac{\partial \omega}{\partial r}$.

Nemen we een cylinderschil met wanddikte $dr$, dan is hiervoor de bewegingsvergelijking

$$2\pi\, r^3\, dr\, \varrho \frac{\partial \omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2\pi\, r^3 \mu \frac{\partial \omega}{\partial r} \right\} dr.$$

[1]) Zie Versl. September 1915. Communications N⁰. 148*b*.
[2]) Zie Comm. N⁰. 148*b* pag. 22noot.

waaruit volgt:

$$\frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Het is van belang op te merken dat verg. 1 ook af te leiden is uit de algemeene verg. der hydrodynamica, zonder dat daarbij noodig is de 2[de] machten der snelheden te verwaarloozen, zooals bij vele dergelijke problemen het geval is. Voor oneindig groote trillingstijd d. w. z. voor uniforme rotatie wordt (1) gereduceerd tot

$$0=\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\omega}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De oplossing van (2) is $\omega=\frac{c_1}{r_2}+c_2$, $c_1$ en $c_2$ integratieconstanten zijnde. Draait de vaste cylinder van straal $R$ met uniforme rotatie $\Omega$ in een oneindig uitgestrekte vloeistof, dan wordt dit $\omega=\frac{R^2\Omega}{r^2}$; hetgeen voor het wrijvingskoppel zooals bekend is oplevert

$$-4\pi\mu R^2\Omega . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Om tot een mogelijke oplossing van (1) te komen moeten we onze aanname omtrent de beweging van de vloeistof nog iets nader preciseeren en wel zullen we aannemen, dat de hoekverplaatsing van elke schil aangegeven wordt door

$$\alpha_r=f(r)\ cos\ (pt-\varphi(r)) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

We kunnen (3) ook opvatten als reëele deel van de complexe functie $ue^{ipt}$, hierin is $u$ een functie van $r$, waarvan de modulus de amplitude der slingering, het argument de phaseverschuiving $\varphi(r)$ aangeeft. Bedenken we dat $\omega=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ dan kan vergl. (1) herleid worden tot:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{du}{dr}-\frac{i\varrho pu}{\mu}=0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Vergl. (4) hangt nauw samen met de diff.vergl. der cylinderfuncties. Immers de Bessel'sche vergl. der 1[e] orde $\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+$ $+\left(1-\frac{1}{z^2}\right)y=0$, gaat door substitutie $y=zv$ over in:

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{3}{z}\frac{dv}{dz}+v=0.$$

Hieruit volgt als de algemeene oplossing van vergl. (4):

$$u=\frac{1}{r}\{A\,J_1\,(cr)+B\,N_1\,(cr)\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarin $c = \sqrt{\frac{-i\varrho p}{\mu}}$, $A$ en $B$ (complexe) integratieconstanten zijnde. $J_1$ is de cylinderfunctie van de 1e soort en 1e orde, $N_1$, die van 2e soort en 1e orde[1]).

Voor $c$ moeten we een afspraak treffen. We kiezen den wortel met negatief imaginair gedeelte dus $c = ke^{-\frac{i\pi}{4}}$ waarin $k = |c| = \left|\sqrt{\frac{\varrho p}{\mu}}\right|$.

Als grensvoorwaarden hebben we ten eerste $\lim\limits_{r=\infty} r\alpha_r = 0$[2]). Daar deze betrekking voor alle waarden van $t$ moet gelden volgt hieruit $\lim\limits_{r=\infty} ru = 0$.

De cylinderfuncties met complex argument worden in het oneindige alle oneindig behalve de z.g. functies der 3de soort of wel de functies van HANKEL $H_p^{(1)}$ en $H_p^{(2)}$. Hierin verdwijnt $H_p^{(1)}$ in het pos. imag. halfvlak in het oneindige en wordt daarentegen oneindig in het negat. imag. halfvlak, $H_p^{(2)}$ gedraagt zich juist omgekeerd. Door onze keuze van $c$ in het negat. imag. halfvlak worden we tot de functie $H_1^{(2)}$ gevoerd. Hetgeen voor de integratieconstanten in verg. (5) geeft de betrekking $B = -iA$[3]) zoodat (5) wordt

$$u = \frac{A}{r} H_1^{(2)}(cr) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ter bepaling van $A$ hebben we de 2e grensvoorwaarde $u_R = a \cos pt$, als $R$ de straal van den cylinder is. We nemen dus aan dat geen glijding langs den wand plaats vindt.

Dus $A = \frac{aR}{H_1^{(2)}(cR)}$

zoodat

$$\alpha_r = R \frac{aR}{H_1^{(2)}(cR)} \frac{H_1^{(2)}(cr)}{r} e^{ipt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Het symbool $R$ beteekent, dat van de volgende functie het reëele gedeelte genomen moet worden

Hadden we voor $c$ den wortel met pos. imag. gedeelte gekozen, dan zouden we tot de functie $H_1^{(1)}$ onze toevlucht hebben moeten

---

1) Zie JAHNKE u. EMDE. Funktionentafeln pp. 90 en 93.
NIELSEN. Cylinderfunktionen. In plaats van $N$ gebruikt NIELSEN het symbool $Y$.

2) Prof. VERSCHAFFELT stelt $\lim\limits_{r=\infty} \alpha_r = 0$, hetgeen m.i. minder juist is. Immers de *lineaire* snelheid moet in het oneindige verdwijnen. Zie Comm. 148*b* pag. 22.

3) Tusschen de $J$, $N$ en $H$ functies bestaat een lineaire betrekking. Zie J. u E. p. 95.

nemen. Zooals men zich licht overtuigen kan, zou dit aan het essentiëele van oplossing (7) evenwel niets veranderd hebben.

Voor groote waarden van $x$ (reëel pos.) nadert $H_1^{(2)}(x\sqrt{-i})$ asymptotisch tot

$$-\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\, e^{-i\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

zoodat voor $(k\ R)$ groot genoeg:

$$\alpha_r \approx -\frac{aR}{|H_1^{(2)}(cR)|}\,\frac{e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi k}\, r^{1^1/_2}}\cos\left(pt-\frac{kx}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}-\varphi\right) \quad . \quad (8)$$

waarin $\varphi =$ argument $H_1^{(2)}(c\ R)$.

Uit (8) blijkt dat zich gedempte golven van den cylinder naar het oneindige voortplanten, de voortplantingssnelheid hiervan is

$$v=\frac{p}{k/\sqrt{2}}=\frac{p\sqrt{2}}{k}=\sqrt{\frac{2\,p\,\mu}{\varrho}}$$

de golflengte

$$\lambda = vT=\frac{2\,\pi\, v}{p}=\frac{2\pi\sqrt{2}}{k}=2\,\pi\sqrt{\frac{2\mu}{\varrho p}}\, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

Het wrijvingskoppel op den wand van den slingerenden cylinder is $2\pi\mu R^3\left[\frac{\partial\omega}{\partial r}\right]_R$ waarin $\omega=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$. Bepalen we eerst $\left[\frac{\partial\alpha_r}{\partial r}\right]_R$ uit (7)

$$\left[\frac{\partial\alpha_r}{\partial r}\right]_R = \mathrm{R}\left[-\frac{a}{R}\,e^{ipt}+ac\,\frac{H_1^{(2)\prime}(cR)}{H_1^{(2)}(cR)}\,e^{ipt}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Voor herleiding van het 2[de] gedeelte van het rechterlid van (9) maken we gebruik van de bekende recursieformule der cylinderfuncties:

$$\frac{dH_1^{(2)}(z)}{dz}=H_0^{(2)}z-\frac{1}{z}H_1^{(2)}(z)$$

Hierdoor krijgt (9) de gedaante

$$\left[\frac{\partial\alpha_r}{\partial r}\right]_R = \mathrm{R}\left[-\frac{2a}{R}\,e^{ipt}+ac\,\frac{H_0^{(2)}(cR)}{H_1^{(2)}(cR)}\,e^{ipt}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

hetgeen voor het wrijvingskoppel oplevert

$$K=2\,\pi\,\mu\,R^3\left[\frac{\partial\omega}{\partial r}\right]_R=-\,4\pi\mu R^2\,\omega+\mathrm{R}\,\frac{d}{dt}\left[2\pi\mu\,R^3\,ac\,\frac{H_0^{(2)}(cR)}{H_1^{(2)}(cR)}\,e^{ipt}\right] \quad (11)$$

Voor oneindigen slingertijd, dus $p=0$, maar van 0 verschillende

rotatiesnelheid wordt $|c| = \sqrt{\frac{\varrho p}{\mu}}$ gelijk 0. Dan verdwijnt het 2^de^ term van het linkerlid van (11) uit twee oorzaken: 1e wordt de factor $c = o$, 2e. $\lim_{cR=0} \frac{H_0^{(2)}(cR)}{H_1^{(2)}(cR)} = 0.$; we houden dan alleen de 1e. term over; die overeenkomt met vgl. (2′).

Verder is

$$\lim_{cR=\infty} \frac{H_0^{(2)}(cR)}{H_1^{(2)}(cR)} = -i. \quad {}^{1)}$$

Zooals uit bijgaande grafische voorstellingen [2]) van modulus en argument van $\frac{H_0^{(2)}(cR)}{H_1^{(2)}(cR)}$ blijkt, is deze grenswaarde praktisch al bereikt bij

$$\left.\begin{aligned} |cR| &= k \,.\, R = 10 \\ |c| &= k = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\lambda} \quad \text{(zie 8')} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

De voorwaarde $|cR| \geqq 10$ beteekent dus, dat de straal van den cylinder ongeveer gelijk aan of grooter dan de golflengte moet zijn. Is $R$ klein tegen $\lambda$, dan speelt het 2^de^ deel van het wrijvingskoppel geen rol. Voor $|cR| \geqq 10$ wordt de 2^de^ term van het rechterlid van (10)

$$-\,a\,c\,i\,e^{ipt} = -\,a\,k\,e^{i\left(pt + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \left(\text{immers } c = k\,e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Zoodat vgl. (11) nu wordt:

$$K = -\,4\,\pi\,\mu\,R^2\,\omega - 2\,\pi\,\mu\,k\,R^3 \frac{d}{dt}\left(a\cos\left(pt + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad . \quad (13)$$

waarin

$$\omega = \frac{d}{dt}(a\cos pt).$$

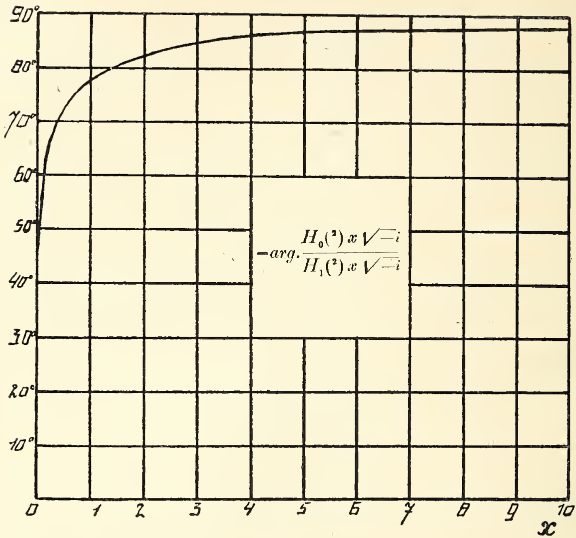
Het wrijvingskoppel valt dus in twee deelen uiteen, één waarin de dichtheid van de vloeistof niet voorkomt en één, waarin zij wel een rol speelt, welk deel dus op het uitzenden van golven betrekking heeft. Bij grensovergang tot uniforme rotatie blijft alleen het eerste deel behouden.

Voor de beoordeeling van het 2^de^ deel van het wrijvingskoppel

---

1) Zie J. u. E. l. c.

2) Voor tabellen voor $H_0^{(2)}$ en $H_0^{(2)}$ zie J. u. E. p 139 en 140.




1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

$$\text{modulus}\ \frac{H_0^{(2)} x\sqrt{-i}}{H_1^{(2)} x\sqrt{-i}}$$

is de grootheid $k = \sqrt{\frac{\rho p}{\mu}}$ van belang. Nemen we een slingertijd van $2\pi$ sec. dus $p = 1$, dan is $k = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$.

Dit geeft de volgende waarden voor $k$.

| | $\varrho$ | $\mu$ | $k = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,(p = 1)$. |
|---|---|---|---|
| Water 16° | 1 | 0,011 | 9,5 |
| Atm. lucht 0° | 0,0013 | 0,000171 | 2,8 |
| Lucht 0,01 atm. [1]) | | | 0,28 |
| Lucht 0,001 atm. [1]) | | | 0,09 |
| Waterstof 1 atm. 0° | 0,0000898 | 0,000085 | 1 |

Uit deze tabel blijkt, dat behalve bij verdunde gassen $R$ betrekkelijk klein moet zijn, om het 2[de] deel t. o. v. het 1e, te mogen verwaarloozen. Zoo is voor atm. lucht bij $R = 0{,}5$ c.m. $kR = 1{,}4$ en $\left|\frac{H_2^{(0)}(cR)}{H_0^{(1)}(cR)}\right| = 0{,}86$, zoodat de amplitude van den 2[den] term van het wrijvingskoppel nog altijd 60°/₀ bedraagt van die van den eersten (zie vgl. (11)) dit alles bij een slingertijd van $2\pi$ sec.

Interessant is het nog een bepaalden limietovergang van vergel. (13) na te gaan. Laat $R$ oneindig worden en $a$ tegelijkertijd 0, zóó dat $Ra$ tot een eindige waarde $b$ convergeert. We komen zoo op het ééndimensionale probleem van trilling van een onbegrensde vlakke plaat in zijn eigen vlak in een oneindig uitgebreide vloeistof. De wrijvingskracht per vlakte-eenheid vinden we uit vergel. (13) als te zijn:

$$F = -\mu\, k \frac{d}{dt}\left(b \cos\left(pt + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

welke formule uit de hydrodynamica bekend is.[2]) Een term analoog aan $-4\pi\mu R^2\omega$ komt bij het ééndimensionale probleem niet voor, hetgeen duidelijk is, als men bedenkt, dat bij uniforme translatie van de plaat geen evenwichtstoestand intreedt, dan nadat de geheele

[1]) Bij deze spanningen is de $\mu$ nog weinig kleiner geworden.
Zie Kundt u. Warburg. Pogg. Ann. 1875 Band CLV.

[2]) Zie Lamb. Hydrodynamik, vertaling v. Friedel, p. 694.

vloeistof tot in het oneindige met de snelheid van de plaat voortbeweegt.

Tot slot is het van belang na te gaan voor welke frequentie de amplitude van de gedwongen trilling maximum wordt m. a. w. op welke frequentie het systeem cylinder-vloeistof resoneert, als de cylinder door een quasi-elastische kracht in den evenwichtstand teruggedreven wordt.

De diff. vergel. voor de gedwongen trilling in complexe notatie is

$$\theta \frac{d^2 a}{dt^2} + L \frac{da}{dt} + Ma = E e^{ipt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hierin is voor ons geval $L$ een complexe grootheid $L = L' + iL''$ waarin

$$L' = (4\pi \mu R^2 + \sqrt{2} \pi \mu k R^3)$$
$$L'' = \sqrt{2} \pi \mu k R^3.$$

Wanneer we ons alleen bekommeren om de particuliere oplossing van (15), die de gedwongen trilling aangeeft, dan kunnen we (15) ook aldus schrijven:

$$\left(\theta + \frac{L''}{p}\right) \frac{d^2 a}{dt^2} + L' \frac{da}{dt} + Ma = E e^{ipt}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

We zien dus, dat tengevolge van de beweging van de vloeistof een schijnbare vergrooting van het traagheidsmoment optreedt.

Stel

$$\theta + \frac{L''}{p} = \theta'$$

(16) geeft als particuliere oplossing:

$$a = \frac{E}{\sqrt{(M - \theta' p^2)^2 + L'^2 p^2}} e^{i(pt - \varphi)}$$

waarin de phasehoek $\varphi$ door de constanten van de diff.vergel. bepaald wordt.

Resonantie treedt op voor $M - \theta' p^2 = 0$
of

$$\theta p^2 + L'' p - M = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Nu is $L''$ met $k$ evenredig en $k = \sqrt{\frac{p\varrho}{\mu}}$, zoodat we gevoegelijk kunnen schrijven $L'' = Np^{\frac{1}{2}}$, $N$ een constante zijnde.

In plaats van (17) komt nu

$$\theta p^2 + Np^{1\frac{1}{2}} - M = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Deze in $\sqrt{p}$ biquadratische vergel. bepaalt de frequenties waarop het systeem resoneert. Bij nader onderzoek blijkt er slechts één resonantiefrequentie te zijn. Uit den aard der zaak hebben we alleen

met reëele wortels $p$ van vergel. (18) te maken. Er blijken er twee te zijn, één waarvoor $\sqrt{p}$ positief is; en één waarvoor $\sqrt{p}$ negatief is. Nu volgt uit onze berekening, dat we $\sqrt{p}$, die optreedt in de grootheid $k$ essentiëel positief hebben verondersteld. Zetten we toch een negatieve $\sqrt{p}$ in onze formules in, dan krijgen we een golfstelsel, dat zich uit het oneindig naar den cylinder toebeweegt. In het oneindige is de amplitude van dit golfstelsel evenwel oneindig groot, zoodat niet aan onze eerste grensvoorwaarde voldaan wordt.

We kunnen onze grensvoorwaarden ook anders kiezen. We kunnen ons bijv. de vloeistof begrensd denken door een tweeden met den eersten coaxialen, rustenden cylinder. Het is dan raadzaam, de algemeene oplossing van vergel. (4) te schrijven in den vorm

$$u = \frac{1}{r}\{C\, H_1^{(2)}(cr) + D\, H_1^{(2)}(cr)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Op een voldoend grooten afstand van de as van de cylinders ontstaan dan twee golfstelsels, waarvan het eene zich naar buiten, het andere zich naar binnen voortplant. Aan den wand van den buitensten cylinder krijgen we een terugkaatsing met phaseomkeering, zoodat daar de vloeistof in rust is. Voor de bepaling van de integratie-constanten $C$ en $D$ krijgen we tamelijk ingewikkelde betrekkingen die, daar zij weinig interessants meer leveren, hier gevoegelijk achterwege kunnen blijven.

Ook het probleem van de vrije trilling biedt geen extra moeilijkheden meer:

We zoeken nu van verg. (1) een oplossing van den vorm

$$a_r = f_{(r)}\, e^{-k't} \cos (k''t - \varphi(r)),$$

hetgeen wordt voor $r = R$; $a_R = a\, e^{-k't} \cos k''t$. Ook nu kunnen we schrijven $a = u\, e^{nt}$, waarin $n = -k' + ik''$.

We kunnen dezelfde oplossingsmethode volgen. In plaats van (7) komt nu

$$a_r = \frac{aR}{H_1^{(2)}(c'R)} \frac{H_1^{2}(c'r)}{r} e^{nt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

waarin $c' = \sqrt{-\frac{n\varrho}{\mu}}$, als voor $c'$ de wortel met negatief imaginair gedeelte wordt gekozen

$$\left[\frac{da_r}{dr}\right]_R = -\frac{2a}{R} e^{nt} + ac' \frac{H_0^{(2)}(c'R)}{H_1^{(2)}(c'R)} e^{nt}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\lim_{|c'R| = \infty} \frac{H_0^{(2)}(c'R)}{H_1^{(2)}(c'R)} = -i$$

Zoodat:

$$\left[\frac{d\alpha_r}{dr}\right]_R = -\frac{2a}{R}e^{nt} - a\sqrt{\frac{n\varrho}{\mu}}\,e^{nt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

als nu voor $\sqrt{\frac{n\varrho}{\mu}}$, de wortel met pos. reëel bestanddeel wordt gekozen.

Het wrijvingskoppel wordt nu:

$$2\pi\mu R^3\left[\frac{d\dot{\alpha}}{dr}\right]_R = -2\pi\mu R^3\left[\frac{2}{R}+\sqrt{\frac{n\varrho}{\mu}}\right]\dot{\alpha}_R.$$

De diff. vergel. der vrije trilling is:

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} + L\frac{d\alpha}{dt} + M\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Hetgeen voor de eigen frequenties van het systeem de verg. geeft

$$Kn^2 + Ln + M = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Hierin bevat $L$ nog $\sqrt{n}$.[1])

Stel nog $L = P + Q\sqrt{n}$ waarin

$$P = 4\pi\mu R^2 \text{ en } Q = 2\pi\mu R^3\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}.$$

Dan krijgt (24) de gedaante:

$$Kn^2 + (P + Q\sqrt{n})\,n + M = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Vgl. (25) is biquadratisch in $z = \sqrt{n}$. Zij blijkt bij nader onderzoek 2 (complexe) wortels $z$ in de rechterhelft van het complexe vlak te bezitten en 2 in de linkerhelft, waarvan we alleen de eerste gebruiken kunnen (zie vgl. 22). Zoodat het systeem één eigen frequentie heeft. Verder blijkt $z^2 = n$ een negatief reëel bestanddeel te bezitten, hetgeen ook niet anders te verwachten was.

[1]) Een analoge discussie voor het probleem van den bol ontbreekt bij Prof. Verschaffelt. Zie Communication 148*b* p. 26.

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer J. W. van Wijhe aangeboden het door den Heer Dr. D. de Lange Jr. bewerkte manuscript eener verhandeling van wijlen het lid der Afdeeling, den Heer A. A. W. Hubrecht, getiteld: „*Over de vroegste ontwikkelingsstadiën van Galeopithecus volans*," van welke in 1908 door den Heer Hubrecht toegezegde verhandeling de platen reeds werden gedrukt, doch waarvan de tekst door hem nog niet was ingeleverd toen hij in 1915 overleed.

Namens de Heeren Dr. E. H. Büchner en Dr. A. H. W. Aten, biedt de Heer A. F. Holleman voor de boekerij ten geschenke aan een exemplaar van „*Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre von* H. W. Bakhuis Roozeboom, *Zweites Heft: Systeme aus zwei Komponenten, Teil II: Systeme mit zwei flüssigen Phasen von* Dr. E. H. Büchner, *Teil III: Pseudobinäre Systeme von* Dr. A. H. W. Aten."

De vergadering wordt gesloten.

---

**26 Augustus 1918.**

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 29 JUNI 1918.

DEEL XXVII.

N°. 2.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

## INHOUD.

---

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1. Bericht van de Heeren L. E. J. BROUWER en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2. Bericht van den Heer M. W. BEIJERINCK, dat hij bereid is te voldoen aan het verzoek om met de andere leden-botanici der Afdeeling en den Heer G. VAN ITERSON JR. een voorstel aan de Afdeeling in te dienen over de bestemming, welke ditmaal te geven zal zijn aan de beschikbaar gestelde som uit de renten van het P. W. KORTHALS-fonds.

Aangenomen voor kennisgeving.

3. Bericht van het overlijden op 28 Mei j.l. van Dr. R. ASSMANN, Oud-Directeur van het Kon. Pruisisch aeronautisch Observatorium te Lindenberg.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

**Wiskunde.** — De Heer J. CARDINAAL brengt, mede namens den Heer H. A. LORENTZ, het volgende rapport uit:

De verhandeling, die Prof. J. A. SCHOUTEN bij de Kon. Akademie van Wetenschappen indiende, en die we ter beoordeeling ontvingen, dankt haar oorsprong aan de pogingen van den schrijver om een directe analytische behandeling der algemeene relativiteitstheorie te ontwerpen. Wat op dit gebied tot nu toe geschiedde, bevredigde hem blijkbaar niet.

Wel is waar geven ook EINSTEIN en GROSSMANN een theoretische behandeling van dit onderwerp; zij passen evenwel de absolute differentiaalrekening van RICCI en LEVITÁ-CIVITA toe, werken alzoo met de kengetallen en niet met de grootheden zelven. De berekeningen hierbij worden zeer ingewikkeld; een meer directe analyse is dus wenschelijk. Hierbij zijn veel bezwaren te overwinnen; bij de vermenigvuldiging zijn ze niet onoverkomelijk, maar bij de differentiatie doen ze zich sterk gevoelen.

De inzender tracht nu te komen tot uitdrukkingen, die, wat haar vorm betreft, overzichtelijk zijn en alzoo het maken van berekeningen met tabellen overbodig maken.

Dit brengt hem tot de volgende indeeling zijner verhandeling:

*a.* Uiteenzetting van het stelsel $R^0_{4\infty}$, die de bestaande vierdimensionale vectoranalyse omvat en volledig maakt.

*b.* Beschouwing der vierdimensionale uitgebreidheden op dezen grondslag.

*c.* Toepassing der gevonden methode op de variatie-vraagstukken der nieuwere relativiteitstheorie.

Uit het bovenstaande moge blijken, dat de inhoud zeer veel omvattend is; we zullen trachten zooveel mogelijk van elk onderdeel de kenmerkende hoofdgedachten weer te geven.

Het eerste deel is de inleiding, het tweede kan als de kern der verhandeling worden beschouwd. We brengen hierbij in herinnering, dat de schrijver in 1914 het als dissertatie verschenen geschrift: „Grundlagen der Vektor-und Affinoranalysis" uitgaf; het eerste deel nu kan men beschouwen als een natuurlijke voortzetting van dezen arbeid. Even als vroeger omschrijft hij, in overeenstemming met de bepaling van FELIX KLEIN, de beteekenis van een grootheid als alleen bestaande in haar verband met bepaalde groepen, zoo wordt de methode van oriënteering, d. i. de vervorming der kengetallen,

haar bepalend kenmerk. Onder de getalstelsels is er een, dat voor de verhandeling van het hoogste belang is, d. i. de bij de orthogonale groep voor vier hoofdveranderlijken behoorende $R_4^0$, welke de analysis van de eenvoudige relativiteitstheorie vormt. Dit vastgesteld hebbende, neemt Schr. zich voor het onderzoek uit te breiden op grootheden van hoogere orde en op de algemeenere groep, die de grondslag is der nieuwere relativiteitstheorie.

Houdt men deze richting in het oog, dan wordt het ook mogelijk zich een voorstelling te vormen van de verschillende bewerkingen, die Schr. op deze $R_4^0$ toepast. Opvolgend worden behandeld: de getallen-stelsels $R_4^0$ der lineaire grootheden; de regels voor de bewerkingen van die stelsels; de meetkundige verklaring van eenige produkten; de lineaire homogene vervormingen van vectoren en bivectoren; de scalaire overschuivingen van grootheden van hoogere orde, waaruit dan de overschuivingsregel voortvloeit; de betrekking van het stelsel $R_4^0$ tot de eenvoudige relativiteitstheorie; de vectoriëele overschuivingen van grootheden van hoogere orde; de ontbinding van een affinor van de tweede hoofdorde; het stelsel $S_n^l$ der lineaire grootheden; de operatoren en operatorkernen; en de lijnen, oppervlakken, hyperoppervlakken en ruimte-integralen in $R_4$.

Na deze inleiding volgt dus in het tweede deel de analyse, bij de algemeene relativiteitstheorie behoorende. De afleiding der hierbij behoorende stellingen en het vaststellen der hieruit voortvloeiende methoden hebben ongetwijfeld het meest van de vindingskracht van den schrijver gevergd. Gelijk we reeds in den beginne opmerkten, bestond bij hem onvoldaanheid over de tot nu toe ingeslagen wegen; het ligt dus voor de hand, dat hij zijn afleidingen vergelijkt met die van Christoffel, Hessenberg, Ricci en Levita—Civita, Maschke, Ingold and Shaw, F. Jung, wat dan ook zeer grondig geschiedt.

Als specifiek bij den schrijver voorkomende en dus als het meest oorspronkelijke kunnen we nu beschouwen het consequent werken met ideale vectoren en het gebruik van de geodetische differentiaal en het geodetische differentiaalquotient. Van deze wordt de meetkundige beteekenis in het licht gesteld door de omschrijving, dat bij elke niet bijzondere kromme $k$ in een willekeurige vierdimensionale uitgebreidheid $x$, die in een hoogere euklidische ruimte is ondergebracht, een ontwikkelbare vierdimensionale uitgebreidheid is te construeeren, die $x$ langs $k$ aanraakt.

De zeer uitgebreide behandeling van deze differentiatie stelt aan den lezer hooge eischen, aan welke evenwel tegemoet wordt gekomen door afbeeldingen, vervaardigd naar aanwijzing van den schrijver en naar door hem ontworpen modellen. Tevens volgt hij de methode

om de uitkomsten in overeenstemming te brengen met die van het eerste gedeelte.

De invoering van het begrip der geodetische differentiatie, waardoor het mogelijk wordt, vectoren in twee oneindig dicht bijeengelegen punten met elkander te vergelijken, stelt den schrijver thans in staat, een duidelijke en veelal aanschouwelijke beteekenis te hechten aan verschillende grootheden, die in de algemeene relativiteitstheorie een rol spelen, met name aan den affinor $G_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ van RIEMANN en CHRISTOFFEL. Wij vestigen ook in het bijzonder de aandacht op een uitbreiding der bekende stelling van GAUSS, aangaande het verband tusschen een oppervlakte- en een ruimte-integraal, en op de interpretatie van de kromming der beschouwde vierdimensionale uitgebreidheid.

In het laatste hoofdstuk wordt de nieuwe analyse in het kort op de gravitatietheorie toegepast. Dank zij de ingevoerde begrippen en notaties kunnen nu alle vergelijkingen dezer theorie in verrassend beknopten en overzichtelijken vorm worden geschreven; de vergelijkingen voor het electromagnetisch veld nemen dezelfde gedaante aan als in de eenvoudige relativiteitstheorie, alleen met dit onderscheid dat de differentiaalquotienten als geodetische moeten worden opgevat.

Met de bekorting der uitdrukkingswijze gaat een vereenvoudiging der afleidingen gepaard; in weinige bladzijden kunnen uit het aangenomen variatiebeginsel de bewegingsvergelijkingen der materie, de electromagnetische grondvergelijkingen en ook de differentiaalvergelijkingen voor het gravitatieveld worden verkregen. Ten duidelijkste blijkt hieruit van hoeveel nut de door den schrijver met zooveel scherpzinnigheid ontwikkelde wiskundige methode voor de nieuwe gravitatietheorie, die thans allerwege de aandacht trekt, kan zijn. Wel is het niet gemakkelijk — en dat kon ook niet anders — zich met de nieuwe symboliek vertrouwd te maken, zoodat dan ook de natuurkundigen den schrijver dankbaar zullen zijn voor elke vereenvoudiging, die hij nog zou kunnen aanbrengen, maar daar staat tegenover dat deze directe analyse, omdat zij alle onnoodig bijwerk vermijdt, bij het onderzoek naar de grondslagen der theorie van EINSTEIN belangrijke diensten zal kunnen bewijzen. Men mag verwachten dat zij ook den weg tot nieuwe gevolgtrekkingen zal vergemakkelijken.

Gaarne stellen wij voor, de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen.

De vergadering vereenigt zich met de conclusie van het rapport. Aan den Heer SCHOUTEN zal hiervan bericht gezonden worden.

**Natuurkunde.** — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over: *„De inrichting voor zonnewaarnemingen in het Natuurkundig Laboratorium te Utrecht".*

Toen in 1914 besloten was tot het bijbouwen van enkele lokalen op den westelijken vleugel van het Physisch Laboratorium te Utrecht, kon gevolg worden gegeven aan het reeds lang gekoesterd plan, om in de spectroscopische afdeeling van het laboratorium het verrichten van astrophysische waarnemingen mogelijk te maken.

Het nieuwe deel van het gebouw werd daartoe zóó geconstrueerd, dat voor een kijker met spectrograaf een vertikale lichtweg van ongeveer 20 M. beschikbaar kwam, en dat ondanks die vrij groote hoogte een voldoende stevigheid voor trilvrije opstelling der instrumenten gewaarborgd was.

In de kosten der aanschaffing van de noodige hulpmiddelen kon van rijkswege slechts gedeeltelijk worden voorzien. Dat wij niettemin konden besluiten, een plan op vrij onbekrompen schaal te ontwerpen voor een complex van toestellen, die aan hooge eischen van soliditeit en nauwkeurige bewerking moesten voldoen, is te danken aan de toezegging eener ruime geldelijke bijdrage welke mij kort vóór het uitbreken van den oorlog werd gedaan namens de administratieve commissie van het Institut SOLVAY te Brussel, verder aan den finantieelen steun van TEYLER's Stichting en van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen, en niet het minst aan de mildheid van Mr. J. A. COHEN STUART. In het geheel werd tot nu toe, op zoo zuinig mogelijke wijze, ongeveer *f* 10000 aan de uitrusting besteed. Een woord van groote erkentelijkheid aan allen, die het tot stand komen der installatie zoo krachtig hebben bevorderd, mag hier niet ontbreken.

Moeilijkheden, uit den oorlogstoestand voortvloeiende, hebben groote vertraging veroorzaakt in de aflevering van verschillende onderdeelen; maar nu is toch eindelijk ons observatorium zoo ver gereed, dat de gelegenheid voor het doen van astrophysische waarnemingen, in qualiteit vergelijkbaar met hetgeen men in andere landen op dit gebied bereikt, thans ook te Utrecht openstaat. Voorloopig is het instrumentarium hoofdzakelijk ingericht voor de studie van de zon; er is echter op gerekend dat het ook voor waarnemingen betreffende andere hemellichamen zal moeten dienen.

Betrokken uit het buitenland werd alléén het benoodigde optische glaswerk, namelijk twee groote coelostaatspiegels, een astronomisch objectief, een verlichtingslens en eenige planparallele platen, dit alles van Carl Zeiss in Jena. Alle overige deelen van het instrumentarium (voor zoover zij niet reeds behoorden tot den inventaris van het natuurkundig laboratorium) zijn volgens opgaaf in Nederland vervaardigd: de zware stukken in de Machinefabriek „Jaffa" van Louis Smulders & Co., te Utrecht; fijnere onderdeelen bij de N. V. Instrumentenfabriek en -handel voorheen P. J. Kipp & Zonen te Delft, in de Instrumentenfabriek van M. C. Vink te Utrecht, en in de eigen werkplaats van het Natuurkundig Laboratorium door den instrumentmaker G. Koolschijn.

*De hoofdlijnen van het plan.*

Zoolang tot de oprichting van een afzonderlijk, volledig uitgerust astrophysisch observatorium, ver van stadsgewoel en groote verkeerswegen, in ons land niet kan worden overgegaan, geeft het groote voordeelen, de waarnemingsplaats verbonden te hebben aan een laboratorium, waar spectroscopische en andere hulpmiddelen, werkplaatsen en geschoold personeel reeds aanwezig waren.

Het laboratorium te Utrecht is bovendien betrekkelijk gunstig gelegen voor het beoogde doel. Van de plek waar thans de astrophysische afdeeling is opgericht, zijn namelijk de wegen van het stadsverkeer nergens minder dan 70 M. verwijderd. De ergste trillingen komen van een versleten, te licht gebouwde spoorbaan op 230 M. afstand; maar volgens ingewonnen berichten zal deze baan spoedig aanmerkelijk verbeterd worden, en uit onze voorloopige waarnemingen blijkt, dat reeds nu, dank zij de genomen voorzorgen, de gevreesde trillingen weinig afbreuk doen aan de scherpte der beelden.

Voor de geheele afdeeling stond slechts een bodemoppervlakte van ongeveer 50 $M^2$ ter beschikking, terwijl vele vrij hooge boomen en huizen zich in de naaste omgeving bevinden. De eenige mogelijke oplossing om een te allen tijde bruikbaar instrument te verkrijgen, geschikt voor waarnemingen in een groot zonnebeeld, was dus: het bouwen van een langen, vertikalen onbewegelijken kijker met een daarboven geplaatsten coelostaat.

Dit kijkertype werd het eerst ingevoerd door Hale op Mount Wilson, zij het ook op grond van andere overwegingen dan de bovengenoemde. Hale noemt het instrument „Tower telescope"; het objectief en de coelostaat zijn namelijk geplaatst op den top van

een uit stalen stangen en buizen opgetrokken toren. Op die wijze werd bereikt dat de scherpte van het zonnebeeld minder schade leed door luchtdwarrelingen, dan het geval was in zijne vroegere instrumenten van ander type, met horizontale ligging van de kijkeras.

Maar in ons geval zou zulk een vrij-staande toren onpraktisch zijn geweest. Wegens de ligging toch van ons instituut in een stad moest zeer bijzondere zorg worden besteed aan het beperken van den schadelijken invloed der bodembewegingen. Daarom werd de nieuwe vleugel van het laboratorium in zijn geheel tot de voor den kijker benoodigde hoogte opgetrokken en buitengewoon stevig geconstrueerd; de twee-steens muren zijn verbonden door drie gemiddeld 20 c.M. dikke vloeren van gewapend beton, door zware betonbalken gesteund. Zoo is op een grondvlak van 7 × 14 $M^2$ een sterk blok van 15 M. hoogte ontstaan, waarvan de zuidelijke helft voor astrophysica bestemd is, en dat nu wel is waar als geheel moet deelnemen aan de trillingen van den bodem, doch weinig of niet aanleiding geeft tot het ontstaan van bewegingen met grootere amplituden als gevolg van elastische vervorming zijner onderdeelen.

De coelostaat-inrichting, die ruim 1400 KG. weegt en op den bovensten cementvloer met ingemetselde bouten bevestigd is, staat daar ongeveer even vast als op den beganen grond. Boven een opening van 330 m.M. middellijn in dien vloer bevindt zich het kijker-objectief, vertikaal verschuifbaar binnen een, eveneens vastgemetselde, korte gietijzeren buis. Door openingen van gelijke grootte in de beide andere cementvloeren bereikt de lichtbundel het spectroscopisch laboratorium, waar, ter hoogte van 1,10 M. boven den houten vloer, een zonnebeeld van ongeveer 120 m.M. middellijn gevormd wordt, juist 13 M. beneden het objectief. (Zie de afbeelding op blz. 44).

Het gebouw zelf doet dus in zekeren zin dienst als kijkerbuis; maar het was toch nog noodig den lichtweg over die geheele lengte van 13 M. door een bordpapieren koker te omhullen, daar anders, wegens temperatuurverschillen tusschen de boven elkander liggende vertrekken, sterke luchtstroomen zouden gaan door de openingen in de vloeren, waardoor de scherpte van het beeld zeer zou hebben geleden. Het onderste deel van den koker wordt gevormd door een glazen cylinder, die in een vilten verpakking op en neer geschoven kan worden en wiens vlak geslepen onderrand nauwkeurig sluit op het montuur van de lens $L$ [1]). Deze inrichting veroorlooft, van alle kanten het zonnebeeld waar te nemen, terwijl de kijkerbuis

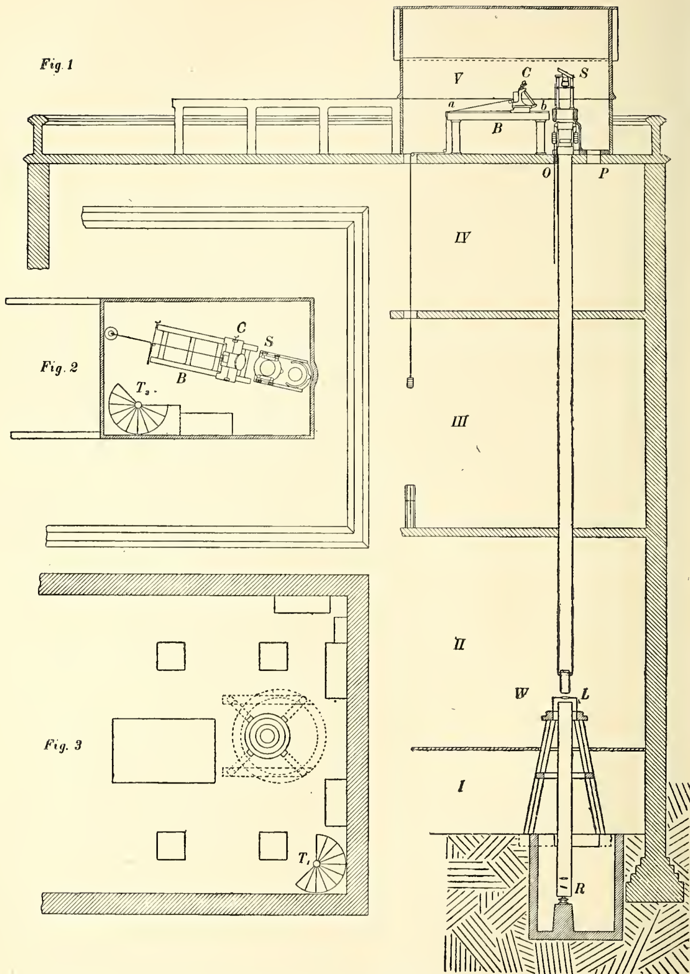
[1]) De functie van deze lens zal aanstonds worden toegelicht bij de beschrijving van den spectrograaf.

aan beide einden door een lens is afgesloten en dus niet als schoorsteen kan werken.

In het verlengde van de optische as van den kijker, wederom 4,40 M. lager dan het beeldvlak, bevindt zich het steunpunt van het (met auto-collimatie werkend) spectraaltoestel, dat naar verkiezing als spectroscoop, spectrograaf of spectroheliograaf kan worden gebruikt. Het bestaat uit een zware, 4,30 M. lange ijzeren buis van 320 m.M. inwendige middellijn, waarvan de bodem met een stalen kogelgewricht rust op een kleinen peiler van cement. Deze peiler is vastgegoten op den betonvloer van een in den kelder uitgegraven cylindervormige put, 2,25 M. diep en 1,80 M. middellijn, waarvan ook de wand uit gewapend beton bestaat. Boven op den wand rust een 2,80 M. hooge, sterk geconstrueerde bok van gewapend beton, wiens vier pooten vrij passeeren door openingen in den houten vloer van het waarnemingslokaal en op 80 c.M. boven dien vloer verbonden zijn door een zwaren, 20 c.M. hoogen, horizontaal liggenden betonring van 56 c.M. binnensten, 92 c.M. buitensten diameter. Het middelpunt van den ring ligt in de optische as; de spectrograaf, waarvan het boveneind ruim 15 c.M. boven den ring uitsteekt, kan nu uit zijn vertikalen labielen evenwichtsstand in elke richting 11,5 c.M. uitwijken, zoodat de as van den spectrograaf elken stand kan innemen binnen een kegel van $\pi\left(\frac{11,5}{430}\right)^2$ opening, terwijl het toestel bovendien uiterst gemakkelijk gedraaid kan worden om die as. Men is dus in de gelegenheid, de primaire spleet van het spectraaltoestel zonder moeite op elke gewenschte plaats van het zonnebeeld in iedere willekeurige richting in te stellen of door het zonnebeeld te doen bewegen.

Ten einde met den coelostaat nog een tweede instrument, voor nachtelijke waarnemingen, te kunnen bedienen is het statief, dat den tweeden spiegel draagt, enkele decimeters in zuidelijke richting verplaatsbaar gemaakt, zoodat de spiegel kan komen te staan loodrecht boven een andere opening, *P*, in den cementvloer. Het plan bestaat, daaronder een prisma-camera op te stellen voor het fotografeeren van sterrenspectra.

Fig. 1 geeft een vertikale doorsnede van de geheele installatie. Op het platte, door een borstwering omgeven dak bevindt zich ter beschutting van de coelostaat-inrichting een houten huisje *V*, waarvan het bovengedeelte door middel van windwerk in noordelijke richting kan worden weggerold over rails, bevestigd op een onderstel van gewapend beton. Van den coelostaat uit kan in alle jaargetijden de geheele zonsbaan tusschen de plaatsen van opgang




Schets van de inrichting voor zonnewaarnemingen in het Physisch Laboratorium te Utrecht. Fig. 1 vertikale doorsnede; Fig. 2 en Fig. 3 horizontale doorsneden ter hoogte van $S$ en van $W$.

en ondergang worden overzien. Enkele boomtakken, die in den weg stonden, zijn daartoe verwijderd.

Het lokaal *IV* is bestemd voor laboratoriumproeven op spectroscopisch gebied. Zooals gezegd, zal daar later ook de prisma-camera komen te staan.

De verdieping *III* bevat enkele lokalen die thans nog, als onderdeelen van het physisch laboratorium, voor andere dan astrophysische doeleinden in gebruik zijn. Een dier vertrekken zal intusschen worden ingericht voor het opbergen, rangschikken en bewerken van de fotografische resultaten.

In het vertrek *II* worden de zonnewaarnemingen gedaan en kan men tevens de spectra van aardsche lichtbronnen onderzoeken met dezelfde vertikale spectroscopische inrichting. Eenige steenen pijlers in dat lokaal, die vrij zijn van den houten vloer, bieden gelegenheid voor vaste opstelling van de noodige lichtbronnen enz.

Uit de kelderruimte *I* kan men langs een ladder afdalen in de put om de toestellen te behandelen die zich onder in den spectrograaf bevinden. Een gedeelte van den kelder is voorts afgeschoten en behoorlijk toegerust als ontwikkelkamer voor fotografische platen.

Alle verdiepingen, behalve de kelder, hebben vensters op het zuiden en westen.

Fig. 2 toont den platten grond ter hoogte van den coelostaat, Fig. 3 dien ter hoogte van de waarnemingsplaats *W* in *II*. De wenteltrap $T_1$ voert uit de kelderruimte *I* omhoog naar de lokalen *II*, *III* en *IV*, de wenteltrap $T_2$ verbindt *IV* met het dakhuisje *V*.

*De coelostaat en het objectief.*

Daar tengevolge van den oorlog de voornaamste (buitenlandsche) fabrikanten van astronomische instrumenten niet in staat waren, binnen afzienbaren tijd bestellingen uit te voeren, en bovendien de gangbare modellen van coelostaten minder geschikt waren voor ons doel, zoowel met het oog op de beschikbare ruimte als wegens onze zeer bijzondere eischen van stabiliteit, werd in overleg met constructeurs [1]) van de machinefabriek „Jaffa" eene inrichting voor het speciale geval ontworpen. Zij is met zorg uitgevoerd en blijkt in de praktijk zeer goed te voldoen.

De coelostaat *C* is in de richting Oost-West verplaatsbaar op een slede, welke laatste op haar beurt in den meridiaan verschoven kan worden over het sterke gietijzeren bed *B*, tusschen den zomerstand *a* en den winterstand *b*. Bij elke declinatie van de zon kan dus de

[1]) Vooral het werk van den teekenaar constructeur den heer J. van Suylen, verdient met groote waardeering te worden genoemd.

lichtbundel, na terugkaatsing door den coelostaatspiegel $C$, blijvend gericht zijn op den spiegel $S$, die hem vertikaal omlaag werpt. Het uurwerk (afkomstig van een anderen coelostaat, die bij eclipswaarnemingen had dienst gedaan) is vervaardigd door GAUTIER, te Parijs; het wordt gedreven door een gewicht van ongeveer 20 K.G. en is voorzien van een regulateur van FOUCAULT.

De spiegel $S$ wordt gedragen door vier ijzeren zuilen, geplaatst op een zwaren ring. Deze rust, kegelvormig ingeslepen en door middel van tandraderen draaibaar, op een anderen ring, welke het boveneinde vormt van een sterk, bijna cylindervormig voetstuk. Dit laatste is echter aan den noordkant open, zoodat, wanneer men het in zijn geheel zuidwaarts schuiven wil om den spiegel $S$ te plaatsen boven de opening $P$, dit niet belet wordt door de aanwezigheid van den vaststaanden cylinder binnen welken het objectief verschuifbaar is opgehangen.

De waarnemer in $W$ kan gemakkelijk aan het zonnebeeld kleine verplaatsingen geven in twee onderling loodrechte richtingen, daar de spiegel $S$ zoowel om een horizontale als om een vertikale as fijne bewegingen toelaat, die met behulp van eenvoudige mechanische overbrenging beneden kunnen worden aangebracht. Ook de vertikale verschuiving van het kijker-objectief geschiedt op zeer eenvoudige wijze, door een koperkabel zonder eind, waaraan beneden een handwiel met wijzer en schaalverdeeling hangt, zoodat de waarnemer de ligging van het brandvlak op een millimeter nauwkeurig kan instellen en aflezen. Op de schaalverdeeling is de nog overgebleven chromatische aberratie van het objectief aangeteekend; wanneer derhalve voor één kleur scherp is ingesteld, behoeft men geen afzonderlijke waarneming meer te doen om ook voor een andere kleur scherp te stellen.

Het achromatische kijkerobjectief (Lit. E volgens den catalogus van ZEISS) van 250 m.M. vrije opening en 13 M. brandpuntsafstand is zóó gecorrigeerd, dat voor de golflengten 656 en 366 de brandpunten samenvallen, terwijl voor de tusschenliggende golflengten de brandpuntsafstand door een minimum gaat (bij $\lambda$ 450), dat 42 m.M. verschilt van de waarde bij $\lambda$ 656. De spherische aberratie is voor alle golflengten uiterst gering, zoodat monochromatische beelden zeer scherp zijn.

De beide verzilverde glasspiegels $C$ en $S$ hebben een middellijn van 360 m.M. en zijn 55 mM. dik.

*De spectrograaf-spectroheliograaf.*

Van dit instrument noemen wij hier slechts de hoofdeigenschappen; een uitvoeriger beschrijving met afbeeldingen van onderdeelen zal elders worden gegeven.

Kenmerkend voor de gekozen inrichting is de aanwezigheid van een lens *L* van 160 m.M. diameter, op korten afstand (ongeveer 65 m.M.) boven het vlak waarin zich het zonnebeeld en de primaire spleet bevinden, en met haar optisch middelpunt steeds blijvend op de vertikaal, die het centrum van het kijkerobjectief verbindt met het steunpunt van den spectrograaf onder in den put. Deze lens is gemonteerd op een statief dat met drie pooten op een grooten metalen ring rust, die den betonbok dekt, en dat daarop gemakkelijk draaibaar is om de optische as. Haar brandpuntsafstand is zoo gekozen, dat zij een beeld van het objectief *O* vormt op de plaats waar zich het buigingsrooster *R* bevindt. Dat beeld heeft een middellijn van ongeveer 85 m.M. en neemt steeds de geheele verdeelde oppervlakte van het rooster in zich op, bij elken stand dien het in de praktijk krijgt. En doordat elk deel van de lens *L* medewerkt tot de vorming van het genoemde beeld, is dus op deze wijze bereikt dat steeds het geheele rooster verlicht wordt, onder welke plaats van de lens *L* zich ook de primaire spleet van den spectrograaf moge bevinden. Aan dezen eisch moest worden voldaan, omdat men anders in een spectroheliogram van de geheele zonneschijf niet de juiste verdeeling der lichtsterkte zou aantreffen.

Groote zorg is besteed aan de spleetinrichting. De opening van de spectraalbuis heeft een diameter van 320 m.M. Hare twee helften zijn door afzonderlijke dekplaten afgesloten, die beide om hun aanrakingslijn een kleine scharnierbeweging toelaten en zoo een met schroeven instelbare helling kunnen verkrijgen ten opzichte van de optische as. De eene dekplaat is ingericht voor alles wat op de primaire spleet betrekking heeft, de andere dekplaat draagt verschillende onderdeelen, al naar gelang het toestel dienst doet als spectroscoop, als spectrograaf, dan wel als spectroheliograaf, namelijk: òf een micrometer-oculair, òf een chassis, òf een vrij samengestelde secundaire spleet-inrichting.

De primaire spleet is 155 m.M. lang en zoo goed bewerkt, dat hare wijdte over de geheele lengte even groot kan worden gemaakt met een nauwkeurigheid van 0,01 m.M., beantwoordend aan één verdeeling op den trommel van de micrometerschroef die de spleetwijdte regelt Verder is een schroef aanwezig om den eenen spleetrand volmaakt evenwijdig aan den anderen te kunnen stellen, en bovendien een schroef om de richting der spleet te corrigeeren in zoodanigen zin, dat de lijnen van het spectrum nauwkeurig evenwijdig loopen aan de, in dat spectrum geplaatste, secundaire spleet van den spectroheliograaf.

Ook de secundaire spleet is 155 m.M. lang en laat regeling van

hare wijdte toe met een precisie van 0,01 m.M. Zij kan bovendien in haar geheel door middel van een schroef kleine meetbare verplaatsingen ondergaan loodrecht op haar richting, en eindelijk is een hefboom-inrichting aanwezig door welke men met een gemakkelijken handgreep aan deze spleet in eens (door wegschuiving van een der randen) een wijdte van 15 m.M. geven kan, om zich in het spectrum te orienteeren en om den anderen rand te kunnen instellen op de gewenschte plaats van het spectrum. Schuift men daarna den hefboom terug, dan herkrijgt de spleet weer nauwkeurig de vooraf gekozen geringe wijdte en laat dus slechts de gewenschte lichtsoort door.

Buiten aan de spectraalbuis, een weinig beneden de dekplaten, zijn nog twee draaibare knoppen onder het bereik van den waarnemer; de eene dient om het spectrum scherp te stellen door verplaatsing van de auto-collimatie-lens; met behulp van den anderen, die een verdeelden trommel draagt, draait men het buigingsrooster, zoodat de spectra door het gezichtsveld passeeren.

Wanneer men een spectroheliogram maken wil, wordt het zonnebeeld ontworpen centrisch onder de lens $L$ en laat men de spectraalbuis zóó bewegen, dat het midden van de primaire spleet een diameter van het zonnebeeld loodrecht op de spleetrichting doorloopt. Het licht dat door de secundaire spleet uittreedt teekent dan een monochromatisch zonnebeeld af op de fotografische plaat, die onbewegelijk verbonden is aan hetzelfde statief dat ook de lens $L$ draagt.

Gelijkmatige beweging van de spectraalbuis verkrijgt men met behulp van een trekkend gewicht, waarvan de uitwerking geremd wordt door een vloeistofregulateur. Men regelt de snelheid door instelling van een ventiel dat zich op den weg der doorstroomende vloeistof bevindt. Natuurlijk zal zulk een vloeistofweerstand alleen dan gelijkmatige beweging van de buis waarborgen, indien deze laatste, bij afwezigheid van de trekkende kracht, op alle punten van haar baan in onverschillig evenwicht zou verkeeren. Maar de buis wordt door de zwaartekracht uit haar vertikalen stand getrokken met een component, dien men veilig evenredig kan stellen aan de lineaire uitwijking, omdat de uitwijkingshoek nooit grooter wordt dan $\frac{8}{430}$ of ruim 1°. Deze kracht moest dus worden gecompenseerd.

Daartoe wordt de bovenrand van de buis in de lijn langs welke men de beweging wil doen plaats hebben gespannen gehouden tusschen twee gerekte stalen spiraalveeren, wier uiteinden aan statieven op den bok bevestigd zijn. Verplaatst men nu de buis uit den vertikalen stand, dan wordt zij door de veeren naar dien stand

teruggetrokken met een kracht die evenredig is aan de uitwijking. Men heeft de sterkte en de spanning der veeren zóó gekozen, dat hare werking die der zwaartekracht juist opheft. Een constante trekkracht geeft dus nu aan de buis een constante snelheid, in grootte bepaald door den stand van het ventiel in den vloeistofregulateur.

*Eene inrichting om met twee verschillende lichtsoorten gelijktijdig spectroheliogrammen te maken.*

De lichtverdeeling op de zon verandert snel. Reeds na enkele minuten tijds vertoont zich het beeld der granulaties zeer merkbaar gewijzigd. Wil men dus weten in hoeverre de lichtverdeeling afhankelijk is van de gekozen lichtsoort, dan is het noodig, met verschillende lichtsoorten *volmaakt gelijktijdig* spectroheliogrammen te maken.

Om dit te verwezenlijken is tusschen de auto-collimatielens en het buigingsrooster de volgende eenvoudige inrichting aangebracht.

Op een ring met drie stelschroeven is een bakje geplaatst waarvan de bodem bestaat uit een zeer zorgvuldig geslepen planparallele spiegelglasplaat. In het bakje bevinden zich nevens elkander twee reepen van even voortreffelijk spiegelglas, beide 10 m.M. dik, 80 m.M. lang en 27 m.M. breed (zie Fig. 4). Beide reepen zijn zóó gemonteerd, dat zij in het bakje hangen op een afstand van ongeveer 1,3 m.M. boven den bodem en dat de eene een kleine draaiing kan ondergaan om de as *a b*, de andere om de as *c d*. Deze draaiingen worden uitgevoerd met behulp van micrometer-schroeven, die men door middel van twee op de dekplaat van den spectrograaf aangebrachte knoppen (waaraan stangen van 4,2 M. lengte hangen) gemakkelijk kan instellen, terwijl men het spectrum waarneemt. Een kleine hoeveelheid paraffine-olie vult de ruimte tusschen den glazen bodem en de glasreepen aan, doch zóó, dat de bovenvlakken der reepen nog ongeveer 8 m.M. boven het vloeistofniveau in het bakje uitsteken. Wij hebben dus nu twee vloeistofprisma's van veranderlijken hoek en wier brekende ribben respectievelijk evenwijdig zijn aan *a b* en aan *c d*.

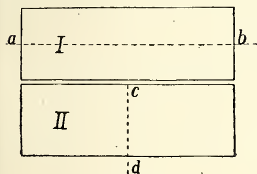


Fig. 4.

De eene helft van het buigingsrooster bevindt zich onder den reep *I*, de andere helft onder *II*. Is van beide prisma's de brekende hoek nul, dan werkt het geheele stelsel als een planparallele plaat en we zien het spectrum ongestoord.

Geeft men nu een helling aan den reep *I*, dan verplaatst zich de helft van het licht van het spectrum in de richting der spectraal-

lijnen, en men kan het bedrag der draaiing om *a b* zoo kiezen, dat de verplaatsing een weinig grooter is dan de lengte van het gebezigde deel der primaire spleet. Er vertoonen zich dan twee gelijke spectra dicht onder elkander in het gezichtsveld, ieder met de helft van de oorspronkelijke intensiteit.

Beweegt men vervolgens den reep *II*, dan verschuift één der beide spectra in de richting der dispersie. Men is derhalve in de gelegenheid, spectraalplaatsen van willekeurig te kiezen verschil in golflengte, in elkanders verlengde te brengen.

Twee deelen der secundaire spleet van den spectroheliograaf laten dus nu twee verschillende lichtsoorten door, en deze teekenen volkomen gelijktijdig ieder haar kenmerkend spectroheliogram op de fotografische plaat.

---

**Natuurkunde.** — De Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON doet eene mededeeling over: „*De grensgevoeligheid van den snaargalvanometer*".

Voor den snaargalvanometer van EINTHOVEN geldt evenals voor den naaldgalvanometer, dat de stroomgevoeligheid evenredig is met het kwadraat van den slingerduur van het beweeglijke orgaan. In de snaarinstrumenten wordt de slingerduur en daarmede de gevoeligheid gewijzigd door de snaarspanning te wijzigen. Verder zijn lengte en dikte der snaren van beteekenis hierbij, evenals de sterkte van het magnetische veld.

Een eenvoudige overweging leert ons, dat de wijziging van den slingerduur niet onbegrensd is. Denken wij ons een dikke korte snaar, aan de einden vastgeklemd. Door de einden van elkaar te schroeven wordt de snaar meer gespannen. Hierbij is de grens gegeven door de draagkracht van de snaar („Zugfestigkeit"). Naderen wij de einden tot elkaar, dan vermindert voortdurend de spanning totdat deze ten slotte $= 0$ is. Doch op dat oogenblik gekomen is de snaar nog steeds in staat trillingen in dwarse richting uit te voeren. De duur van deze trillingen wordt uitsluitend beheerscht door de afmetingen en dichtheid van de snaar en door haar elastische stijfheid, den elasticiteitsmodulus. De frequentie $N$ dezer trillingen wordt gegeven door de formule

$$N = \frac{m^2}{8\pi} \frac{d}{l^2} \sqrt{\frac{E}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $d$ de dikte en $l$ de lengte beide in cm. gemeten, $E$ de elasticiteitsmodulus in Dynen/cm² uitgedrukt, $g$ de dichtheid van het snaarmateriaal voorstelt, terwijl $m$ de kleinste wortel is van de transcendentale vergelijking $\cos m \;\; \cos hm = 1$, en de waarde bezit van 4.730. . . . (RAYLEIGH, On sound I. Art. 174, p. 277).

Indien wij afzien van de verandering, die de temperatuur in den elasticiteitsmodulus veroorzaakt, geeft deze formule ons de laagste frequentie der transversale slingeringen, die een snaar van bepaalde lengte kan uitvoeren. Er staat ons geen enkel middel ten dienste, om bij gegeven lengte en dikte transversale eigentrillingen op te wekken van een langeren duur. Wij kunnen dus nu reeds a priori zeggen, dat de slingerduur in den snaargalvanometer behalve door

de lengte, dikte, dichtheid en spanning ook nog door de elastische stugheid beheerscht wordt, zoodat deze in laatste instantie van invloed is bij de maximale gevoeligheid van den snaargalvanometer. Hieronder zal ik trachten de beteekenis van dezen invloed na te gaan.

Met behulp van formule 1 kunnen wij in elk geval, waarin de lengte, dikte en aard van het snaarmateriaal — n.l. de elasticiteitsmodulus en de dichtheid — bekend zijn, berekenen hoeveel de geringste trillingsfrequentie bedraagt. In de tabel I vindt men dienaangaande eenige opgaven, welke betrekking hebben op materialen die voor de vervaardiging van snaren in aanmerking komen, en wel bij een lengte van 10 cm. en een dikte van $10^{-4}$ cm. $= 1\,\mu$.

TABEL I.

| | $\frac{E}{98100000}$ | $g$ | $N$/sekonde | $T$ |
|---|---|---|---|---|
| Koper . . . . . . . | 11000 | 8.9 | 0.3100 | 3.32″ |
| Zilver . . . . . . . | 7500 | 10.5 | .2356 | 4.25 |
| Goud . . . . . . . | 7500 | 19.2 | .1724 | 5.80 |
| Aluminium . . . . . | 6750 | 2.7 | .4408 | 2.27 |
| Platina . . . . . | 16500 | 21.4 | .2448 | 4.08 |

Proefondervindelijk zal het zeer moeilijk zijn om deze getallen te verifieeren. Vooreerst is de luchtweerstand bij draden van de dikte van 1 $\mu$ zoo groot, dat altijd een sterk gedempte aperiodische beweging zal optreden. Wij zouden dus de snaren in een luchtledige ruimte moeten insluiten. Doch bovendien gelukt het op dit oogenblik alleen om snaren van de dikte van 1 $\mu$ uit platina — en met groote moeite uit aluminium te maken, alsmede misschien van goud, terwijl zilver of kopersnaren niet zoo dun te krijgen zijn.

Dat intusschen voor de tabel toch de dikte van 1 $\mu$ gekozen is wordt veroorzaakt door de overweging, dat de slingerduur of frequentie van dikkere snaren of van kortere of langere snaren gemakkelijk te berekenen is, indien men de getallen van de beide laatste kolommen voor zich heeft: immers de slingerduur is evenredig met het quadraat van de lengte en omgekeerd evenredig met de dikte. Hiervan is later een nuttig gebruik te maken.

Indien de snaar zonder eenige trekspanning opgespannen is, zal deze doorbuigen wanneer een zijdelingsche druk op de snaar inwerkt. In een dergelijk geval is de toestand vergelijkbaar met dien welke

bij een balk met geklemde einden bestaat, welke met een over de geheele lengte gelijkmatig drukkend gewicht $P$ belast wordt. De balk buigt dan door en de maximale doorbuiging $h$ wordt voorgesteld door de formule

$$h = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{384} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

waarin $P$ het gewicht in Dynen, $E$ de elasticiteits-coëfficient in Dynen/cm², $I$ het aequatoriale traagheidsmoment in cm⁴ en $l$ de lengte in cm. voorstelt. Voor ronde draad is $I = \frac{\pi d^4}{64}$ en wordt de formule:

$$h = \frac{Pl^3}{6\pi E d^4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

In den snaargalvanometer is de zijdelingsche druk $P = Hil$ dynen, wanneer de magnetische veldsterkte $H$ in Gauss, de stroomsterkte $i$ in Weber, de snaarlengte $l$ in centimeters wordt gegeven. Bij plaatsing van deze waarden in de formule (3) krijgen wij

$$h = \frac{H i l^4}{6\pi E d^4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Deze formule geeft dus direkt de uitwijking in centimeters aan bij een volkomen ontspannen, aan de einden geklemde snaar van een lengte $l$, een dikte $d$, die door een stroom $i$ Weber doorvloeid wordt, wanneer zij zich in een magnetisch veld van de sterkte $H$ Gauss bevindt. Het ligt voor de hand, dat deze formule de uiterste stroomgevoeligheid in dat geval voorstelt: het is niet mogelijk deze ooit hooger op te voeren dan in formule (4) wordt aangegeven.

Hoeveel deze maximale gevoeligheid voor stroomen bij verschillende materialen bedraagt, wordt hieronder opgegeven voor een veldsterkte van 10000 Gauss bij verschillende materialen, waarbij weer

TABEL II.

| | $\frac{E}{98100000}$ | $\frac{Hi}{6\pi E}$ | Uitslag $\begin{cases} V = 1000 \times, d = 1\mu \\ l = 10 \text{ cm}, i = 10^{-13} \text{ Weber} \end{cases}$ |
|---|---|---|---|
| *Cu* | 11000 | $4916.10^{-20}$ | 49.16 mm |
| *Ag* | 7500 | $7210.10^{-20}$ | 72.10 „ |
| *Au* | 7500 | $7210.10^{-20}$ | 72.10 „ |
| *Al* | 6750 | $8012.10^{-20}$ | 80.12 „ |
| *Pt* | 16500 | $3277.10^{-20}$ | 32.77 „ |

als lengte 10 cm. en als dikte 1 $\mu$ is aangenomen. Als stroomeenheid is hier gekozen $10^{-13}$ Weber, terwijl de uitslagen $h$ in millimeters vermeld worden bij een 1000-malige vergrooting.

De getallen van de laatste kolom geven ons weer het middel om gemakkelijk den uitslag bij de grensgevoeligheid te berekenen wanneer hetzij de vergrooting of de veldsterkte een andere is, hetzij de lengte of dikte gewijzigd wordt. De uitslagen zijn evenredig met de 4e macht van de lengte en omgekeerd evenredig met de 4e macht van de dikte.

De hier gegeven getallen, omgewerkt tot waargenomen verhoudingen geven cijfers, die niet onbelangrijk gunstiger zijn dan die welke proefondervindelijk verkregen worden. Zoo moest een aluminiumsnaar van 2 $\mu$ dikte en 56 m.m. lengte bij 18000 Gauss ten naastebij een uitslag van 1.2 m.m. geven voor $10^{-12}$ ampere. In werkelijkheid bedroeg de uitslag 0.40 m.m. bij een instellingsduur van ongeveer 20 seconden. Ook de opgaven die wij bij EINTHOVEN vinden over zijn kwartssnaren, alsmede mijn eigen ervaringen daaromtrent, leveren resultaten, die wat de grootte-orde betreft met de gegeven getallen overeenstemmen. Daarbij werd aangenomen, dat de kwartssnaren in hun gedrag met zilversnaren overeenstemmen; bij een niet al te dunne verzilvering schijnt dit vrijwel op te gaan. Ook hier echter werd de verlangde grensgevoeligheid niet bereikt. De verklaring hiervoor wordt echter onmiddellijk gevonden bij het onderzoek van zilversnaren van 16.5 $\mu$, van kopersnaren van 15 $\mu$, en van aluminiumsnaren van 35 $\mu$ doorsnede. Al deze snaren leveren bij zoo volledige ontspanning als mogelijk is trillingsgetallen die 1.5 tot 2.1 maal grooter zijn dan de theorie der ongespannen snaren eischt. Aangezien de uitslagen bij benadering evenredig zijn met het kwadraat van den trillingsduur, moeten wij dus 2—4.5 maal kleinere uitslagen verwachten dan wij bij werkelijk volkomen ontspanning zouden verkrijgen. Zoo leverde mij een zilversnaar van 16.5 $\mu$ doorsnede en 53 m.m. lengte trillingen van 20.0 per seconde, terwijl algeheele ontspanning trillingen van bijna 14 per seconde had moeten leveren. Het bleek mij niet mogelijk om de trillingsfrequentie onder de 20 per seconde te brengen. De verkregen uitslag bij 14000 Gauss en bij 47-malige vergrooting bedroeg 1.31 millimeter voor 1 mikro-ampère. De theorie verlangt bij 14 trillingen 3.7 m.m. en bij 20 trillingen 1.8 millimeter uitslag. In verband met de onzekerheid omtrent de werkelijke dikte is deze overeenstemming niet onbevredigend. Ook aluminium- en kopersnaren geven een overeenstemming b.v. 8.1 waar de uitslag 9.1 moest zijn, of 36 waar de uitkomst 40 verwacht werd.

Dit verschil wordt, zooals ik reeds zeide, voor een deel door onzekerheid omtrent de werkelijke dikte verklaard. Bovendien zijn de getallen voor den elasticiteitscoëfficient bij verschillend materiaal niet volkomen in overeenstemming met de door mij daarvoor gebruikte getallen. Afgezien daarvan is de overeenstemming echter voldoende om de beschouwingen uit te breiden op de verkrijgbare voltgevoeligheid, temeer omdat daarbij eenige resultaten voor den dag komen, die aanleiding geven tot wijziging van enkele door andere onderzoekers medegedeelde opvattingen.

Uit de hierboven gegeven formule (4) voor de stroomgevoeligheid bij volkomen ontspanning kunnen wij onmiddellijk de formule voor de spanningsgevoeligheid afleiden. Deze bedraagt klaarblijkelijk:

$$\frac{h}{iw} = \frac{H l^4}{6\pi E d^4 w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (5)$$

Waarin $w$ den weerstand van de snaar voorstelt. Aan deze formule hebben wij echter niets, daar hierin geen rekening is gehouden met den dempingstoestand. Alleen een formule die voor *kritische* instelling geldig is kan ons van dienst zijn. Nu bestaat de demping uit een door luchtwrijving veroorzaakten weerstand en een die door de tegenelektromotorische kracht wordt opgewekt bij de snaarbeweging en het sterke magnetische veld. Wij zullen hieronder alleen met deze laatste rekening houden, hetgeen eigenlijk alleen bij genoegzaam dikke snaren praktisch geoorloofd is.

De electromagnetische demping hangt ten nauwste samen met het aantal magnetische krachtlijnen, 't welk de snaar bij haar beweging doorsnijdt. Hierbij is de vorm, die de snaar in de uiterste standen aanneemt van de meeste beteekenis, aangezien het aantal doorsneden krachtlijnen bepaald wordt door de veldsterkte en door het oppervlak begrensd tusschen de snaar in den uitersten stand en in den nulstand. Heeft de snaar een paraboolvorm bij haar grootste afwijking, en dat is vrijwel het geval bij eenigszins gespannen draden dan bedraagt de demping:

$$D = \tfrac{2}{3} \frac{H^2 l^2}{w \, . \, 10^9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin $H$ de veldsterkte, $l$ de lengte, $w$ de weerstand van den stroomkring — dus bij korte sluiting, die van de snaar voorstelt. Zoodra de snaar een anderen vorm aanneemt, verandert alleen de factor $\frac{2}{3}$ in formule (6). Deze factor stelt namelijk de gemiddelde afwijking van elk deel van de snaar voor, vergeleken met de afwijking van het midden van de snaar. Voor het geval dat de snaar geheel ontspannen is, doch aan de einden geklemd wordt, neemt de snaar

bij een gelijkmatig over de geheele lengte verdeelden zijdelingschen druk $P$ den vorm aan voorgesteld door de formule

$$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

waarin $x$ de afstand tot een uiteinde voorstelt en $y$ de afwijking van dat punt. Door aan $x$ de waarde $\frac{1}{2}\,l$ te geven berekenen wij de grootste afwijking, n.l. die van het midden van de snaar, welke wij reeds in formule (2) uitdrukten. Om de gemiddelde afwijking te vinden, integreeren wij over de geheele lengte en vinden:

$$y\int_0^l dx = \frac{P}{EI}\frac{l^4}{720} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

hetgeen in verband met (2) onmiddellijk oplevert als coefficiënt het getal $\frac{8}{15}$. De electromagnetische demping bedraagt in dit geval dus

$$D = \frac{8}{15}\frac{H^2 l^2}{w \cdot 10^9} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Zij verder de massa van de snaar $M$ dan kunnen wij de formule voor den trillingsduur brengen in den vorm

$$\frac{1}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

waarin $K$ een zijdelingschen druk voorstelt, en waarbij de invloed van de demping verwaarloosd wordt. Om in dit geval bij een slingerduur van $\frac{1}{N}$ een kritische demping te verkrijgen, waarbij dus de snaar zoo snel mogelijk een nieuwen evenwichtstoestand bereikt, moet de demping gebracht worden op het bedrag

$$D = \sqrt{4\,MK} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Wordt uit deze beide laatste uitdrukkingen $K$ weggewerkt, dan blijft in verband met (9) over:

$$4\pi MN = \frac{8}{15}\frac{H^2 l^2}{w \cdot 10^9} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Wij drukken nu de massa $M$ uit door lengte, dikte en dichtheid $g$, terwijl voor den weerstand eveneens de lengte, dikte en de specifieke weerstand $\varrho$ genomen wordt. Dan kan uit de laatste gelijkheid opgelost worden:

$$H^2 = 7.5\,\pi\,10^9 \,.\, g\,\varrho\,N \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Hiermede hebben wij een eenvoudige betrekking verkregen, tusschen de maximaal toelaatbare veldsterkte en het trillingsgetal, wanneer dichtheid en weerstandscoefficiënt van het snaarmateriaal gegeven zijn. Konden wij het getal $N$ elke verlangde waarde geven, dan

zou uit deze formule volgen, dat lengte en dikte van de snaar van geen beteekenis zijn. Daar wij echter juist van de premisse uitgaan dat $N$ niet willekeurig kan verminderd worden doch o. a. van de lengte en dikte en elasticiteit afhangt, dienen wij het getal uit formule (7) voor $N$ in (13) te plaatsen. Dan kunnen wij berekenen hoe groot de veldsterkte mag zijn voor het geval dat de snaar geheel ontspannen is, en kort gesloten wordt. Wij krijgen dus

$$H = 1.45\ 10^5 \sqrt{\frac{d}{l^2}}\ \sqrt[4]{g\,E\,\varrho^2}\ \ldots\ldots \quad (14)$$

De voltgevoeligheid wordt dan, wanneer wij in formule (5) de waarde voor $H$ plaatsen en tevens $w$ vervangen door $\frac{\varrho l}{\pi d^2}$:

$$\frac{h}{i w} = 6040 \frac{l^2}{d\sqrt{d}} \cdot \sqrt[4]{\frac{g}{E^3 \varrho^2}}\ldots\ldots \quad (15)$$

Deze laatste formule geeft ons dus de theoretische grenswaarde voor de spanningsgevoeligheid voor het geval dat de snaar geheel ontspannen is, zich geheel in het magnetisch veld bevindt, terwijl dit laatste een zoodanige sterkte bezit, dat de beweging van de kortgesloten snaar juist kritisch gedempt is bij afwezigheid van luchtweerstand.

Uit de formule blijkt, dat de voltgevoeligheid onder deze voorwaarden toeneemt met het kwadraât van de lengte van de snaar en omgekeerd evenredig is met $d\sqrt{d}$. Verder wordt de gevoeligheid bepaald door materiaaleigenschappen n.l. de elasticiteit, de dichtheid en den weerstand. Berekenen wij dezen materiaalfactor voor verschillende metalen die daarvoor in aanmerking komen, dan vinden wij bij $l = 10$ cm en $d = 1$ mikron:

TABEL III.

| | $g$ | $E \cdot \frac{1}{98100000}$ | $\varrho \cdot 10^6$ | $6040 \cdot \sqrt[4]{\frac{g}{E^8 \varrho^2}} \cdot 10^5$ | $H$ | $N$/sec |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Cu* | 8.9 | 11000 | 1.62 | 774 | 325 | 0.3100 |
| *Ag* | 10.5 | 7500 | 1.75 | 1034 | 320 | 0.2356 |
| *Au* | 19.2 | 7500 | 2.20 | 1073 | 417 | 0.1724 |
| *Al* | 2.7 | 6750 | 2.87 | 622 | 284 | 0.4408 |
| *Pt* | 21.4 | 16500 | 9.40 | 295 | 1078 | 0.2448 |

De kolom 4 welke de relatieve materiaal-gevoeligheid onder deze

omstandigheden vermeldt, geeft tevens de uitslagen in millimeters per microvolt bij 1000 × vergrooting bij een snaarlengte van 10 cm. en een dikte van $1 \mu$. De 5[de] kolom geeft de toelaatbare magnetische veldsterkte, terwijl de laatste kolom de trillingsfrequentie aangeeft.

Wij zien, dat wanneer wij de snaren van gelijke dikte en lengte nemen, dat dan goud bovenaan staat. Doch hierbij is de instellingstijd zeer groot, terwijl b.v. zilveren snaren met een nagenoeg gelijke gevoeligheid een kleineren slingerduur bezitten. Het is daarom noodig om deze getallen tot gelijken slingerduur terug te brengen. Wij doen dit door b.v. een slingerduur van 1 seconde aan te nemen, en berekenen daartoe de waarde van $\frac{h}{iw} \times N$. Wij vinden daarvoor

$$\frac{h}{iw} . N = 5400 \frac{1}{\sqrt{d}} . \frac{1}{\sqrt[4]{E \varrho^2 g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Deze formule geeft nu aan, hoe groot de uitslag per 10 Volt is bij een snaar van een dikte $d$ en van een zoodanige lengte, dat zij bij geheele ontspanning juist 1 seconde slingerduur bezit. Wij zien dat feitelijk dus de lengte vastgesteld is, wanneer een bepaald bedrag voor $d$ wordt aangenomen bij eenig bepaald materiaal. Overzichtelijker wordt dit weer door de tabel IV gegeven waarin de materiaalfactor vermenigvuldigd met 5400 voor de reeds genoemde materialen berekend is.

TABEL IV.

| | $\frac{5400}{\sqrt[4]{E \varrho^2 g}}$ | $H$ | $l$ | $w$ | Uitslag per $\mu V$. bij $d = 1 \mu$. en $V = 1000$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Cu* | 2410 | 590 | 5.56 | 1150 | 241 mm |
| *Ag* | 2448 | 658 | 4.85 | 1080 | 245 „ |
| *Au* | 1878 | 997 | 4.15 | 1163 | 188 „ |
| *Al* | 2757 | 426 | 6.63 | 2430 | 276 „ |
| *Pt* | 726 | 2190 | 4.95 | 5940 | 73 „ |

Deze tabel leert vooreerst dus dat inderdaad *aluminium* het beste materiaal is, wanneer wij de voltgevoeligheid zoo hoog mogelijk wenschen op te voeren. Tevens blijkt echter dat zilver en koper praktisch slechts uiterst weinig bij aluminium ten achter staan. Belangrijk is echter de formule omdat er uit blijkt, dat de voltgevoeligheid stijgt met afneming van de dikte en wel met den wortel daarvan.

Door wijziging van de snaarlengte alleen kunnen wij geen invloed uitoefenen op de voltgevoeligheid, wanneer de instellingstijd gegeven is; blijft deze laatste onveranderd, dan zal alleen een dunner maken van de snaar de voltgevoeligheid verhoogen.

Ten slotte moeten wij nog opmerkzaam maken op een andere mogelijkheid om de voltgevoeligheid nog een weinig te verhoogen. Denken wij ons weer een volkomen ontspannen, doch aan de uiteinden geklemde dunne staaf. Wordt deze gelijkmatig over de geheele lengte door een gewicht $P$ belast, dan geldt formule (2). Belasten wij echter alleen het midden van de snaar met het gewicht $P$, dan wordt de doorbuiging juist 2 maal grooter: dan geldt namelijk de formule

$$h = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{192} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Indien wij dus de snaar waarop de zijdelingsche druk $Hil$ in het magnetisch veld $H'$ werkt brengen in een magnetisch veld van geringe hoogte $\lambda$ doch van een zoodanige grootere sterkte $H'$ dat $Hl = H'\lambda$, dan verkrijgen wij de verhoudingen die door formule (17) worden gegeven, althans tennaastebij. De vergrooting van de veldsterkte zal in 't bijzonder bij spanningsmeting, waar de veldsterkte slechts van de orde van 500 Gauss is (zie tabel III en IV) geen enkel praktisch bezwaar opleveren. Daarentegen vergrooten wij daardoor den dempingsfactor in formule (9), die bij $l = \lambda$ ongeveer 0.5 bedroeg, tot ongeveer 1. De dempingsfactor wordt dus twee maal grooter, zoodat wij het magnetisch veld $\sqrt{2}$ maal zwakker moeten maken. Ten slotte wordt de voltgevoeligheid dan slechts 1.4 maal grooter. Dit middel zal bij zeer dunne snaren wel nimmer toegepast kunnen worden, althans bij de bestaande galvanometermodellen. Bij het gebruik van dikkere metaalsnaren b.v. zilver van 16.5 $\mu$ of koper van 15 $\mu$ verdient het aanbeveling.

---

**Geologie**. — De Heer A. WICHMANN biedt eene mededeeling aan: *„Over het tinerts van het eiland Flores".*

Eenige jaren geleden brachten geologische studiën over het eiland Flores mij tot de overtuiging, dat van het optreden van tinertsen aldaar in noemenswaardige hoeveelheid geen sprake kon zijn [1]). Zooals uit eene verleden jaar uitgekomen verhandeling van den heer S. J. VERMAES blijkt, is deze van een tegenovergestelde meening [2]). Ik acht het niet geheel overbodig na te gaan in hoeverre de door hem aangevoerde gronden, die heeten te steunen op *de leer der ertsafzettingen, de ethnographie en de metallurgie,* steekhoudend zijn.

Onderzoekingen van geologischen aard hebben gedurende de laatste jaren op Flores niet plaats gehad, zoodat in dit opzicht mijne verhandeling het minst voor aanvulling in aanmerking komt. Toch had de heer VERMAES — zooals hij althans meent — „het geluk een vondst te doen, die nieuw licht op de zaak werpt" [3]). Deze vondst komt neder op een stuk tinerts, aanwezig in het Koloniaal Museum te Haarlem „wegende 131 gram en bestaande uit een mengsel „van chloriet en tinsteen met scheuren, waarin een weinig kaolien „voorkomt. Behalve de genoemde twee mineralen wordt een enkel „puntje chalkopyriet aangetroffen".

De heer VERMAES ziet geheel over het hoofd, dat de op het etiket vermelde vindplaats „Goenoeng Rokka" gefingeerd moet zijn, aangezien deze berg — de Inije Rije der inlanders — een vulkaan is en zelfs nog tegenwoordig in den toestand van solfatara-werkzaamheid verkeert [4]). Geen der bezoekers heeft dan ook ooit de minste aanwijzing voor het voorkomen van ertsen op dien berg gevonden en zelfs C. J. VAN SCHELLE, die van eene zeer gewaagde hypothese niet afkeerig was, heeft er zich wel voor gewacht op de vulkanen

---

1) Over het tin van het eiland Flores. Verslag gewone vergadering K. Akad. van Wet. Amsterdam. Wis- en Natuurk. afd. **23**. 1914, blz. 215—231.

2) Tinerts op Flores. De Ingenieur. **32**. 's Gravenhage 1917, blz. 584—590.

3) t. a. p. blz. 584.

4) J. J. PANNEKOEK VAN RHEDEN. Overzicht van de geographische en geologische gegevens, verkregen .... van het eiland Flores in 1910 en 1911. Jaarboek van het Mijnwezen in Ned.-O.-Ind. **40** 1911. Batavia 1913, blz. 219—220. — Eenige geologische gegevens omtrent het eiland Flores. Jaarboek van het Mijnwezen. **39**. 1910. Batavia 1912 Verhandelingen, blz. 135—136.

van Flores nasporingen naar tinerts te doen. Hij zocht die, zonder dat er eenige aanleiding voor bestond, in eene door hem veronderstelde tinertshoudende streek, die van vulkanische vormingen gedeeltelijk overdekt was [1]).

Voor zoover de argumenten aan de *metallurgie* ontleend zijn, treft het, dat de heer VERMAES het blijkbaar overbodig heeft geoordeeld ten opzichte van het tin nadere informatiën in te winnen, want anders had hij niet kunnen schrijven: „Verder haalt hij „(WICHMANN) aan hetgeen hij vroeger schreef, namelijk dat tinerts „door brandend gras niet kan worden gereduceerd. Ik heb menig„maal alang-alang zien branden en zou op *metallurgische gronden „niet durven beweren wat* WICHMANN *doet*". [2]) Een natuuronderzoeker zal zich niet vergenoegen met het „zien branden" van een alangalangveld, maar zal trachten na te gaan welke uitwerking een dergelijke brand op de onder het gras liggende bestanddeelen van den bodem heeft. Mij heeft die aan den voet van den Batoe angoes baroe in de Minahassa, welke bestaat uit vulkanisch zand en lapilli van augietandesiet, geleerd, dat zij niet de minste sporen van verandering toonden. Een ander resultaat was dan ook niet te verwachten, want de grasplant (*Imperata cylindrica* Beauv.) levert eene *zoo onbeduidende* hoeveelheid brandstof op, dat zij in een oogwenk in vlammen opgaat. Dit kortstondig verbrandingsproces strekt zich niet eens tot de wortelen uit, zoodat met het invallen van den westmoesson het gras begint opnieuw uit te spruiten.

Verder schrijft de heer VERMAES: „Wij lezen echter in het verslag van VAN SCHELLE: „Bij het branden der bosschen schijnt een gedeelte „van het erts te worden gereduceerd . . ."; waarna de heer VERMAES besluit: „Wanneer nu een aan de oppervlakte liggend blok tinerts „is ingesloten tusschen de wortelbladen van een grooten boom en „na omkappen van den stam wordt aan den stomp een brandstapel „gemaakt en aangestoken, dan is er *geen twijfel aan of het tinerts „wordt gereduceerd tot metaal*" [2]).

In de eerste plaats wensch ik in herinnering te brengen, hetgeen P. VAN DIEST in zijn bekend werk over Bangka schreef: „De kolen„branderij [3]) wordt door de inlanders aangewezen als ongeveer de „plaats waar het eerst tin op Bangka zou ontdekt zijn en wel na

---

[1]) Verslag van het onderzoek naar het voorkomen van tinertshoudende gronden op Flores. Extra-Bijvoegsel der Javasche Courant. Batavia 1890. N⁰. 10. (Uittreksel: Tijdschr. voor Nederl.-Indië. Zaltbommel 1890. 2, blz. 79).

[2]) De cursiveering is van mij.

[3]) Op den heuvel Sambong giri bij de mijn Lindjoe.

„het verbranden van een deel van het bosch daar ter plaatse [1]). „Het geloof aan die verhalen wordt nog meer verzwakt wanneer „men bedenkt, dat de gloed die ontstaat door het verbranden van „over elkaâr gevallen boomstammen, niet voldoende is om tinerts „zonder bepaalde vermenging met kool te reduceeren en allerminst „niet wanneer de erts zoo grofkorrelig is als aan dezen heuvel" [2]).

Het gezegde van P. van Diest steunt klaarblijkelijk op het feit, dat de tinsteen tot de zeer moeilijk smeltbare mineralen behoort, maar door toevoeging van houtskool vrij gemakkelijk tot tin gereduceerd kan worden. Wij mogen ons met deze redeneering evenmin tevreden stellen als met het gezegde van den Heer Vermaes, dat „er *geen twijfel is of het tinerts wordt gereduceerd tot metaal*", nl. door een brandstapel van hout. Eene proef schijnt van geene zijde ooit gedaan te zijn.

De opgave van R. S. Cusack betreffende de smelttemperatuur van tinsteen, namelijk 1127° C. [3]), is m.i. te laag, omdat voor mineralen, die vrij wat gemakkelijker smelten, hoogere smeltpunten worden vermeld [4]), b.v. voor augiet 1100—1200° (volgens C. Doelter) [5]) en voor plagioklazen (labradoriet tot oligoklaas) 1130 tot 1300 [6]). Bij gebrek aan beter kunnen wij dan evenwel met het door Cusack gevonden cijfer des te eerder volstaan, als daarmede als zeker kan worden verondersteld, dat het smeltpunt niet lager is dan 1127°. Aangezien nu de verbrandingswarmte van levend hout — dat alleen in aanmerking komt — lager is dan de bovenvermelde smelttemperatuur, is een brandend bosch niet in staat het tinerts tot tin te reduceeren. Terwijl het verbranden van alang-alang zich jaarlijks tegen het einde van den oestmoesson herhalen kan, behoort een boschbrand buitendien stellig tot de uitzonderingen, zoodat reeds om die redenen nooit de vereischte hoeveelheid tin op die wijze geproduceerd had kunnen worden.

Het valt overigens nog te bezien of zelfs bij hooge temperaturen het veronderstelde resultaat te verkrijgen is. Terwijl in de moderne

---

[1]) Volgens de overlevering was dit in 1710 gebeurd (F. Epp, Schilderungen aus Indiens Archipel. Heidelberg 1841, blz. 134; J. H. Croockewit. Banka, Malakka en Billiton. 's-Gravenhage 1852, blz. 134).

[2]) Bangka, beschreven in reistogten. Amsterdam 1865, blz. 68.

[3]) On the melting points of minerals. Proceed. R. Irish Acad. of Sc. (3) **4.** Dublin 1896—98, blz. 413.

[4]) Beziehungen zwischen Schmelzpunkt und chemischer Zusammensetzung der Mineralien. Tschermaks Miner. petrogr. Mittlg. **22.** Wien 1903, blz. 399—311. De bovenvermelde smeltpunten zijn, zooals de schrijver later zelf opmerkte, iets te laag (Handbuch der Mineralchemie **2.** 1. Dresden - Leipzig 1914, blz. 579).

[5]) C. Doelter, Handbuch der Mineralchemie. **1.** 1912, blz. 663.

mineralogische leer- en handboeken — op weinige uitzonderingen na — verklaard wordt, dat de tinsteen bij de behandeling met de blaaspijp onveranderd blijft, hetgeen ook werkelijk overeenkomt met wat in verband met de zeldzaamheid der vereischte groote geoefendheid, door de meeste onderzoekers bereikt kan worden, schreef reeds Berzelius: „Das Oxyd verändert sich und schmilzt nicht, aber bei „einem starken und anhaltenden Reduktionsfeuer kann reines Zinnoxyd „ganz und gar ohne Zusatz zu Zinn reducirt werden. Dies erfordert „indessen eine Gewohnheit das Löthrohr zu gebrauchen" [1]). Dit komt ook overeen met hetgeen C. F. Plattner zegt, die er echter aan toevoegt, dat bij dit proces een wit beslag van tinoxide gevormd wordt [2]). W. A. Ross zegt daarentegen, dat het erts niet smelt, „aber eine weisse Ausblühung kommt hervor" [3]). Giorgio Spezia is wederom van oordeel dat het erts wel verandert, echter „non par fusione ma par consumo" en hij tracht het gedrag van de tinsteen op die wijze te verklaren, dat tengevolge van de sterke hitte wel eene reductie plaats heeft, maar onmiddellijk weder door eene oxidatie gevolgd wordt, waardoor het wit beslag zich vormt [4]). Mocht die voorstelling juist zijn, dan zou de mogelijkheid het tinoxide alleen door hitte-inwerking te reduceeren, ten eenenmale buitengesloten zijn.

Wie is nu — om met den heer Vermaes te spreken — „de metallurg van Flores", die fantasiën verspreid heeft? [5]) En wanneer de hier genoemde heer terzelfder plaatse laat volgen: „Wichmann „had moeten bedenken, dat dergelijke uitlatingen slechts doodend „kunnen werken op den opbloei van een mijnbouwindustrie, waar„van gelukkig vele deskundigen met mij goede verwachtingen heb„ben", dan acht ik mij verplicht er op te wijzen, dat ik het allesbehalve verblijdend vind, er mij nog in het jaar 1918 op te moeten beroepen, dat de wetenschap er niet naar vraagt of iets al dan niet „doodend" werkt, maar dat haar taak eenig en alleen is de waarheid te zoeken. Buitendien werkt de wetenschap nooit doodend, althans niet voor dengene, die haar weet te beoefenen, maar steeds

[1]) Von der Anwendung der Löthrohrs in der Chemie und Mineralogie. Uebersetzt von H. Rose. Nürnberg 1821, blz. 113—114. Het is onder de tegenwoordige tijdsomstandigheden ondoenlijk in alle bijzonderheden na te gaan of en welke schrijvers vóór Berzelius hetzelfde resultaat hebben bereikt.

[2]) Probirkunst vor dem Löthrohre. 5. Aufl. bearbeitet von Th. Richter. Leipzig 1878, blz. 136.

[3]) Das Löthrohr in der Chemie und Mineralogie. übertragen von B. Cosmann. Leipzig 1889, blz. 161.

[4]) Sulla fusibiltà dei minerali. Atti R. Accad. delle sc. 22. Torino 1886—87, blz. 422.

[5]) t. a. p. blz. 588.

opwekkend, ook wanneer een onderzoek een negatief resultaat oplevert. Had de mijnbouwindustrie meer achting voor de wetenschap gehad, dan zouden haar b.v. op Celebes zeer vele teleurstellingen en aan het publiek belangrijke kapitalen bespaard zijn gebleven. Vermoedelijk zal men echter, ten spijt van dit alles, ook heden ten dage nog niet wijzer geworden zijn.

Voegt men er nog bij, dat tinsmelterijen op Flores niet denkbaar zijn zonder de aanwezigheid van kolenbranderijen en ophoopingen van tinslakken, waarvan nog nooit eenig spoor ontdekt werd, dan mag men gerust zeggen, dat al de pogingen des heeren VERMAES, om op *metallurgische* gronden de aanwezigheid van tinerts te bewijzen, ten eenenmale mislukt zijn.

Iets uitvoeriger moeten wij stilstaan bij de argumenten, die op *ethnographische* gegevens berusten. De heer VERMAES heeft bij de beoordeeling daarvan geheel achterwege gelaten te onderzoeken of de premisse, waarvan hij uitging, juist was, evenals dit de ethnologen zelf maar al te vaak overkomt. Wij vinden dit gebrek aan inzicht reeds bij J. H. CROOCKEWIT, die in de afwezigheid van tinnen voorwerpen op Billiton — voor zoover zij niet van elders (Bangka) ingevoerd waren — een steun meende te mogen vinden voor zijne stelling, dat er op dat eiland *geen* tinerts aanwezig was [1]). Omgekeerd berustte het geheele betoog van C. J. VAN SCHELLE *uitsluitend* op het feit, dat inlanders van Flores in het bezit van tinnen sieraden enz. werden gevonden, waaraan ook door den heer VERMAES zoo'n groot gewicht werd gehecht. Dit is het standpunt, waarop zich eveneens de Papoea plaatst, die, afgaande op de messen en bijlen, die hij in ruil voor zijne paradijsvogels van de handelaren ontvangt, de meening voorstaat, dat Nederland rijk aan ijzermijnen is.

De sieraden en andere voorwerpen, waaraan door de Inlanders bijzondere waarde gehecht wordt, dienen niet slechts tot versiering, maar tevens als „kapitaalbelegging", zooals dit ook nog in Europa voorkomt. De neiging tot kapitaalvorming openbaart zich reeds onder de onbeschaafde volkeren, vooral bij de meer intelligente personen en die neiging doet zich des te sterker gelden, naarmate het individu zich in de veiligheid van zijn persoon mag verheugen. Daarvandaan dat het gezag van een westersche mogendheid altijd de „kapitaalvorming" in de hand heeft gewerkt, al heeft zij zelve er niets toe bijgedragen. In de keuze der daarvoor dienende voorwerpen is de inlander echter in vergelijking met den Europeaan, bij wien effekten

---

[1]) Uittreksel van het rapport eener reis over het eiland Billiton. Natuurk. Tijdschr. Ned. Ind. 3. Batavia 1852, blz. 401.

en andere van papier vervaardigde objecten van waarde in hoog aanzien staan, zeer beperkt. Zij moeten zoo mogelijk bestand zijn tegen de invloeden van het klimaat en buitendien liefst opzichtig zijn, iets ,,toonen". Daar waar nederzettingen van Europeanen zijn of waar een niet al te zeer beperkt handelscentrum bestaat, komt gemunt geld, rijksdaalders en dan vooral goudgeld voor ,,kapitaalbelegging" in aanmerking.

Daar, waar de eigen bodem geen voorwerpen oplevert, die voor het beoogde doel in aanmerking komen, en dit is op bijna alle eilanden van den Timor-Archipel het geval [1]), is de inlander genoodzaakt zijn oog te laten vallen op voorwerpen van vreemden oorsprong. Met uitzondering van wapens en andere ijzeren werktuigen, zijn het in hoofdzaak de ,,moeti tanah", vuil oranje-roode glazen kralen, waaraan alle stammen in gelijke mate groote waarde hechten. Zij zijn wel kunstig bewerkt maar niet fraai en hunne waarde hebben zij meer daaraan te danken, dat zij ,,oud" zijn en de invoer in historischen tijd, d. w. z. sedert de komst der Europeanen, niet meer heeft plaats gehad. Het is zeer opmerkelijk, dat aangaande hun herkomst op Flores dezelfde legende heerscht als ten opzichte van het tin, n.l. dat zij zich in den bodem zelf, tengevolge van het verbranden van alang-alang gevormd hebben, daarvandaan ook hunne benaming ,,moeti tanah" = aardkralen. Aangaande hunnen oorsprong verkeert men, evenals wat de op de Zuidzee-eilanden gevonden glazen voorwerpen betreft, geheel in het duister.

Niettegenstaande de groote overeenkomst in smaak ten opzichte van de kralen, openbaart zich, wat de overige tot kapitaalvorming dienende voorwerpen betreft, een hemelsbreed verschil. Terwijl op de Alor-eilanden voor dit doel moeten dienen de ,,moko-moko", eigenaardige van geel koper vervaardigde keteltrommen, zijn het op de onmiddellijk in westelijke richting volgende Solor-eilanden olifantstanden, die daarvoor in de plaats treden. Op West-Flores vallen tinnen sieraden meer in den smaak, terwijl de bewoners van het eiland Rotti aan kettingen van gouddraad vervaardigd de voorkeur geven.

---

[1]) Op Timor zelf komt wel goud en koper voor, maar in de verste verte niet voldoende, om in de behoefte aan die metalen te voorzien. Overigens is de aanwezigheid van ertsen nog lang geen bewijs, dat de inlanders de kunst van metaalbereiding verstaan. Zoo was aan de bewoners van Billiton de kunst om het tin uit tinerts te reduceeren geheel onbekend, terwijl zij sedert onheugelijke tijden met het meer ingewikkelde proces van ijzerbereiding zeer goed bekend waren; en nog kort geleden heeft F. Sarasin van de Nieuw-Caledoniërs moeten getuigen: „Die Kunst Metalle zu bearbeiten, haben die Caledonier trotz des enormen Reichtums des Landes an solchen, speziell von Eisen, nie gekannt und auch heute noch nicht gelernt" (Neu-Caledonien. Basel 1917, blz. 83).

Volgens de redeneering van C. J. VAN SCHELLE en den heer VERMAES zoo men kopermijnen op de Alor-eilanden, olifantskudden op de Solor-eilanden en goudgraverijen op Rotti moeten verwachten. Het is overbodig, om er nog veel woorden aan te wijden, maar wij willen bij de tinnen voorwerpen van Flores nog een oogenblik stil staan. De heer VERMAES zou als steun voor zijne stelling kunnen aanvoeren, dat geen enkel bericht bekend is, waaruit men zou kunnen opmaken, dat tin of tinnen voorwerpen op Flores werden ingevoerd. Maar hetzelfde is het geval met de olifantstanden van de Solor-eilanden. Op de Alor-eilanden heeft men in de tweede helft der vorige eeuw te Grissee op Java gegoten moko-moko's ingevoerd, maar deze werden door de inlanders onmiddellijk als namaaksel herkend. Op Rotti, waar men nooit een korrel goud gevonden heeft, is een oude tak van nijverheid gaan herleven, doordien de verkoop van paarden naar Australië ponden sterling naar het eiland bracht, die aldaar tot gouden kettingen werden verwerkt [1]).

De Heer VERMAES heeft verder tot staving van zijn betoog niet alleen een aantal fraaie afbeeldingen, maar ook talrijke analyses van de op het eiland gevonden metalen voorwerpen aan zijne verhandeling toegevoegd. Naar ik hoop zullen zij voor de ethnographie van Flores allerbelangrijkst zijn, met de beantwoording der vraag naar de herkomst der metalen hebben zij echter niets uit te staan. Ik kan mij voorstellen, dat de mogelijkheid bestaat, door de analyse van een eetlepel uit te maken, dat hij afkomstig is van de firma J. M. VAN KEMPEN en Zonen te Voorschoten, maar zelfs honderden van analyses zouden ons geen antwoord kunnen geven op de vraag naar de herkomst van het daarbij verwerkte zilver.

Het is opmerkelijk, dat er in vroegere tijden evenmin van uitvoer als van invoer van tinnen voorwerpen sprake is geweest [2]). Op den duur had een dergelijke handel aan de Europeanen niet kunnen ontsnappen, evenmin als de handel in „Billitonsche bijlen" en „Tamboekoesche zwaarden". In het oogvallend is echter het feit, dat de tinnen voorwerpen op het anders zoo armoedige eiland juist

---

[1]) De Rottineezen staan in beschaving zeer veel hooger, dan de bewoners van Alor en Flores, wier bedrevenheid in de bewerking van metalen zeer gering is. J P. FREYSS zegt dan ook, dat de smederij onder de bewoners van West-Flores zeer gebrekkig is (Reizen naar Mangarai .... Tijdschr. Ind. T. L. en Vk. **9**. Batavia 1860, blz. 511).

[2]) Zooals vroeger reeds door mij vermeld, werd er eerst in 1871 door J. A. VAN DER CHIJS van gewag gemaakt, dat arm- en beenringen, uit tin vervaardigd, uit de landstreek Rokka werden uitgevoerd (Tijdschr. v. Nijverheid en Landbouw in Nederl.-Indië **16**. Batavia 1871, blz. 158—159).

op het zuidelijk gedeelte van de westelijke helft bij voorkeur in handen van de inlanders gevonden werden. Dit zou zijn oorzaak kunnen vinden in de aanwezigheid van tinerts daar ter plaatse, het zou echter ook kunnen zijn, dat de bevolking daar over de meeste ruilmiddelen beschikt en daardoor ook in het bezit geraakt van voorwerpen, die hunne overige landgenooten moesten missen. Ten tijde der Portugeezen was uit de bedoelde streek „kaneel" [1]), blijkens vermelding door Godinho de Eredia, reeds een uitvoerprodukt [2]) en de stichting van het fort op Noesa Endeh zal wel niet uitsluitend ten doel hebben hebben gehad de missie der Dominikanen te beschermen. Dat dit produkt evenmin aan de aandacht der O. I. Compagnie ontsnapte, blijkt uit de mededeelingen van P. A. Leupe over het verhandelde te Batavia in 1757, toen betoogd werd: „Nog moesten ze trachten een middel uit te denken waardoor „het kaneelbosch Rokko op Ende aan de Comp. zou kunnen worden „getrokken" [3]) en volgens J. C. M. Radermacher, was het in 1756, dat „de Maatschappij aan de Makkasaren permissie [heeft] verleend „om wederom op Ende en de Mangary . . . te mogen varen, *mits „geen wilde Caneel van daar*, op confiscatie van vaartuigen en „lading" [4]).

Bijna zestig jaren geleden schreef nog J. P. Freyss: „Het verzamelen van was en kaneel maakt de voornaamste ressource van den handel uit" [5]). Een natuurlijk gevolg van dezen handel was een betrekkelijk grootere mate van welvaart, dan waarin zich hunne overige landgenooten mochten verheugen, wier inkomsten uit hunne boschprodukten minder waren en die dus in ruil daarvoor met artikelen, die voor hun levensbehoefte in de eerste plaats van belang waren, moesten voorlief nemen, terwijl de Rokkaneezen zich tevens de weelde konden veroorloven meer tot opschik dienende objekten te verwerven. Welke gebeurtenissen echter aanleiding gaven

1) Bedoeld was wel *Cassia* (J. G. F. Riedel. The island of Flores or Pulau Bunga. Revue colon. internat. 1. Amsterdam 1886, blz. 66).

2) Antonio Lourenço Caminha, Ordonaçóes da India do Senhor Rei D. Manoel de eterna memoria. Informação verdadeira da Aurea Chersoneso feita pelo .... Manoel Godinho de Eredia. Lisboa 1807, blz. 143 (geschreven in 1599).

3) Besognes der Hooge Regeering te Batavia gehouden over de commissie van Paravacini naar Timor in 1756. Bijdr. t. de T., L. en Vk. (4) **1** 's Gravenhage 1877, blz. 479.

4) Korte beschrijving van het eiland Celebes en de eilanden Floris, Sumbawa, Lombok en Baly. Verhandel. van het Batav. Genootsch. van K. en W. **4**. Batavia 1786, blz. 252.

5) Reizen naar Mangarai en Lombok in 1854—1856. Tijdschr. Ind. T., L. en Vk. **9**. Batavia 1860, blz. 512.

tot het staken van den aanvoer der *moeti tanah* alsmede der uit tin vervaardigde voorwerpen, zal nog voor langen tijd, misschien voor goed, een raadsel blijven.

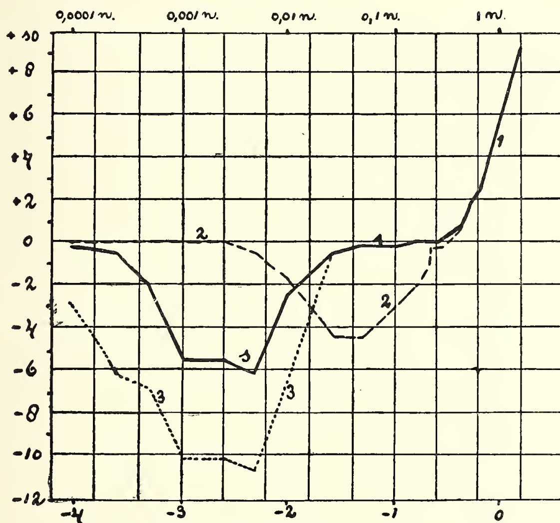
Aan het hoofd van zijne verhandeling heeft de heer VERMAES als motto geplaatst de volgende uitlating van CROOCKEWIT: „Met regt „besluit ik alzoo uit deze onderzoekingen, op drie verschillende „wijzen ondernomen, dat de op Billiton gevonden erts geen tinoxyde „bevat" [1]). Zijn bedoeling was daarbij te doen uitkomen, dat ik aangaande Flores evenzeer had misgetast, als dit met CROOCKEWIT ten opzichte van Billiton het geval geweest was. Zooals uit het bovenstaande gebleken zal zijn, is de heer VERMAES er niet in geslaagd aan te toonen, dat op Flores tinerts voorkomt, zijne vergelijking gaat dus niet op en was op zijn minst genomen zeer voorbarig. Ook in een ander opzicht heeft hij zich in den persoon vergist. Niet ik, maar VAN SCHELLE was het, die evenals CROOCKEWIT van onjuiste premissen uitging, niet ik, maar VAN SCHELLE was het, wiens onderzoekingen evenals die van CROOCKEWIT tot verkeerde gevolgtrekkingen leidden. Het was dus niet verwonderlijk, dat beiden schipbreuk leden.

[1]) Uittreksel van het rapport eener reis over het eiland Billiton. Natuurk. Tijdschr. Ned.-Ind. 3. Batavia 1852, blz. 406.

**Physiologie.** — De Heer ZWAARDEMAKER biedt, mede namens den Heer H. ZEEHUISEN, eene mededeeling aan: „*Over het teeken van het ladingsverschijnsel en den bij dit verschijnsel waargenomen invloed van lyotrope reeksen*".

I. In een vroegere mededeeling [1]) is door ons vastgesteld, dat de salicylzure zouten hun ladingsvermogen bij nevelvorming door verstuiving aan het daarin aanwezige anion te danken hebben. Zooals

Fig. 1. Invloed van 0.1 normaal NaCl en 6 % rietsuiker op de lading van salicylas natricus.




1. Ladingscurve van salicylas natricus alleen.
2. Ladingscurve van salicylas natricus + zout.
3. Ladingscurve van salicylas natricus + suiker.

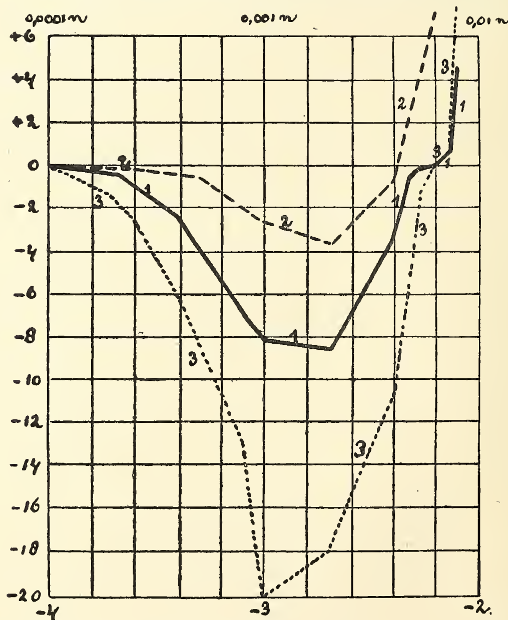
Op de abscis zijn boven de normaalconcentraties, beneden de logarithmen der normaalconc. van salicylas Na. aangegeven; op de ordinaat uitslagen van den electroscoop in deelstrepen.

[1]) Kon. Akad. v. Wetensch. Wis- en Natuurk. Afd., Amsterdam, 26. 1250, Febr. 1918.

aldaar is uiteengezet, vermindert het begeleidende kation de negatieve nevellading van dit zuur. Tengevolge hiervan bepalen salicylzuur en salicylaten, beide in zwakke concentraties op geheel overeenkomstige wijze, en wel met negatief teeken, het laadvermogen van den nevel, alleen met quantitatieve verschillen in dien zin, dat het zout minder hooge lading voortbrengt dan het zuur, en wegens zijne sterkere oplosbaarheid in water ook in hoogere concentraties kan worden verstoven. Dit geldt ook voor andere salicylaten, voor zoover zij in water oplosbaar zijn.

Bij toenemen der concentratie vermindert de negatieve lading van het *salicylas natricus*, om langzamerhand tot dicht bij de nullijn te komen en deze ten slotte te overschrijden, zoodat de lading positief wordt. Langen tijd blijft intusschen elke lading uit, zooals uit fig. 1,

Fig. 2. Negatieve en positieve ladingsphase van salicylzuur en de invloed van 0.0025 n. NaCl en van 6 % suiker op de lading.




1. Ladingscurve van salicylzuur alleen; 2. Idem van salicylzuur + zout, 3. Idem van salicylzuur + suiker.

Indeeling van abscis en ordinaat als in fig. 1.

waar ook het positieve gedeelte der lading van salicylas natricus zichtbaar is, en waar de sterkten der oplossingen op de abscis logarithmisch zijn aangegeven, duidelijk is [1]).

Toevoeging van keukenzout aan deze sterke oplossingen van salicylas natricus had op deze positieve ladingen evenmin eenigen invloed als suikertoevoeging, in tegenstelling met de in de figuur aangegeven veranderingen, die de negatieve lading van zwakkere oplossingen van salicylas natricus onder den invloed dezer stoffen onderging.

Ook de lading van het *salicylzuur* zelf neemt bij het toenemen der concentratie eerst toe en daarna af (fig. 2), om even vóór het verzadigingspunt der oplosbaarheid de nullijn te overschrijden. De invloed van zout en suiker op de lading is op dit oogenblik, evenals bij het salicylas natricus, zeer gering; zij wordt echter na het overschrijden der nullijn aanstonds weer levendig, maar nu in positieven zin.

De zoo even beschreven of afgebeelde feiten geven op den eersten blik den indruk van een chaos. Eenige orde komt er eerst in, wanneer men overweegt, dat in de verdunde oplossingen, om welke het bij de verstuiving in het algemeen gaat, kationen en anionen afzonderlijk werken. De effecten van kationen en anionen superponeeren zich. Bij de afzonderlijke verstuiving van salicylzuur en capronzuur (fig. 2 en 3) is zoo goed als uitsluitend het anion van beteekenis. Bij de verstuiving van salicylas natricus heeft men salicylzuur- en natriumwerking; bij de gecombineerde verstuiving met zouten en suiker een combinatie van effecten van alle aanwezige kationen en anionen.

De verklaring dezer verschijnselen is voorshands niet mogelijk; zij ligt trouwens op het gebied der zuivere physica. Voorloopig kunnen wij hieromtrent alleen dit zeggen: sterke oplossingen van salicylas natricus geven bij verstuiving dikke nevels, die groote drupjes vormen; deze zijn zoo groot, dat chloornatrium- en suikerdeeltjes er blijkbaar geen invloed meer op kunnen uitoefenen. Bij verdunning der salicylas natricus-oplossing verkrijgt eerst het chloornatrium, eerst veel later de suiker een invloed op de lading.

Waarom deze invloed zich bij het keukenzout eerst in negatieven zin, en bij sterkere verdunning van het salicylas natricus in positieven zin openbaart, terwijl die invloed bij suiker eerst later optreedt en alleen in negatieve richting ligt, is niet duidelijk. Dit negatieve

[1]) Deze logarithmische voorstelling maakt het mogelijk, de negatieve en positieve phasen beide in eene teekening zichtbaar te maken; de aan het knooppunt grenzende gedeelten der curve, die dus op en nabij de nullijn loopen, zijn hierdoor schijnbaar zeer kort.

keukenzoutstadium ontbreekt bij het salicylzuur geheel, terwijl de ladingscurven van dit zuur met en zonder suiker in de buurt der nullijn eenigen tijd samenvallen (evenals dit bij salicylas natricus het geval is), om daarna een positief suikereffect op te leveren.

Met het oog op deze uitkomsten kwam het ons wenschelijk voor na te gaan, of er ook andere stoffen zijn, die in verschillende concentraties ladingen van tegengesteld teeken aanbieden. Wij kozen daartoe de in water oplosbare zuren uit de vetzurenreeks. De alkoholen dezer vetzuren gedragen zich [1]) hoogst eenvormig. Van alle is de lading der oplossingen, voor zoover deze een lading geven, positief. Bij aethyl- en propylalkohol begint zij bij sterker concentraties dan bij butyl- en amylalkohol [2]), zooals reeds vroeger in het physiologisch laboratorium bij het bestudeeren der ladingen van homologe reeksen is vastgesteld; door keukenzout worden al deze ladingen versterkt, en wel des te meer, naarmate de concentratie van het NaCl grooter genomen werd.

De vetzuren vertoonen een geheel ander ladingsverschijnsel. Indien wij het slechts uiterst zwakke ladinggevende mierenzuur buiten beschouwing laten, vinden wij, dat azijnzuur in alle concentraties waarin het maar eenige lading geeft, steeds een positief teeken meebrengt. Propionzuur, boterzuur, valeriaanzuur, capronzuur hebben daarentegen in die zwakkere concentraties, waarin zij lading geven, een negatief teeken, zooals uit fig. 3 duidelijk genoeg blijkt. De grootste negatieve lading komt bij het capronzuur voor, bij valeriaanzuur is de curve diep, bij boterzuur nog ondieper, terwijl zij bij propionzuur al uiterst vlak is. Dit laatste zuur gedraagt zich trouwens zeer eigenaardig; zijn negatieve bocht blijft bijzonder dicht bij de nullijn en heeft een langdurig beloop, de positieve lijn stijgt zeer steil tot een maximum op. Ook dit zuur sluit zich dus geleidelijk tusschen het azijnzuur en het boterzuur aan; zijn positieve zône is veel steiler dan die van boterzuur [3]), terwijl zijn negatieve zône veel ondieper is dan die van boterzuur, en het ontbreken eener negatieve zône bij het azijnzuur begrijpelijk maakt. Een en ander is uit fig. 3 zonder verdere beschrijving duidelijk. Bij geen dezer zuren, behalve bij het azijnzuur, kon het afdalende gedeelte der positieve lijn worden verkregen, omdat hun oplosbaarheid niet zoo groot was als die van azijnzuur.

---

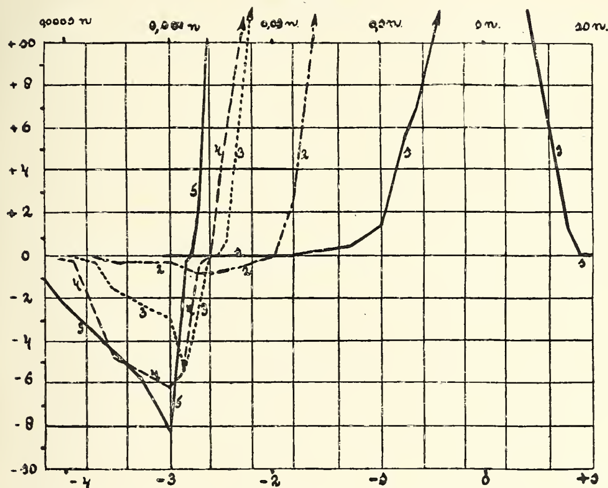
[1]) Met uitzondering van methylalkohol, wellicht, waarbij een complicatie schijnt in te sluipen.

[2]) Bij aethyl- en propylalkohol bij 0.01 n, bij butylalkohol bij 0.002 n., bij amylalkohol bij 0.0005 n.

[3]) Op de (logarithmische) curve niet te zien.

Zoo geven dus deze verschillende zuren, in verband met elkander

Fig. 3. *Negatieve en positieve ladingsphasen van term II tot VI der* **vetzuurreeks.**




1. Azijnzuur, 2. Propionzuur, 3. Boterzuur, 4. Valeriaanzuur, 5. Capronzuur.
Indeeling van abscis en ordinaat als in fig. 1.

beschouwd, de geheele negatieve en positieve phase, met deze beperking, dat practisch van een stuk daarvan niets terecht komt; van de positieve phase bij de hoogere leden der groep op grond van hunne te geringe oplosbaarheid; van de negatieve phase bij de lagere op grond van andere ons nog onbekende oorzaken.

II. In de tweede plaats is [1]) *de inwerking* nagegaan *van in den vorm van neutrale zouten toegevoegde alkali-kationen op de lading van het salicylzuur.* Hierbij bleek, dat de remmende werking dezer kationen op de lading van het salicylzuur geschiedde volgens de lyotrope reeks:


Li $<$ Na, K $<$ Rb $<$ Cd $<$ Am.

Het kwam ons nu gewenscht voor, de inwerking van andere kationen na te gaan. De inwerking van alkalische aarden op de lading van het salicylzuur bleek achter te staan bij die der alkaliën.

[1]) Kon. Akad. v. Wetensch. Wis- en Natuurk. Afd. **26**. 1250.

Dit feit kon bij twee concentraties van het salicylzuur worden vastgesteld.

Magnesium vormt tot zekere hoogte een overgang, aangezien het bij zwakkere concentraties de lading sterker remt dan Li, Na, K en Rb, en alleen voor het caesium onderdoet, terwijl deze remming bij verhooging der concentratie van het kation niet zoo snel toeneemt als bij het rubidium, en veel minder snel dan bij de andere alkalimetalen, zoodat deze laatste het somtijds zelfs in remmende werking overtreffen [1]).

Neemt men de concentratie van het salicylzuur zwak [2]) dan overtreft de remmende invloed der aardalkaliën dien van het natrium ver, en vertoonen zij, met uitzondering van het magnesium, dat nu verder van de alkaliën afstaat dan calcium, strontium en baryum, onderling duidelijker de lyotrope reeks, dan bij een sterkere salicylzuur-concentratie [3]), zoodat de reeks Ca, Sr < Ba duidelijker is. Chloriden van zink, cadmium en lood, alle in deze verbinding bivalent, vormen een opstijgende reeks Zn < Cd < Pb. Nog sterker remmen bismuth- en aluminiumverbindingen, beide trivalent.

De beoordeeling van den invloed van de chloriden van aardalkaliën en zware metalen wordt echter eenigszins gecompliceerd, doordat deze zouten in bepaalde concentratie op zichzelf reeds een uiterst zwakke lading aan den nevel kunnen geven.

In hoogere mate dan door het kation wordt de werking van neutrale zouten op het ladingsvermogen van salicylzuur door den aard van het *anion* bepaald. Deze invloed werd bij een reeks van kaliumzouten nagegaan (Tabel 2). Voor zoover geen kaliumzout beschikbaar was, zooals bij het wijnsteenzuur, werd het natriumzout gekozen, en de werking daarvan met die van NaCl, acetas Na en KNa-tartraat vergeleken en in de kaliumreeks geïnterpoleerd. Op deze wijze wordt een duidelijke lyotrope reeks verkregen: CNS, $NO_3$ < I, Cl, Br < $C_2H_3O_2$ < Tartr. < Phosph. < Citr. < Sulf.

De univalente zuren dezer reeks vertoonen onderling geringere verschillen dan tegenover de bivalente tartraten, neutrale phosphaten, citraten en sulfaten. Toch zijn er in concentraties van 0.001 n., 0.002 n., en 0.005 n. ook duidelijker verschillen tusschen de univalente anionen onderling te zien. Het sulfocyaanwaterstofzuur verwekt de geringste remming der lading van het salicylzuur, het sulfaat en citraat werken het sterkst; de verschillen tusschen deze twee uitersten zijn groot.

[1]) Bij 0.005 normaal zout.

[2]) Op 0.0005 n.

[3]) Van 0.001 n.

Bij het verstuiven van oplossingen van salicylzuur, waarin zich neutrale zouten bevinden, speelt dus het anion de hoofdrol in het tegengaan, het remmen, van de lading van dit zuur. De lyotrope reeksen zijn dan ook voor het anion veel scherper uitgesproken dan voor de kationen; die der laatste zijn voor de leden van elke groep van metalen onderling wel zichtbaar, maar van een regelmatige opvolging dier groepen is geen sprake.

Ten einde ons rekenschap te geven van de beteekenis dezer bij negatief ladingsteeken verkregen verschillen bij verandering van ladingsteeken, werd nagegaan, of zuren, die een positieve lading geven zooals azijnzuur, zich op overeenkomstige wijze gedragen. De lading van azijnzuur werd door toevoeging van neutrale zouten versterkt, zoodat hier dus niet de factor der remming, zooals bij de negatieve phase van het salicylzuur, maar die der versterking moest worden bepaald[1]). Nagegaan werd nu, of voor de ladingsversterking van het *azijnzuur* de lyotrope reeksen ook geldig waren. Voor de kationen (tabel 3) werden Na, K, Am, Mg, Ca en Ba gekozen, omdat hiervoor azijnzure verbindingen beschikbaar waren, zoodat de invloed van het anion tot een minimum werd gereduceerd; toch werd naast deze acetaten ter vergelijking ook keukenzout als natriumzout gebruikt.

Een duidelijke lyotropie Na $<$ K $<$ Am werd vastgesteld[2]); tot zekere hoogte ook Mg $<$ Ca $<$ Ba? De ladingsversterking door de aardalkaliën was in zwakker concentraties kleiner dan die der alkaliën. Gecompliceerd werd de vaststelling eenigermate, doordat de oplossingen van de acetaten der aardalkaliën op zichzelf genomen een zwakke lading aan een in den nevel geplaatst scherm mededeelen. Het magnesium had hier weer de eigenaardige plaats, die het bij het salicylzuur innam; het stond haast met natrium gelijk, was beslist zwakker in werking dan kalium en ammonium, en vormde ook hier den overgang tusschen alkaliën en aardalkaliën.

De lyotropie der anionen bleek veel intensiever en algemeener dan die der kationen (Tabel 4). Het chloride staat duidelijk onder-

---

[1]) Niet alle positieve lading gevende stoffen worden onder den invloed van neutrale zouten sterker ladend, zooals reeds door Backmann uit Upsala, tijdelijk in Utrecht, is vastgesteld (Ueber die Verstäubungselektrizität der Riechstoffe, Plüger's Archiv **168**. 351—71, 1917, p. 360 en 361). Weliswaar was dit bij het grootste deel der door B. onderzochte oplossingen het geval, bij enkele intusschen werd onder den invloed van zouten de lading verzwakt, ja opgeheven. Ook door ons kon dit voor sommige stoffen opnieuw worden vastgesteld.

[2]) In een andere proefreeks met alkalichloriden werd de reeks Li $<$ Na K $<$ Rb, Cs $<$ Am verkregen.

aan in de reeks der anionen, het citraat bovenaan: Cl < CNS, $NO_3$ < Br J < $C_2H_3O_2$ < Tartr. < Phosph. < Sulf. < Citr. Deze reeks der anionen verschilt slechts in enkele onderdeelen van die van het salicylzuur.

Zoowel bij het azijnzuur als bij het salicylzuur blijken de verschillen tusschen de eindpunten der lyotrope reeks bij de anionen grooter dan bij de kationen.

TABEL 1. *Invloed van* **kationen** *op de lading van* **salicylzuur.**

Factor, waarmede de uitslag van den electroscoop wordt verkleind, wanneer in plaats van enkel salicylzuur, dit zuur onder toevoeging van de chloriden van onderstaande metalen verstoven is.

*a. 0.001 normaal-oplossing van salicylzuur.*

| Concentratie kation (als chloride) | Li | Na | K | Rb | Cs | Am | Ca | Sr | Ba | Mg | Zn | Cd | Pb | Bi | Al |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 n. | ∞ | ∞ | ∞ | | | | ∞ | ∞ | | | | | 18 | | |
| 0.005 n. | 9.6 | 10.1 | ∞ | ∞ | | | 5.04 | 4.94 | 5.12 | 4.68 | 8 | 7.25 | 12 | ∞ | |
| 0.0025 n. | 3.08 | 3.48 | 4.9 | 4.8 | | | 2.87 | 3.15 | 3.26 | 4.24 | 3.6 | 4.14 | 4.30 | ∞ | |
| 0.002 n. | 2.57 | 2.86 | 2.69 | 4.0 | | ∞ | | | | | | | | | |
| 0.0015 n. | | | | | | 6.2 | | | | | | | | | |
| 0.001 n. | 1.68 | 2.27 | 1.95 | 2.36 | 2.90 | 4.3 | 1.77 | 1.85 | 1.88 | 2.55 | 1.8 | 2.50 | 2.50 | ∞ | 16 |
| 0.0005 n. | 1.35 | 1.40 | 1.49 | 1.67 | 1.77 | 2.20 | 1.52 | 1.52 | 1.52 | 1.95 | 1.55 | 1.77 | 1.80 | 3.0 | 16 |
| 0.00025 n. | 1.05 | 1.14 | 1.30 | 1.40 | 1.42 | 1.50 | 1.16 | 1.16 | 1.32 | 1.46 | 1.09 | 1.53 | | 1.4 | 12 |
| 0.000125 n. | | 1.07 | | 1.20 | | | | | | 1.22 | | | | | |
| 0.0001 n. | | | | | | | | | | | | | | | 2.4 |
| 0.00005 n. | | | | | | | | | | | | | | | 1.5 |
| 0.000025 n. | | | | | | | | | | | | | | | 1.2 |

*b. 0.0005 normaaloplossing van salicylzuur.*

| Concentratie kation (als chloride) | Li | Na | K | Rb | Cs | Am | Ca | Sr | Ba | Mg | Zn | Cd | Pb | Bi | Al |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.001 n. | | 2.18 | | | | | 2.54 | 3.02 | 3.32 | 3.86 | | | | | 4.5 |
| 0.0005 n. | | 1.81 | | | | | 2.06 | 1.93 | 2.20 | 2.71 | | | | | |
| 0.00025 n. | | 1.31 | | | | | 1.52 | 1.41 | 1.55 | 1.95 | | | | | |
| 0.000125 n. | | 1.07 | | | | | 1.17 | 1.12 | 1.24 | 1.69 | | | | | |

N. B. De chloriden der alkaliën laden niet, die der overige metalen hebben alle een geringe lading (maximum 0.8 bij $MgCl_2$; bij de overige in de gebruikte oplossingen, hoogstens 0.2 deelstreep).

TABEL II. *Invloed van* **anionen** *op de lading van* **salicylzuur.** (0.001 normaal)

Factor, waarmede de uitslag van den electroscoop wordt verkleind, wanneer in plaats van enkel salicylzuur, dit zuur onder toevoeging van de Kaliumzouten van onderstaande zuren verstoven is.

| Concentratie anion | KCNS | $KNO_3$ | KI | KCl | KBr | $KC_2H_3O_2$ | KNa tartraat | K phosph. | K citraat | K sulfaat |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 n. | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 0.005 n. | 13.3 | 13.3 | 36.5 | 36.5 | 36.5 | 45 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 0.0025 n. | — | 15 | 10 | — | 10 | 8 | 19 | ∞ | ∞ | ∞ |
| 0.002 n. | 4 | 4 | 6.2 | 6.1 | 6.2 | 5.5 | 12 | 60 | 73 | ∞ |
| 0.001 n. | 2.1 | 2.2 | 2.4 | 2.4 | 2.4 | 2.7 | 2.64 | 5 | 3—6 | 5–6 |
| 0.0005 n. | 1.5 | 1.4 | 1.5 | 1.4 | 1.5 | 1.7 | 1.61 | 2.4 | 2.1—2.5 | 2.2 |
| 0.00025 n. | 1.3 | 1.25 | 1.3 | 1.2 | 1.3 | 1.2 | 1.22 | 1.4 | 1.4—1.6 | — |

TABEL III.

*Versterkende invloed van* **kationen** *op de lading van* **azijnzuur** (0.1 normaal).

Factor, waarmede de uitslag van den electroscoop vergroot wordt, wanneer in plaats van enkel 0.1 n. azijnzuur, 0.1 n. azijnzuur onder toevoeging van het acetaat van onderstaande alkaliën en alkalische aarden verstoven is. (NaCl als contrôle).

| Concentratie Kation | NaCl | Acetas Na | Acetas K | Acetas Am. | Acetas Mg [1] | Acetas Ca [1] | Acetas Ba [1] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 n. | | 4.4 | 5.1 | 4.85 | 4.1 | 4.0 | 4.6 |
| 0.005 n. | 2.2 | 3.1 | 3.5 | 4.4 | 3.12 | 3.4 | 3.1 |
| 0.0025 n. | 2.0 | 2.15 | 2.3 | 3.15 | 2.12 | 2.36 | 2.35 |
| 0.002 n. | 1 8 | | 2.2 | 2.7 | 1.87 | 1.91 | 1.95 |
| 0.001 n. | 1.55 | 1.4 | 1.78 | 2.2 | 1.37 | 1.43 | 1.45 |
| 0.0005 n. | 1.35 | 1.3 | 1.35 | 1.8 | 1.08 | 1.29 | 1.20 |
| 0.00025 n. | 1.24 | 1.1 | | 1.3 | | | |
| 0.0002 n. | | 1.05 | | 1.05 | | | |
| 0.0001 n. | 1.05 | | | | | | |

## SAMENVATTING.

Tot dusver hebben wij dus het volgende vastgesteld :

1. *Salicylzuur* geeft, tenzij in totaal verzadigde oplossing, een *negatieve lading*, die door kationen en anionen wordt verzwakt in lyotrope-reeks, in de richting van Li naar Cs en van chloride naar sulfaat.

2. *Azijnzuur* geeft, in voldoende concentratie in water opgelost, een *positieve lading*, die door kationen en anionen wordt versterkt, grootendeels in lyotrope-reeks, in de richting van Li naar Cs, en van chloride naar sulfaat.

3. *Azijnzuur* verzwakt, resp. dooft de negatieve lading van salicylzuur uit. Als zuur bij sterkere concentratie met positieve ladings-

[1]) Lading dezer acetaten: 0.01—0.02 normaal laadt 0.4–0.7; 0.002 n. laadt 0—0.2 deelstreep.

Lading van NaCl en van de alkaliacetaten = 0. De ladingsversterking der aardalkaliën is niet grooter dan die der alkaliën; in zwakke concentraties (0.002—0.005 n.) zelfs kleiner.

TABEL IV. *Versterkende invloed van* **anionen** *op de lading van* **azijnzuur** (0.1 normaal).

Factor, waarmede de uitslag van den electroscoop vergroot wordt, wanneer in plaats van enkel 0.1 n. azijnzuur, 0.1 n. azijnzuur onder toevoeging van de K (en Na) zouten van onderstaande zuren verstoven is.

| | *a. Kaliumzouten.* | | | | | | | | | | *b. Natriumzouten.* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentratie anion | KCNS | $KNO_3$ | KI | KCl | KBr | $KC_2H_3O_2$ | KNa tartraat | K phosph. | K citraat | K sulfaat | NaCl | Acetas Na | Tartraat Na |
| 0.01 n. | | 5.1 | | | | 5.39 | 6.43 | | > 7 | | | 4.85 | > 6 |
| 0.005 n. | 3.85 | 3.68 | 3.95 | 3.63 | 3.55 | 4.39 | 4.43 | 5.5 | 5.16 | 4.56 | 2.2 | 4.4 | 4.75 |
| 0.0025 n. | 2.70 | 3.00 | 3.00 | 2.70 | 2.77 | 2.8 | 3.07 | 3.6 | 3.68 | 3.56 | 2.0 | 3.15 | 3.3 |
| 0.002 n. | 2.40 | 2.50 | 2.65 | 2.30 | 2.37 | 2.61 | 2.57 | 2.93 | 3.16 | 2.96 | 1.8 | 2.7 | 3.0 |
| 0.001 n. | 1.80 | 2.05 | 2.20 | 1.70 | 1.59 | 1.8 | 1.57 | 2.11 | 2.21 | 2.16 | 1.55 | 2.2 | 2.3 |
| 0.0005 n. | 1.60 | | 1.65 | 1.4 | 1.42 | 1.4 | 1.36 | 1.61 | 1.63 | 1.92 | 1.35 | 1.8 | 1.7 |
| 0.00025 n. | 1.35 | 1.42 | 1.45 | 1.2 | 1.35 | — | | 1.28 | 1.48 | 1.45 | 1.24 | 1.3 | 1.5 |
| 0.0002 n. | | 1.32 | | | | 1.3 | | 1.22 | 1.32 | 1.28 | | 1.05 | 1.15 |
| 0.0001 n. | | | | | | | | | | | 1.05 | | |

phase heeft het de overhand over het in zwakke oplossingen verstoven, negatief ladende salicylzuur. Ook acetaten werken, zooals reeds sub 1 is gebleken, verzwakkend op de lading van salicylzuur, terwijl zij zelf — ten minste de alkali-acetaten (de acetaten der andere metalen geven zeer geringe lading) geen lading geven.

Mengsels van salicylzuur en azijnzuur bleken de ladingseigenschappen van azijnzuur te vertoonen, zoolang dit laatste zuur overheerscht. Neemt de concentratie van azijnzuur in het salicylzuur-azijnzure mengsel zoodanig af, dat zulk een azijnzuuroplossing op zichzelf nauwelijks eenige lading zou vertoonen, dan komt er een oogenblik, waarop de lading van het mengsel = 0 is; bij nog geringere concentratie van azijnzuur treedt wederom lading op, ditmaal negatieve lading. Er is een oogenblik, waarop de bevorderende werking van de kationen op het azijnzuur juist wordt opgeheven door de remmende werking dezer kationen op het salicylzuur. Dit verschijnsel heeft een vrij groote breedte.

---

**Scheikunde.** - De Heer F. M. JAEGER, biedt een mededeeling aan: „*Onderzoekingen over* PASTEUR's *Beginsel omtrent het Verband tusschen Molekulaire en Kristallonomische Dissymmetrie.* **V.** *Optisch-actieve Complex-zouten van het Iridium-Oxaalzuur*".

§ **1.** Voor eenigen tijd werd door ons mededeeling gedaan [1]) omtrent de eigenschappen van het racemische *Kalium-Iridium-Oxalaat*: $K_3 \{Ir(C_2O_4)_3\} + 4\frac{1}{2} H_2O$, [2]) en werden splitsingsproeven dezer verbinding door ons in uitzicht gesteld, teneinde meerdere gegevens te verzamelen voor de beoordeeling van de ruimtelijke configuratie der optisch-actieve complexe ionen, in vergelijking met die, welke wij op grond van destijds aangevoerde argumenten, aan de overeenkomstige *rhodium*-verbinding moesten toekennen. Tevens zou op deze wijze kunnen worden nagegaan, welken invloed de vervanging van het centrale *rhodium*-atoom in deze complexe ionen door het homologe *iridium*-atoom, op de grootte en het specifieke karakter der optische rotatie en hare merkwaardige dispersie heeft. De betrekking tusschen de genoemde functie's der beide metaal-atomen te kennen, is namelijk, in verband met onze vroegere onderzoekingen over de analoge complex-zouten van het *kobalt* en het *rhodium* met drie molekulen *aethyleendiamine*, van groot belang voor de juiste beoordeeling van het configuratieve verband der in denzelfden zin draaiende zouten van deze, in de achtste groep van het periodiek systeem thuis behoorende homologe metalen [3]).

In het volgende worden de bedoelde splitsingsproeven, en de daarbij verkregene resultaten meer in bijzonderheden beschreven. Hiermede is voor de eerste maal de mogelijkheid eener „partieele" asymmetrie [4]), óók bij het *iridium*-atoom aangetoond, zoodat de reeks der optisch-actieve complex-zouten thans de metalen *chromium, ijzer, kobalt, platina, rhodium,* en *iridium* omvat. Omtrent de dispersie van enkele dezer zouten zal in afzienbaren tijd nog een en ander meegedeeld worden.

---

[1]) F. M. JAEGER, deze Verslagen, **26**, 170. (1917).

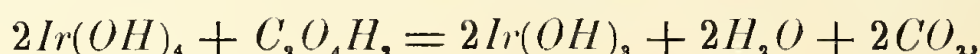
[2]) C. GIALDINI, Rend. Acad. d. Linc., *Roma*, (5*a*), **16**. II. 551. (1907); deze Verslagen, loco cit. p. 185.

[3]) F. M. JAEGER, deze Verslagen, **26**. 152. (1917); zie ook: *ibid.* **23**. (1915), p. 1268 en 1291; Zeits. f. Kryst. **55**. 209. (1915).

[4]) F. M. JAEGER, *Lectures on the Principle of Symmetry*, enz., *Amsterdam*, Elzevier-maatschappij, (1917), p. 235.

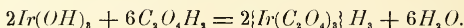
§ **2**. Het voor deze proeven benoodigde *kalium-iridium-oxalaat*: $K_3\{Ir(C_2O_4)\}_3 + 4\frac{1}{2} H_2O$, werd op de volgende wijze verkregen. Zuiver, waterhoudend *iridiumchloride* werd in 3°/₀ oplossing met een overmaat van eene 10 °/₀ oplossing van $KOH$ behandeld. Er ontstaat een vuil-bruin praecipitaat, dat in de overmaat van de bijtende kali onder vorming van een iridiaat oplosbaar is. De alkalische oplossing wordt verhit, en vervolgens wat perhydrol (30°/₀) toegevoegd: de kleur wordt donkerblauw, en het grootste gedeelte van het iridium slaat als donkerblauw $Ir(OH)_4$ neer. Een deel blijft in den vorm eener zeer stabiele kolloïdale oplossing in de vloeistof, en is daaruit ook na toevoegen van electrolyten, niet neer te slaan. Daarom werden deze oplossingen meestal ingedampt, en door omzetten in *ammonium-chloro-iridiaat* weer als de overige *iridium*-resten opgewerkt.

Het blauwe neerslag wordt door decanteeren met water gewasschen, dan met door wat oxaalzuur zuurgemaakt water, waarna de blauwe waschvloeistoffen eveneens op *iridium* verwerkt worden. Als het waschwater kleurloos geworden is, brengt men het neerslag in een rondbodemkolf, pipetteert het er bovenstaande water na eenigen tijd af, en brengt er nu eene heet geconcentreerde oplossing van oxaalzuur in, waarna men de massa 30 à 40 uren aan een terugvloei-koeler laat koken. Daarbij wordt een deel van het oxaalzuur ontleed, en het vierwaardige iridium tot driewaardig gereduceerd volgens de reactie:



$$2Ir(OH)_4 + C_2O_4H_2 = 2Ir(OH)_3 + 2H_2O + 2CO_2,$$

terwijl uit het derivaat van het trivalente metaal vervolgens het *iridium-oxaalzuur* wordt gevormd volgens:



$$2Ir(OH)_3 + 6C_2O_4H_2 = 2\{Ir(C_2O_4)_3\} H_3 + 6H_2O.$$

De goudgele oplossing wordt gefiltreerd, en met $KHCO_3$ bijna geneutraliseerd; vervolgens wordt ze op het waterbad geconcentreerd, en worden de verschillende uitkristalliseerende fractie's afzonderlijk bewaard. Eerst zet zich *kalium-oxalaat* af, dan dit zout nevens het zeer oplosbare $K_3\{Ir(C_2O_4)_3\}$, welks kristallen gemakkelijk door uitlezen van het eerste zout kunnen gescheiden worden, en die vervolgens ter zuivering nog eenmaal kunnen worden omgekristalliseerd [1]).

De racemische verbinding kristalliseert in licht-oranjekleurige kristallen, welke reeds vroeger beschreven zijn [2]). Zij zijn triklien-pinakoïdaal, en volkomen isomorf met de overeenkomstige, racemische *rhodium*-verbinding, zoodat de directe isomorfe vervanging van de

---

[1]) Bij de bereiding van dit racemische zout en het tijdroovende opwerken der *iridium*-resten werd ik door Dr. J KAHN welwillend ondersteund.

[2]) F. M. JAEGER, deze Verslagen, **26**, 185 (1917).

metalen *Rho* en *Ir* — óók in hunne complexe zouten — hiermede volledig bewezen is. Zooals wij zullen zien, is thans dit bewijs óók geleverd voor het geval der *optisch-actieve* componenten dezer complexe verbindingen.

§ **3.** *Splitsing van het racemische Kalium-Iridium-Oxalaat* ($+4^1/_2 H_2O$) *in zijne optisch-actieve componenten.*

27,5 Gram zuiver *strychnine-nitraat* worden in 1300 cm³ kokend water opgelost, en vervolgens wordt onder voortdurend roeren eene oplossing van 15,5 gram van het racemische zout in 250 cm³ water van 60° C. snel in de kokende vloeistof gegoten. Men laat de kolf met de goudgele vloeistof gedurende twaalf uren langzaam op kamertemperatuur afkoelen, en zuigt dan de afgezette, hooggele, vezelachtige kristal-massa scherp af. Deze kristallen worden met een weinig alkohol, en vervolgens met wat ligroïne gewasschen en aan de lucht gedroogd. De moederloog wordt op het waterbad tot ongeveer $^2/_3$ van het oorspronkelijke volume ingedampt; bij bekoeling zetten zich daaruit wederom hooggele, vezelachtige kristallen af, die als boven behandeld worden. Terwijl echter de eerste fractie de *strychnine*-verbinding van den *rechts*draaienden component vertegenwoordigt, werd uit de tweede fractie reeds terstond de *links*draaiende antipode verkregen. Bij verder indampen verkrijgt men verschillende achtereenvolgende fractie's van ietwat lichtere kleur, welke alle het *links*draaiende kaliumzout opleveren. De zesde en zevende fractie bestonden uit zuiver *strychnine*, nevens het *nitraat* daarvan, terwijl in de laatste resten kristallen van het vrije, *racemische kalium*-zout, nevens zulke van den linkschen component, en tevens naast *kalium*-nitraat gevonden werden. De rotatie der laatst uitgescheiden fractie, als geheel genomen, en ontdaan van het kaliumnitraat, had negatief karakter, en bedroeg ongeveer $^1/_7$ van de draaïing van het zuivere linksche zout, zoodat zij blijkbaar eene aanzienlijke hoeveelheid van het racemische zout als bijmengsel bevat.

Blijkbaar heeft er eene gedeeltelijke hydrolyse plaats, waardoor zich het vrije kaliumzout in de laatste moederloogen ophoopt.

Het *strychnine*-zout van den *rechts*draaienden component heeft de samenstelling: $\{Ir(C_2O_4)_3\}_2\,(C_{21}H_{22}N_2O_2)_3 + 3\frac{1}{2}H_2O$), en heeft het uiterlijk van lichtgele, vilt-achtige, zeer fijne naaldjes. De rotatie van dit sterk rechtsdraaiende zout werd voor eene reeks van golflengten bepaald met behulp van eene oplossing, die 0,4763 gram der stof in 100 gram vloeistof bevatte.

De volgende waarden werden gevonden:

| ROTATIE-DISPERSIE VAN STRYCHNINE-*d*-IRIDIUM-OXALAAT (+ 3½ $H_2O$). | | |
|---|---|---|
| *Golflengte in A. E.:* | *Waargenomen Draaïing:* | *Moleculaire Rotatie:* |
| 5105 | + 1°.02 | + 20997° |
| 5260 | 0.86 | 17703 |
| 5430 | 0.65 | 13379 |
| 5610 | 0.38 | 7822 |
| 5800 | 0.27 | 5558 |
| 6020 | 0.21 | 4323 |
| 6260 | 0.17 | 3499 |
| 6530 | 0.15[5] | 2676 |

Evenzoo werd voor het *strychnine*-zout der *linksche* antipode de formule: $\{Ir(C_2O_4)_3\}_2\,(C_{21}H_{22}N_2O_2)_3 + 3H_2O$ gevonden; ook dit zout kristalliseert in naaldjes, die iets dikker zijn dan bij het vorige. De verbinding is sterk linksdraaiend, en de dispersie is zwakker dan bij het vorige zout, zooals uit de onderstaande waarden, en uit de grafische voorstelling in fig. 1 duidelijk blijkt:

| ROTATIE-DISPERSIE VAN STRYCHNINE-*l*-IRIDIUM-OXALAAT (+ 3 $H_2O$). | | |
|---|---|---|
| *Golflengte in A. E.:* | *Waargenomen Rotatie:* | *Moleculaire Rotatie:* |
| 5105 | — 0°.33 | — 17236° |
| 5260 | 0.28 | 14624 |
| 5430 | 0.24 | 12535 |
| 5610 | 0.19 | 9994 |
| 5800 | 0.15 | 7835 |
| 6020 | 0.12[5] | 6057 |
| 6260 | 0.09 | 4701 |
| 6530 | 0.08 | 4178 |

De gebezigde oplossing bevatte 0,1886 gram der stof in 100 gram der vloeistof.

Opmerkelijk is, dat het linksche *strychnine*-zout eene grootere

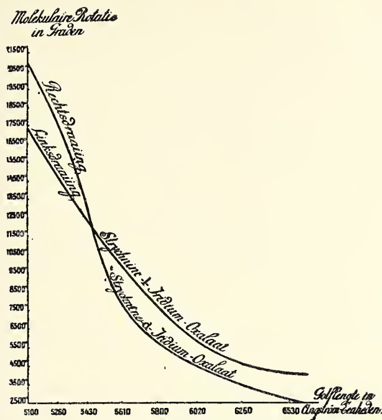



Fig. 1. *Molekulaire Rotatie-Dispersie van Strychnine-d-Iridium-Oxalaat* ($+3\frac{1}{2}H_2O$) *en van Strychnine-l-Iridium-Oxalaat* ($+3H_2O$)

moleculaire linksdraaïing vertoont, dan het overeenkomstige vrije *kalium*-zout; het rechtsche *strychnine*-zout draait sterker dan het vrije *kalium*-zout.

§ 4. De verschillende fractie's werden met zesmaal hun gewicht aan fijngepoederd *joodkalium* vermengd, en met een weinig koud water in een mortier samengewreven. Als zoóveel water toegevoegd is, dat alle kaliumjodide opgelost is, wordt de gele vloeistof van het witte strychnine-jodide scherp afgezogen, het neerslag met zeer weinig koud water uitgewasschen, en de gefiltreerde moederloog met 95 °/₀ alkohol gepraecipiteerd. Het gele praecipitaat wordt afgezogen, met alkohol gewasschen, en uit water omgekristalliseerd. Bij verhitting op het waterbad racemiseert het zout zich niet merkbaar. Door langzame kristallisatie worden driehoekig begrensde, oranje kristallen verkregen, welke tusschen filtreerpapier gedroogd worden. Zij kunnen in de moederloog tot aanzienlijke grootte aangroeien. De optisch-actieve componenten zijn zeer oplosbaar, nóg meer dan de toch al reeds sterk oplosbare racemische verbinding. Het is daarom aan te bevelen, de kristallisatie der verzadigde oplossingen in kleine, en wat diepere schaaltjes uit te voeren.

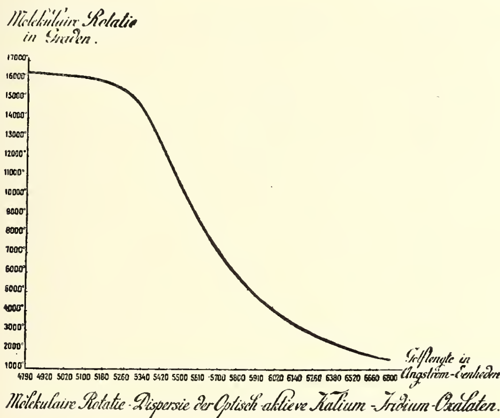
§ 5. De rotatie-dispersie van deze optisch-actieve *iridium*-zouten

werd op overeenkomstige wijze als vroeger, met behulp van een grooten polarimeter van SCHMIDT en HAENSCH, met drieledig gezichtsveld en met monochromator voorzien, voor eene reeks van golflengten bepaald. De buislengte was 20 c.M.; zelfs bij deze geringe dikte der vloeistof-laag bleek echter de beperking van het spectraalgebied van het doorgelaten licht aanzienlijk te zijn voor niet eens zoo heel geconcentreerde oplossingen. Trillingen van eene golflengte, grooter dan 6850 A.E. werden wel nimmer in merkbare

ROTATIE-DISPERSIE VAN RECHTSDRAAIEND KALIUM-IRIDIUM-OXALAAT ($+ 1 H_2O$).

| *Golflengte in A. E.:* | *Waargenomen rotatie in Graden:* | *Moleculaire rotatie in Graden:* |
|---|---|---|
| 4790 | $+ 0^\circ.79$ (*d*) | + 16340° |
| 4920 | $0.78^5$ (*d*) | 16237 |
| 5020 | 0.78 (*d*) | 16134 |
| 5100 | 0.78 (*d*) | 16134 |
| 5180 | 0.77 (*d*) | 15927 |
| 5260 | 0.75 (*d*) | 15514 |
| 5340 | 1.28 (*c*) | 14647 |
| 5420 | 4.36 (*b*) | 12586 |
| 5510 | 14.42 (*a*) | 10508 |
| 5610 | 11.94 *id.* | 8699 |
| 5700 | 9.88 *id.* | 7198 |
| 5800 | 8.17 *id.* | 5952 |
| 5910 | 6.86 *id.* | 4998 |
| 6020 | 5.49 *id.* | 4000 |
| 6140 | 4.73 *id.* | 3446 |
| 6260 | 3.86 *id.* | 2813 |
| 6380 | 3.32 *id.* | 2446 |
| 6520 | 2.61 *id.* | 1901 |
| 6660 | 2.33 *id.* | 1698 |
| 6800 | 2.10 *id.* | 1530 |

mate doorgelaten, terwijl zelfs voor eene 1 % oplossing, voor licht van kleinere golflengten dan 5300 A.E., geen zekere bepalingen meer konden geschieden. Om dus ook omtrent den loop der dispersie-kromme voor kleinere golflengten iets te vinden, moesten zéér verdunde oplossingen, van 0,2 % en 0,1 %, worden gebezigd. In het geheel werden vier oplossingen voor dit doel gebezigd, die resp. één grammolekuul van het waterhoudende zout in 14,57 Liter (*a*) der oplossing, in 57,73 Liter (*b*), in 228,86 Liter (*c*), en in 413,7 Liter (*d*) bevatten. In nevenstaande tabel zijn de middelwaarden gebezigd, en de molaire rotatie's daaruit berekend; in fig. 2 zijn deze waarden als functie der golflengte van het gebezigde licht, grafisch voorgesteld:




Molekulaire Rotatie-Dispersie der Optisch-aktieve Kalium-Iridium-Oxalaten.

Fig. 2.

De voor de verschillende oplossingen verkregen waarden, stemden zeer goed overeen, zoodat in het bovenstaande die getallen gebezigd zijn, welke het dichtst bij de kromme der gemiddelde waarden aansloten. De dispersie-kromme toont eene neiging, om voor golflengten beneden 5100 A.E. een meer en meer horizontaal verloop aan te nemen.

Ofschoon ook hier de dispersie voor de oranjekleurige oplossingen dezer complexe metaalzouten buitengewoon sterk is, zoo heeft toch de kromme een ander verloop dan bij het overeenkomstige *rhodium*-zout. Dit bewijst, hoe grooten invloed de bijzondere natuur van het

centrale metaal-atoom op de licht-absorptie(kleur) dezer zouten, en op den aard der rotatie-dispersie heeft.

De bij indampen der *strychnine*-houdende moederloog op tweederde tot de helft van haar volume gewonnen, gele kristalmassa, leverde bij behandeling met kaliumjodide eene fractie (2[e]), welke uit het *zuivere linksche zout* bleek te bestaan, zooals de volgende metingen aan eene oplossing, die één grammolekuul van het gehydrateerde zout in 42,97 Liter vloeistof bevatte, duidelijk kunnen bewijzen:

| Rotatie-dispersie van het linksdraaiende Kalium-Iridium-Oxalaat (+ $1H_2O$). | | |
|---|---|---|
| *Golflengte in A. E.:* | *Waargenomen rotatie in Graden:* | *Moleculaire rotatie in Graden:* |
| 5340 | — 6°.66 | — 14287° |
| 5430 | 5.72 | 12289 |
| 5520 | 4.89 | 10506 |
| 5610 | 3.86 | 8293 |
| 5700 | 3.26 | 7004 |
| 5800 | 2.70 | 5801 |
| 5910 | 2.28 | 4898 |
| 6020 | 1.95 | 4189 |
| 6140 | 1.63 | 3502 |
| 6260 | 1.35 | 2900 |
| 6340 | 1.07 | 2299 |
| 6520 | 0.88 | 1891 |
| 6660 | 0.74 | 1590 |
| 6800 | 0.70 | 1504 |

Eene vergelijking der rotatie's voor dezelfde golflengten van het overeenkomstige *rhodium*-zout met die van deze *iridium*-zouten, leert, dat de rotatie van het *iridium*-zout steeds aanzienlijk *grooter* is dan die van het *rhodium*-zout, ofschoon het atoomvolume van het *iridium* slechts weinig van dat van *rhodium* verschilt, en zelfs nog iets grooter is dan het laatste. Mocht voor het $\{Ir(Aeïne)_3\}I_3$ mettertijd blijken, dat de rotatie daarvan kleiner is dan die van het overeen-

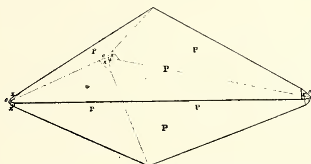
| Zout: | Moleculaire rotatie: | Atoomvolume van het Metaal: |
|---|---|---|
| $\{Rho\,(C_2\,O_4)_3\} + H_2O$. | $M_{4930} = 14200°$; $M_{5800} = 790°$; $M_{5970} = 0°$; $M_{6660} = -\ 1215°$. | 8.50 |
| $_3\ \{Ir\ (C_2\,O_4)_3\} + H_2O$. | $M_{4930} = 16230°$; $M_{5800} = 5952°$; $M_{5970} = 4500°$; $M_{6660} = +\ 1698°$. | 8.61 |

komstige *rhodium*-zout, dan zou daarmede bewezen zijn, dat de invloed van het atoomvolume op de grootte der rotatie, in deze of in tegengestelde richting kan liggen, al naarmate er basische, of wel zure substituenten rondom het centraal-atoom gecoördineerd zijn.

§ **6**. Rechtsdraaiend Kalium-Iridium-Oxalaat: $K_3\{Ir(C_2O_4)_3\} + 1H_2O$.

Fraaie, vrij groote, oranjekleurige, en sterk glanzende kristallen, welke gewoonlijk regelmatig ontwikkeld zijn als afgeplatte driezijdige bipyramiden. Hun geometrische bouw is zeer zuiver, zoodat nauwkeurige metingen mogelijk zijn. De afwijkingen van de hoekwaarden van die, welke bij het overeenkomstige *rhodium*-zout gevonden werden, zijn aanzienlijker, dan men gewoonlijk bij streng isomorfe kristallen pleegt aan te treffen.

Nochtans is de symmetrie van beide zouten dezelfde, en hunne




*Rechtsdraaiend Kalium-Iridium-Oxalaat (+1H₂O).*
Fig. 3.

vorm-analogie zóó groot, dat mede in verband met de isomorfie, welke bij de twee racemische zouten werd geconstateerd, ook de beide optisch-actieve componenten als isomorf met die der *rhodium*-verbinding mogen beschouwd worden. De wat aanzienlijker afwijkingen in de waarden der assenverhoudingen staan wel in verband met het groote verschil in atoomgewicht der beide centrale metaalatomen. De analyse leerde, dat ook dèze optisch-actieve verbinding, met slechts $1H_2O$ kristalliseert.

*Trigonaal-trapezoëdrisch.*

$a:c = 1:0{,}9520$. (Bravais); $\alpha = 100°20'$. (Miller).

*Waargenomen vormen*: $P = \{11\bar{2}2\}$ $[5\bar{2}\bar{1}]$, als positieve trigonale bipyramide, vóórheerschend, en goede reflexen leverend; $o = \{10\bar{1}1\}$ $[100]$, positief rhomboëder der eerste soort, scherp reflecteerend, doch meestal met slechts kleine vlakken aanwezig, $x = \{1\bar{1}01\}$ $[\bar{2}1\bar{2}]$, negatief rhomboëder der eerste soort, aanzienlijk breeder dan $o$, en wat lichtzwakker; $y = \{2\bar{1}\bar{1}1\}$ $[4\bar{2}1]$, als negatieve trigonale bipyramide ongeveer even groot als $x$, maar zeer veel kleiner dan $P$, meestal goede spiegelbeelden gevend; $r = \{1\bar{1}02\}$, als smalle afstomping der ribben van het rhomboëder $o$, meestal ontbrekend, doch in het tegenovergestelde geval zeer glanzend. Een enkele maal werd, rudimentair en zeer smal, een trigonaal prisma $m = \{11\bar{2}0\}$ als afstomping van de ribbe $P:P'$ waargenomen. De kristallen zijn meestal regelmatig gevormde, platte trigonale bipyramiden; soms ook min of meer grillig vervormde, plaatvormige individuen met dezelfde combinatievormen. De vlakken van $P$ zijn vaak parallel de ribbe $P:o$ gestreept. (Fig. 3).

Ook worden kristallen aangetroffen, bij welke $o$ ongeveer tweemaal zoo breed ontwikkeld is als $P$; in dat geval werd steeds de streeping op $P$ waargenomen. Ten slotte werden, — en vooral bij den rechtsdraaienden component, — individuen aangetroffen, die alleen $o$ en $P$ in *even sterke* ontwikkeling vertoonden, waarbij $P$ zijne karakteristieke streeping bezat; daarnevens was dan nog zéér klein en ondergeschikt de vorm $y$ aanwezig.

| *Hoekwaarden*: | *Gemeten*: | *Berekend*: |
|---|---|---|
| $P:P'' = (11\bar{2}2):(1\bar{2}12) =$* | 73° 20′ | — |
| $P:P' = (11\bar{2}2):(11\bar{2}\bar{2}) =$ | 92 49 | 92° 49′ |
| $P:o = (11\bar{2}2):(10\bar{1}1) =$ | 21 40 | 21 43 |
| $x:o = (1\bar{1}01):(10\bar{1}1) =$ | 43 28 | 43 26 |
| $x:y = (1\bar{1}01):(2\bar{1}\bar{1}1) =$ | 28 20 | 28 21 |
| $y:o = (2\bar{1}\bar{1}1):(10\bar{1}1) =$ | 28 24 | 28 21 |
| $P:o = (1\bar{2}12):(10\bar{1}1) =$ | 60 48 | 60 50½ |
| $o:o = (10\bar{1}1):(0\bar{1}11) =$ | 79 30 | 79 40 |
| $o:r = (10\bar{1}1):(1\bar{1}02) =$ | 39 43 | 39 50 |
| $m:P = (11\bar{2}0):(11\bar{2}2) =$ | 46 30 | 46 25 |

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Optisch éénassig, zonder aantoonbare cirkulairpolarisatie. Het karakter der dubbele breking is negatief.

Het soortelijk gewicht der kristallen bij 20° C. was 2,734; het moleknlair-volume is dns: 217,77, en de topische parameters zijn: $\chi : \omega = 7{,}0618 : 6{,}7230$, op hexagonale assen berekend, en $\chi = \psi = \omega =$ $= 6{,}1321$, met betrekking tot rhomboëdrische assen.

§ **7.** De kristallen van den linksdraaienden component vertoonden meestal slechts den vorm $P$, welke, aangezien de verschijnselen met de wet van Pasteur in dit geval blijkens de hemiëdrische symmetrie der kristallen volledig in overeenstemming zijn, als *linksche* trigonale bipyramide moet worden opgevat, en dus het symbool $\{2\bar{1}\bar{1}2\}[5\bar{1}2]$ verkrijgt; daarnevens ondergeschikt $o$, $x$, en $y$, waarbij $y$ het symbool $\{11\bar{2}1\}[41\bar{2}]$ verkrijgt. Daar echter $o$ en $x$ aan deze kristallen even sterk ontwikkeld voorkwamen, en ook overigens niet konden worden onderscheiden, zoo is de uiterlijke habitus niet van dien der rechtsche kristallen verschillend, aangezien deze laatste, door wenteling over 60° om de trigonale as, in denzelfden stand als de linksche kristallen komen, met alleen dit verschil, dat $x$ en $o$ daarbij hunne rollen verwisseld hebben. Aan kristallen, waar $x$ en $o$ verschillend van grootte zijn, is de spiegelbeeldvorm echter terstond te onderkennen. Het zône-verband moge uit de bijgevoegde stereografische projectie's (Fig. 4) duidelijk worden. Evenals in het geval van het *rhodium*-zout gaat dns ook hièr, met het tegengestelde draaiingsvermogen, eene niet-dekbare hemiëdrie der kristalvormen gepaard.

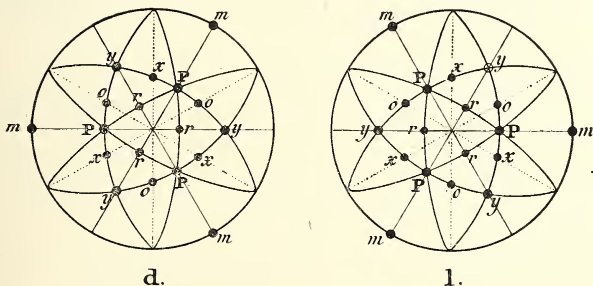



Fig. 4. *Stereografische Projektie der Vormen van* d. en l. *Kalium-Iridium-Oxalaat.*
*(alleen het boveneinde der kristallen).*

§ **8.** Voor de vroeger bestudeerde *rhodium*-zouten, werden de soortelijke gewichten bepaald op:

$d_{4^0}^{20^0} = 2{,}171$, voor het racemische zout ($4\frac{1}{2}$ $H_2O$), of het molekuulvolume op: 260,34; en

$d_{4^0}^{20} = 2{,}255$, voor de beide optisch-actieve componenten ($1 H_2O$), wat voor het molekuulvolume de waarde: 222,70 oplevert.

Hieruit volgt voor de topische assenverhouding dezer zouten:

voor het racemische zout: $\chi : \psi : \omega = 6{,}8980 : 6{,}4274 : 6{,}6306$;

voor de optisch-aktieve zouten: $\chi : \omega = 7{,}2660 : 6{,}4944$, op hexagonale assen berekend, en: $\chi = \psi = \omega = 6{,}1856$, met betrekking tot rhomboëdrische assen. Eene vergelijking van de overeenkomstige parameters met die van de hier bestudeerde *iridium*-zouten [1]:

| *Zout:* | *Topische parameters:* |
|---|---|
| *racemisch* $K_3 \{ Rho\,(C_2\,O_4)_3 \}, 4^1/_2\, H_2O$. | $\chi : \psi : \omega = 6{,}8980 : 6{,}4274 : 6{,}6306$. |
| *racemisch* $K_3 \{ Ir\,(C_2\,O_4)_3 \}, 4^1/_2\, H_2O$. | $\chi : \psi : \omega = 6{,}7454 : 6{,}2626 : 6{,}5162$. |
| *optisch-actief* $K_3 \{ Rho\,(C_2\,O_4)_3 \}, H_2O$. | $\chi : \omega = 7{,}2660 : 6{,}4944;\ \chi' = 6{,}1856$. |
| *optisch-actief* $K_3 \{ Ic\,(C_2\,O_4)_3 \}, H_2O$. | $\chi : \omega = 7{,}0618 : 6{,}7230;\ \chi' = 6{,}1321$. |

leert, dat de vervanging van het centrale *Rho*-atoom in het complexe oxalaat door het isomorf-substitueerende *Ir*-atoom, bij het racemische zout tot eene verkleining, bij de optisch-actieve zouten daarentegen tot eene geringe vergrooting van den topischen parameter $\omega$ voert, alhoewel ook dáár de waarden voor $\chi$ en $\chi'$ kleiner zijn dan bij het overeenkomstige *Rho*-zout.

Evenals bij het vroeger beschreven *rhodium*-oxalaat, zijn de bij de splitsing van het *kalium-iridium-oxalaat* waargenomen verschijnselen inderdaad in volledige overeenstemming met den inhoud van Pasteur's *wet*.

*Laboratorium voor Anorganische en Physische Chemie der Rijks-Universiteit.*

*Groningen*, Juni 1918.

[1]) Het specifiek gewicht van het *racemische* $K_3 \{ Ir\,(C_2O_4)_3 \} + 4^1/_2\, H_2O$ werd bij 18° C. bepaald op: $d_{4^0} = 2{,}688$; het molekuul-volume is dus: 243,82.

**Scheikunde**. — De Heer JAEGER biedt eene mededeeling aan, mede namens den Heer W. THOMAS: „*Onderzoekingen over* PASTEUR's *Beginsel omtrent het Verband tusschen Molekulaire en Kristallonomische Dissymmetrie*: **VI.** *Over de Splitsing van het Kalium-Rhodium-Malonaat in zijne Optisch-actieve Komponenten en over de Anomale Rotatie-Dispersie daarvan*".

§ **1.** Voor eenigen tijd [1]) *werd* de kristalvorm beschreven van het *racemische Kalium-Rhodium-Malonaat*: $K_3\{Rho(C_3H_2O_4)_3\} + 3H_2O$, en op de mogelijkheid gewezen, dit zout in zijne optisch-actieve komponenten te splitsen. In het volgende worden de resultaten van de desbetreffende proefnemingen, welke inderdaad tot een positief resultaat gevoerd hebben, medegedeeld, en een overzicht der merkwaardige rotatie-dispersie dezer zouten gegeven.

Het voor deze proeven benoodigde racemische zout werd op de volgende wijze gewonnen. Eene 3 $^0/_0$-oplossing van $Na_3RhoCl_6 + 9H_2O$ werd op 40° C. verhit, en met eene 10 $^0/_0$ $KOH$-oplossing neergeslagen. Er werd zóoveel der base toegevoegd, totdat de vloeistof eene zwak alkalische reactie vertoonde. Door herhaaldelijk decanteeren in hooge cylinderglazen wordt het neerslag, dat zeer langzaam bezinkt, zoo goed mogelijk van de overtollige base bevrijd, en daarna met iets meer dan de berekende hoeveelheid *kaliumbimalonaat*: $KHC_3H_2O_4$, en wat vrij *malonzuur*, in een rondbodemkolf gedurende een 40-tal uren aan een terugvloeikoeler verhit, totdat het oorspronkelijke neerslag niet meer vermindert. De bovenstaande roode vloeistof wordt afgefiltreerd, en op het waterbad geconcentreerd; bij langzaam verdampen aan de lucht, zetten zich weldra roode, platte kristallen van het complexe malonaat af, die ter volledige zuivering uit weinig water omgekristalliseerd werden. Het in de kolf achtergebleven neerslag wordt met andere *rhodium*-resten weder op $Na_3RhoCl_6, 9H_2O$ verwerkt, en dit dan opnieuw als boven gepraecipiteerd.

§ **2.** Na vele pogingen gelukte het ons, om dit zout, dat in fraaie monokliene kristallen kristalliseert [2]), in zijne beide optisch-actieve komponenten te splitsen, en wel met behulp van het *cinchonine*-zout.

---

[1]) F. M. JAEGER, deze Verslagen, 26. 183. (1917).

[2]) *loco citato*.

Daartoe werd het racemische *kalium*zout eerst in het overeenkomstige *barium*zout omgezet, hetgeen geschiedde door aan eene sterke oplossing van 2 molekulen van het kaliumzout, zulk eene van 3 molekulen *bariumchloride* toe te voegen, waarbij zich een geel, in heet water vrij goed oplosbaar neerslag vormt; door toevoeging van 97 % alkohol kan praktisch al het bariumzout uit de oplossing gepraecipiteerd worden. Dit bariumzout werd nu in water van 50° C. opgelost, en daaraan eene eveneens op 50° C. verwarmde oplossing van één aequivalent *cinchonine-sulfaat* toegevoegd [1]). De oplossingen mogen niet te geconcentreerd zijn, aangezien anders een deel van het *cinchonine-rhodium-malonaat* zou neerslaan, welke verbinding toch maar in bescheiden mate oplosbaar is. Het gevormde bariumsulfaat wordt voorzichtig afgezogen, en door wasschen met water van 45° alle eventueel meegesleept, lichtgeel gekleurd *cinchonine*-zout aan het neerslag onttrokken. Reeds na staan gedurende een etmaal in eene groote kristalliseerschaal, beginnen zich fraaie, in rosetten gegroepeerde lichtgele naalden van het éene *cinchonine*-zout af te zetten, en wel, zooals spoedig bleek, van dat van den *links*draaienden komponent. Na telkenmalig indampen der moederloog op het waterbad kunnen de achtereenvolgende fractie's afzonderlijk verzameld en onderzocht worden. De drie eerste fractie's bleken alle den *linkschen* komponent te leveren; de vierde fractie leverde den bijna zuiveren *rechts*draaienden komponent, de vijfde en zesde fractie's gaven terstond de zuivere *rechtsche* antipode. Op te merken is hier, dat zoowel het *cinchonine-l-malonaat* als het *cinchonine-d-malonaat* beide *rechts*draaiend zijn, niettegenstaande de sterke tegengestelde specifieke rotatie der daarin aanwezige komplexe ionen.

Wij hebben ons van dit zonderlinge feit door opzettelijke contrôle vergewist, namelijk door uit de voor deze polarimetrische proeven gebezigde *cinchonine*-zouten, weer de *kalium-rhodium-malonaten* in vrijheid te stellen, en ons er van te overtuigen, dat de verkregen zouten inderdaad rechts-, en links-draaiend waren.

Ook werd uit het *linksche* kaliumzout door bemiddeling van het *barium*zout, nog eens het *cinchonine-l-rhodium-malonaat* bereid, en

---

[1]) Oorspronkelijk werd, evenals in het geval van het *kalium-rhodium-oxalaat*, getracht, om deze splitsing uit te voeren met behulp van het *strychnine*-zout. Echter bleek het niet mogelijk, op deze wijze eene scheiding in de optisch actieve komponenten te bewerkstelligen, aangezien ook bij zorgvuldig fractioneeren. het uit het *strychnine* zout door *joodkalium* vrijgemaakte *kalium-rhodium-malonaat*, steeds optisch-*in*actief bleek te zijn. Of hier racemisatie of partieele racemie in het spel is, is moeilijk te zeggen; eerst na het mislukken dezer pogingen werd tot het gebruik van *cinchonine* overgegaan.

de rotatie van het aldus verkregen zout gemeten; de verkregen resultaten stemden met de oorspronkelijk gevondene overeen.

Tenslotte werd nog de invloed van eene bijmenging van eene oplossing van *cinchonine* in aequivalente hoeveelheid (3 molekulen), aan eene oplossing van de optisch-actieve *malonaten* nagegaan, en de rotatie dezer oplossingen met die van het *cinchonine* zelf vergeleken; het bleek, dat de waargenomen rotatie der oplossing, b.v. in het geval van het *linksche kalium-rhodium-malonaat*, praktisch met die van het *cinchonine-l-rhodium-malonaat* overeenkwam; de invloed der drie molekulen *cinchonine* overtreft dus dien van het linksche *rhodiummalonaat*-ion aanzienlijk.

De laatste fractie's bij de uitkristallisatie van het *cinchonine*-zout eindelijk leverden zuiver *cinchonine*, terwijl eene kleine hoeveelheid van het rechtsche zout en eene zekere hoeveelheid van het racemische zout in de laatste moederloogen aanwezig bleven. Blijkbaar treedt er bij het herhaald indampen op het waterbad, evenals in het geval van het overeenkomstige *oxalaat*, eene gedeeltelijke hydrolyse in.

De analyse leerde, dat het *cinchonine-d-rhodium-malonaat* met 3 $H_2O$ kristalliseert; het overeenkomstige zout van het *l-rhodium-malonaat* met $^1/_2\, H_2O$. Hooger dan 100° C. kon dit laatste zout niet verhit worden, daar het minder stabiel dan het rechtsche schijnt te zijn, en al spoedig onder bruinkleuring ontleed wordt.

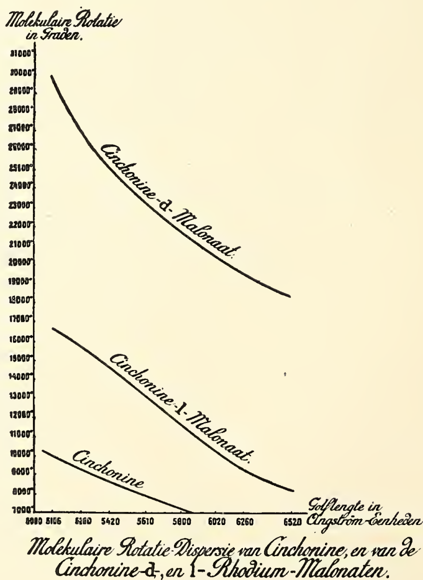
Voor de rotatie-dispersie van beide *cinchonine*-zouten werden de volgende waarden gevonden:

| I. CINCHONINE-*d*-RHODIUM-MALONAAT (+ 3 $H_2O$). | | |
|---|---|---|
| Golflengte in Angström-Eenheden: | Waargenomen rotatie in graden: | Molekulaire rotatie in graden: |
| 5105 | + 1°,37 | + 30010° |
| 5260 | 1,23 | 26943 |
| 5420 | 1,14 | 24972 |
| 5610 | 1,07 | 23406 |
| 5800 | 0,99 | 21686 |
| 6020 | 0,94 | 20591 |
| 6260 | 0,88 | 19277 |
| 6520 | 0,84 | 18400 |

De gebezigde oplossing bevatte 0,3070 gram van het waterhoudende zout in 100 gram vloeistof.

| II. Cinchonine-*l*-rhodium-malonaat (+ ½ $H_2O$). | | |
|---|---|---|
| Golflengte in Angström-Eenheden: | Waargenomen rotatie in graden: | Molekulaire rotatie in graden: |
| 5105 | + 0°,65 | + 16647° |
| 5260 | 0,61 | 15622 |
| 5420 | 0,57 | 14598 |
| 5610 | 0,52 | 13384 |
| 5800 | 0,45 | 11525 |
| 6020 | 0,40 | 10244 |
| 6260 | 0,36 | 9220 |
| 6520 | 0,32 | 8195 |

De gebruikte oplossing bevatte 0,2538 gram waterhoudend zout in 100 grammen der vloeistof.




Molekulaire Rotatie-Dispersie van Cinchonine, en van de Cinchonine-d-, en l-Rhodium-Malonaten.

Fig. 1.

De hier verkregen resultaten zijn grafisch weergegeven in fig. 1. Zij leert, dat de *beide* krommen *boven* die van het zuivere *cinchonine* gelegen zijn, niettegenstaande het feit, dat het eene zout het sterk negatief draaiende complexe *rhodium-malonaat*-ion bevat; van eene eenvoudige superpositie der werkingen is dus geen sprake.

De omzetting der *cinchonine*-zouten in de overeenkomstige *kalium*-zouten geschiedde op de volgende wijze. Het zuivere *cinchonine*-zout wordt met ongeveer tien maal zijn gewicht aan fijngepoederd joodkalium saamgewreven, en eene geringe hoeveelheid water toegevoegd. Men laat het mengsel gedurende een etmaal bij kamertemperatuur aan zich zelf over, waarna de geelgekleurde vloeistof van het ontstane neerslag zoo scherp mogelijk afgezogen wordt. De roodgele, heldere oplossing wordt nu met 97 °/₀-alkohol neergeslagen, waardoor een lichtgeel praecipitaat van het *kalium-rhodium-malonaat* ontstaat, dat uit weinig water wordt omgekristalliseerd. Bij het indampen op het waterbad racemiseert zich het zout niet merkbaar. Het is aan te bevelen, om bij de omzetting van het *cinchonine*-zout met kaliumjodide zoo weinig mogelijk water toe te voegen, daar anders de praecipitatie met alkohol te onvolledig geschiedt.

§ **3**. De optisch-actieve zouten zijn, evenals zulks reeds voor het racemische zout gold, buitengewoon oplosbaar, doch in nòg hoogere mate dan het laatste; bij gewone temperaturen stelt de racemische vorm dus zeker wel de stabielere fase voor in vergelijk met de optisch-actieve komponenten, en is dus eene spontane splitsing van de racemische verbinding wel van te voren uitgesloten.[1]) De oplossingen hebben eene fraaie oranje- tot bloedroode kleur. Van deze zouten werden nu voor eene geheele reeks van golflengten de rotatie's bepaald, waarbij voor beide antipoden eene volkomen overeenstemming in de absolute waarden der waargenomen draaïngen gevonden werd. De concentratie der hier gebezigde oplossingen moest, ten einde de metingen over een grooter spectraalgebied te kunnen uitstrekken, wegens de intensieve absorptie van het licht in eene laag van 20 c.M. dikte, binnen wijdere grenzen gevarieerd worden. Uitgesproken absorptie-banden komen in het zichtbare spectrum niet voor, doch wel wordt dit naar beide zijden scherp afgesneden: eene 1,5 °/₀-ige oplossing laat licht door tusschen 5190 en 6800 A. E.; eene 0,75 °/₀-ige laat het geheele roode, gele, groene, en blauwe deel van het spectrum door tot 4870 A. E.; eene 0,37 °/₀-ige evenzoo tot

---

[1]) Cf.: F. M. Jaeger, The Principle of Symmetry, *Amsterdam*, (1917), p. 209, 219.

4420 A. E.; enz. Bij eene 1,48 %-ige oplossing waren deze grenzen: 5020 A. E. en 6900 A. E.

Voor de polarimetrische bepalingen werden oplossingen gebezigd, welke resp. 1,503 gram (*A*), 0,511 gram (*B*), en 0,305 gram (*C*) van het *links*draaiende, anhydrische zout op 100 gram vloeistof be-

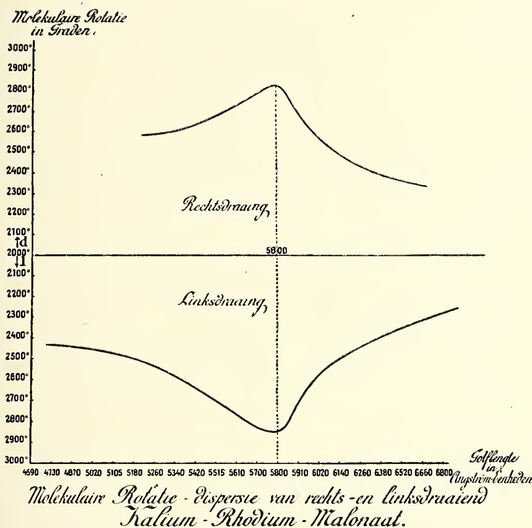
ROTATIE-DISPERSIE VAN LINKS- EN RECHTSDRAAIEND KALIUM-RHODIUM-MALONAAT.

| Golflengte in *A.E:* | Waargenomen (α) en Molekulaire (*M*) rotatie's bij het linksche zout. | | | | | | Waargenomen (α) en Molekulaire rotatie's (*M*) bij het rechtsche zout. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *A.* | | *B.* | | *C.* | | *D.* | |
| | α: | *M:* | α: | *M:* | α: | *M:* | α: | *M:* |
| 4730 | — | — | — | — | — 0°,19 | — 2436° | — | — |
| 4870 | — | — | — | — | 0,19 | 2436 | — | — |
| 5020 | — | — | — | — | 0,19 | 2436 | — | — |
| 5105 | — | — | — 0°,49 | — 2524° | — | — | — | — |
| 5180 | — | — | 0,49 | 2524 | 0,20 | 2564 | — | — |
| 5260 | — | — | 0,50 | 2575 | — | — | — | — |
| 5340 | — | — | 0,50 | 2575 | 0,20 | 2564 | + 0°,86 | + 2614° |
| 5420 | — 1°,50 | — 2621° | 0,51 | 2627 | — | — | 0,87 | 2645 |
| 5515 | 1,53 | 2673 | 0,52 | 2678 | 0,21 | 2692 | 0,88 | 2675 |
| 5610 | 1,59 | 2778 | 0,54 | 2781 | — | — | 0,90 | 2736 |
| 5700 | 1,61 | 2812 | 0,55 | 2833 | 0,22 | 2820 | 0,92 | 2797 |
| 5800 | 1,63 | 2847 | 0,56 | 2884 | — | — | 0,93 | 2827 |
| 5910 | 1,55 | 2708 | 0,53 | 2730 | 0,21 | 2692 | 0,89 | 2706 |
| 6020 | 1,47 | 2568 | 0,50 | 2575 | — | — | 0,85 | 2584 |
| 6140 | 1,44 | 2516 | 0,49 | 2524 | 0,20 | 2564 | 0,82 | 2493 |
| 6260 | 1,41 | 2463 | 0,48 | 2472 | — | — | 0,81 | 2462 |
| 6380 | 1,38 | 2410 | 0,47 | 2420 | 0,19 | 2436 | 0,74 | 2402 |
| 6520 | 1,35 | 2358 | 0,46 | 2369 | — | — | 0,78 | 2371 |
| 6660 | — | — | 0,45 | 2317 | 0,19 | 2436 | — | — |
| 6800 | — | — | — | — | 0,19 | 2436 | — | — |

vatten; bij het *rechts*draaiende zout werd eene oplossing gebruikt ($D$), waarin 0,804 °/₀ van het anhydrische zout aanwezig was. De resultaten dezer metingen zijn in de voorgaande tabel bijeengeplaatst, en in fig. 2 grafisch voorgesteld; zij zijn berekend op één grammolekuul van het anhydrische zout.

Uit fig. 2 is terstond het zeer merkwaardig verloop der dispersiekrommen herkenbaar, welke een maximum bij circa 5800 *A. E.* vertoonen.

Voor golflengten kleiner dan 5800 *A. E.* neemt dus de draaiing



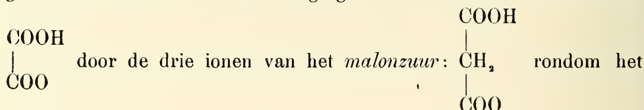

Molekulaire Rotatie - Dispersie van rechts- en linksdraaiend Kalium - Rhodium - Malonaat.

Fig. 2.

van het polarisatie-vlak met *aangroeiende* golflengte *toe,* voor zulke boven 5800 *A. E.* neemt zij, zooals gewoonlijk, met grooter wordende golflengten af. Het absorptie-spectrum vertoont echter in de nabijheid van 5800 *A. E.* geene enkele lijn of band. Dat deze anomale rotatiedispersie bij optisch-actieve lichamen onder die omstandigheden toch mogelijk is, wanneer de onderstelling gemaakt wordt, dat minstens twee soorten van werkzame ionen aanwezig zijn, schijnt ook theoretisch wel verklaard te kunnen worden [1]).

[1]) DRUDE, Lehrbuch der Optik, (1900), p. 382.

Behalve deze anomale rotatie-dispersie, welks algeheel karakter in schril contrast staat met den vorm van de regelmatige, alhoewel bij 5970 *A. E.* door de *nul*-waarde gaande rotatie-kromme van het overeenkomstige *oxalaat*, — blijkt ook de *absolute* activiteit dezer zouten in het algemeen aanzienlijk *kleiner* te zijn dan die der overeenkomstig-gebouwde *oxalaten*. De vervanging van de drie *oxaalzuur*-ionen



COOH | COO door de drie ionen van het *malonzuur*: COOH | $CH_2$ | COO rondom het

centrale *rhodium*-atoom, brengt derhalve eene zéér ingrijpende wijziging in de geaardheid der optische rotatie van het molekuul teweeg, welke niet slechts de grootte der molekulaire draaïing, maar ook haar voorteeken voor een aantal overeenkomstige golflengten geheel verandert.

De bijzondere chemische aard der dissymmetrisch rondom het centraal-atoom geplaatste substituenten blijkt dus voor de grootte der rotatie van niet minder belang te zijn, dan die van het centrale metaal-atoom zelf.

§ 4. Na vele pogingen gelukte het, om van de optisch-actieve zouten meetbare kristallen te verkrijgen.

De uit de eerste fractie's van het *cinchonine*-zout in vrijheid gestelde, linksdraaiende komponent, bleek, zooals gezegd werd, in water buitengewoon oplosbaar te zijn; de oplossingen vertoonden eene sterke neiging tot overzadiging.

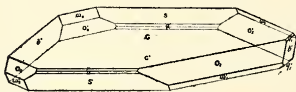


Fig. 3. *Linksdraaiend Kalium-Rhodium-Malonaat.*

Door deze omstandigheid werd de vorming van goed meetbare kristallen in hooge mate belemmerd; en zooals zulks in gevallen als deze meestal geschiedt, bleken de kristallen, die tenslotte nog verkregen konden worden, zeer slecht gebouwd te zijn. Wegens de aanwezige vicinaal-vlakken, leverden de meeste kristalvlakken meervoudige reflexen. De hoekwaarden vertoonden daardoor slingeringen van somtijds meer dan 30′, zoodat het den indruk maakte, alsof men hier met trikliene, asymmetrische kristallen te doen had. Echter leerde een herhaald onderzoek, in verbinding met de verkregen optische gegevens, dat het zout in het monokliene stelsel kristalliseert, en wel in niet met hun spiegelbeeld dekbare vormen. Overigens is de analogie in assenverhouding van dit optisch-actieve zout eenerzijds, en van het racemische anderzijds,

onmiskenbaar, zooals blijkt, als men in onze vroegere metingen de $a$- en $c$-assen van plaats doet wisselen [1]).

*Monoklien-domatisch.*

$$a : b : c = 1,0637 : 1 : 1,1667.$$

$$\beta = 85^{\circ}27^{1}/_{4}{}'.$$

*Waargenomen vormen*: $c = \{001\}$, vóórheerschend, en meestal sterk glanzend; $b' = \{0\bar{1}0\}$, breed en glanzend; $b = \{010\}$, zeer smal, soms ontbrekend, en steeds goede reflexen leverend; $o_1 = \{111\}$, breed en glanzend; $\omega_1 = \{\bar{1}11\}$, smaller dan $o_1$, en meervoudige reflexen gevend; $o_2 = \{1\bar{1}1\}$, en $\omega_2 = \{\bar{1}\,\bar{1}\,1\}$, ongeveer even breed, en goede spiegelbeelden gevend; $s = \{\bar{1}01\}$, breed en lichtsterk, doch, als alle vlakken der orthodiagonaal-zône, veelal slingerende hoekwaarden vertoonend; $r = \{101\}$, niterst smal en lichtzwak; $a = \{100\}$, slechts even aangeduid, en meestal geheel ontbrekend; $q = \{021\}$, uiterst smal en lichtzwak. De habitus is die van hemimorf ontwikkelde, dnnne plaatjes parallel $\{001\}$, met geringe strekking in de richting der $b$-as.

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

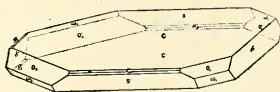
| *Hoekwaarden*: | | *Gemeten*: | *Berekend*: |
|---|---|---|---|
| $b' : \omega_2 = (0\bar{1}0) : (\bar{1}\,\bar{1}\,1) =$ | | *50° 46′ | — |
| $c : \omega_2 = (001) : (\bar{1}\,\bar{1}\,1) =$ | | *60 14 | — |
| $c : o_2 = (001) : (1\,\bar{1}\,1) =$ | | *55 45 | — |
| $c : a = (001) : (1\,0\,0) =$ | | 85 41 | 85° 27 1/4′ |
| $c : s = (001) : (\bar{1}\,0\,1) =$ | | 50 4 | 50 8 |
| $o_1 : \omega'_1 = (111) : (1\,\bar{1}\,1) =$ | | 64 5 | 64 . 1 |
| $s : \omega_2 = (\bar{1}01) : (\bar{1}\,\bar{1}\,1) =$ | | 39 23 | 39 14 |
| $q : c = (012) : (0\,0\,1) =$ | ca. | 31 0 | 30 11 |
| $b' : o'_2 = (0\bar{1}0) : (\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}) =$ | | 52 49 | 52 58 |

Op $\{001\}$ zijn de nitdoovingsrichtingen loodrecht en parallel ten opzichte der orthodiagonaal georienteerd. De kristallen zijn niet merkbaar dichroïtisch; de dnbbelbreking is zwak. Het optische assenvlak is $\{010\}$, met zwakke, geneigde dispersie; eene as treedt op $\{001\}$ aan den rand van het gezichtsveld uit.

---

1) F. M. JAEGER, deze Verslagen **26**, 184; (1917). Dáár was $a' : b : c' = 1,0783 : 1 : 1,2309$; en $\beta = 86^{\circ}\,36'$.

Voor het overeenkomstige rechtsdraaiende zout, is de kristalvorm in fig. 4 afgebeeld.


Fig. 4. *Rechtsdraaiend Kalium-Rhodium-Malonaat.*

Het soortelijk gewicht der kristallen bij 18° C. was $d_{4^0} = 2,317$; het molekuul-volume is dus: 238,76, en de topische parameters worden: $\chi : \psi : \omega = 6,1471 : 5,7790 : 6,7423$. De analyse leerde, dat het zout $1\frac{1}{2}$ mol. $H_2O$ bevat; door langdurige verhitting op 120° C. wordt het zout onder bruinkleuring ontleed.

Wanneer men het soortelijk gewicht van het racemische zout tevens in aanmerking neemt, hetwelk bij 18° C. bepaald werd op: $d_{4^0} = 2,251$, (mol.-volume = 257,80), dan blijkt bij vergelijking [1]) met het overeenkomstige *kalium-rhodium-oxalaat*, dat de vervanging van het *oxaalzuur* door het *malonzuur*, zoowel bij de racemische als bij de optisch-actieve verbinding tot eene verkleining van de topische parameters in twee, doch tot eene vergrooting daarvan in de derde hoofdrichting van het kristal voert.

In elk geval is door het voorgaande onderzoek bewezen, dat ook de zouten van het complexe *rhodium-trimalonzuur* in optisch-actieve modificatie's kunnen gesplitst worden, en dat daarbij de waargenomen verschijnselen in overeenstemming zijn met PASTEUR's wet in haar volsten omvang.

*Laboratorium voor Anorganische en Physische Chemie der Rijks-Universiteit.*

*Groningen*, Juni 1918.

---

[1]) De topische parameters voor het *racemische malonaat* worden, na omwisseling van de *a*- en *c*-as, derhalve: $\chi : \psi : \omega = 6,2484 : 5,7947 : 7,1329$.

**Scheikunde.** — De Heer F. M. JAEGER biedt, mede namens den Heer W. THOMAS, eene mededeeling aan over: „*Onderzoekingen over* PASTEUR'S *Beginsel omtrent het Verband tusschen Molekulaire en Kristallonomische Dissymmetrie:* **VII**. *Over Optisch-actieve Zouten der Triaethyleendiamine-Chromi-reeks.*

**§ 1.** Reeds vroeger werd vastgesteld [1]), dat het *racemische triaethyleendiamine-chromi-chloride*: $\{Cr(Aeine)_3\}Cl_3 + 3H_2O$, volkomen isomorf is met de overeenkomstige *kobalti-*, en *rhodium*-verbindingen.

Deze stof werd volgens eene door PFEIFFER [2]) aangegeven methode uit het overeenkomstige *tripyridyl-chromi-chloride*: $\{Cr(Pyr.)_3\}Cl_3$, door verhitten met aethyleendiamine bereid, en door omkristalliseeren gezuiverd. Vervolgens werd zij met behulp van het *natrium*zout van *a-nitro-kamfer* in de optische antipoden gesplitst [3]), en deze in den vorm van het *jodide* in zuiveren toestand verkregen. Voor de splitsing werden 6 gram van het racemische zout in 20 cm³ water opgelost, en daaraan eene oplossing van 6 gram zuiver *natrium-d-kamfernitronaat* in 15 cm³ water toegevoegd.

Er ontstaat daarbij een lichtgeel praecipitaat van *d-triaethyleendiamine-chromi-d-kamfernitronaat*; aan de afgezogen moederloog worden nog 2 gram van het *kamfernitronzuur natrium*-zout toegevoegd, waardoor zich na eenige uren nog meer van het praecipitaat afzet.

De moederloog werd na filtratie op den overeenkomstigen linksdraaienden component verwerkt. Het met alkohol en aether goed uitgewasschen praecipitaat werd met weinig water en een overmaat van fijngepoederd *natriumjodide* saamgewreven, nog een weinig water toegevoegd, en de donkergele vloeistof afgezogen van het praecipitaat, dat goed met alkohol en aether uitgewasschen werd, vervolgens in zeer weinig water opgelost, en nog eens met behulp van een overmaat van natriumjodide werd neergeslagen. De bovengenoemde moederloog van het *kamfernitronzure* zout werd eerst met 5 gram *natriumjodide* gepraecipiteerd. Het goed gewasschen neerslag bleek het *racemische jodide* te zijn. De overgebleven moederloog werd nu op overeenkomstige wijze met 8 gram joodnatrium behandeld; het nu verkregen praecipitaat was inderdaad het *links*draaiende *triaethy-*

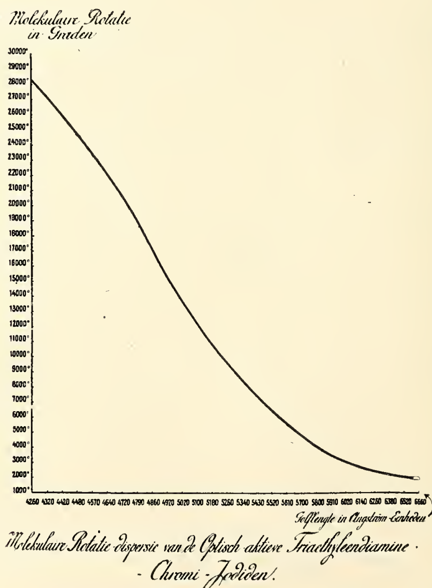
[1]) F. M. JAEGER, deze Verslagen, **26**. 154. (1917).

[2]) P. PFEIFFER, Zeits. f. anorg. Chemie, **24**. 282, 286. (1900).

[3]) A. WERNER, Ber. d deutsch Chem. Ges. **45**. 865. (1912).

*leendiamine-chromi-jodide.* Het is lastig, deze jodiden in goed meetbare kristallen te verkrijgen, en deze zijn steeds zeer klein.

§ **2**. De rotatie-dispersie dezer zouten werd op de in het voorgaande reeds meermalen vermelde wijze bepaald. Wegens de lichtabsorptie der oranjekleurige oplossingen, die in eene laag van 20 cM. dikte reeds spoedig vrij aanzienlijk is, moesten de metingen voor de uiterste golflengten verricht worden met zeer verdunde oplossingen. Deze metingen stemmen met die aan meer geconcentreerde oplossingen goed overeen, zoodat van de aan alle oplossingen gemeten waarden der moleculaire rotatie, de middelwaarde kon aangenomen worden. Voor den rechtsdraaienden component werden drie oplossingen gebruikt, die resp. 1,0139 gram, 0,5070 gram, 0,2535 gram, en 0,0325 gram anhydrisch zout in 100 gram der oplossing bevatten ($A$, $B$, $C$ en $D$); voor den linksdraaienden component bevatten de zes gebezigde oplossingen achtereenvolgens 1,3512 gram, en de helft, resp. een vierde gedeelte daarvan op 100 gram




*Molekulaire Rotatie-dispersie van de Optisch aktieve Triaethyleendiamine-Chromi-Jodiden.*

Fig. 1.

ROTATIE-DISPERSIE VAN DE OPTISCH-AKTIEVE TRIAETHYLEENDIAMINE-CHROMI-JODIDEN.

| *Golflengte in A. E.:* | *Waargenomen rotatie:* | | *Moleculaire rotatie:* (positief en negatief) |
|---|---|---|---|
| 4260 | 0°.30 | (*D*) | 28263° |
| 4320 | 0 29 | *id.* | 27321 |
| 4420 | 0.27; 0.35 | (*D, K*) | 25385 |
| 4480 | 0.26; 0.34 | *id.* | 24552 |
| 4570 | 0.25; 0.33 | *id.* | 23619 |
| 4640 | 0.23; 0.31 | *id.* | 22053 |
| 4720 | 0.22; 0.29 | *id.* | 20858 |
| 4790 | 0.20; 0.28; 0.27 | (*D, I, K*) | 18652 |
| 4860 | 0.18; 0.26; 0.24 | *id.* | 17610 |
| 4920 | 0.16; 0.23; 0.21 | *id.* | 15128 |
| 5020 | 0.14; 0.40; 0.21 | (*D, H, I*) | 13267 |
| 5100 | 0.97; 0.36; 0.18 | (*C, H, I*) | 11714 |
| 5180 | 0.88; 0.32; 0.16 | *id.* | 10579 |
| 5260 | 1.60; 0.79; 1.07 | (*B, C, G*) | 9647 |
| 5340 | 1.43; 0.71; 0.95 | *id.* | 8578 |
| 5430 | 1.27; 0.64; 0.84 | *id* | 7634 |
| 5520 | 1.12; 0.57; 1.46; 0 72 | (*B, C, F, G*) | 6692 |
| 5610 | 0.96; 0.48; 1.22; 0.62 | *id.* | 5741 |
| 5700 | 1.63; 0.81; 0.41; 2.18 | (*A, B, C, E; F, G*) | 4891 |
| 5800 | 1.33; 0.67; 0.33; 1.85 | *id.* | 4093 |
| 5910 | 1.15; 0.56; 0 28; 1.55 | *id.* | 3422 |
| 6020 | 0.96; 0.47; 0.24; 1.30 | *id.* | 2912 |
| 6140 | 0.86; 0.43; 0.22; 1.16 | *id.* | 2621 |
| 6260 | 0.77; 0.38; 0.19; 1.04 | *id.* | 2328 |
| 6380 | 0.70; 0.35; 0.18; 0.94 | *id.* | 2133 |
| 6520 | 0.65; 0.32; 0.16; 0.88 | *id.* | 1951 |
| 6660 | 0.61; 0.30; 0.15; 0.82 | *id.* | 1820 |

Voor deze laatste golflengten zijn alleen de rotatie's v. d. oplossingen *A, B, C,* en *E* vermeld.

oplossing (*E, F, G*), alsook 0,0927 gram, 0,0464 gram, en 0,0232 gram van het zout per 100 gram oplossing (*H, I, K*).

De dispersie-kromme voor de molekulaire rotatie, zooals deze uit de bovengenoemde getallen volgt, is in fig. 1 weergegeven. Zij heeft veel gelijkenis met die van de overeenkomstige *kobalti-zouten*, daarentegen weinig analogie met die der *triaethyleendiamine-rhodium*-verbindingen.

Waarschijnlijk hangt de grootte der rotatie voor dezelfde golflengten, bij deze analoog geconstitueerde complexe ionen nauw samen met de grootte van het *atoom-volume* van het centrale metaal-atoom, in dier voege, dat de rotatie des te *grooter* is, naarmate het atoomvolume van het metaal *kleiner* is; zoo b.v.:

| Zout: | Moleculaire rotatie: | Atoomvolume van het metaal: |
|---|---|---|
| {Co (Aeine)$_3$} $I_3 + H_2O$. | $M_{5800} = 7230°$; $M_{5100} = 21580°$; $M_{6600} = 2114°$ | 6.76 |
| {Cr (Aeine)$_3$} $I_3 + H_2O$. | $M_{5800} = 4093°$; $M_{5100} = 11714°$; $M_{6600} = 1880°$ | 7.72 |
| {Rho(Aeine)$_3$} $I_3 + H_2O$. | $M_{5800} = 3125°$; $M_{5100} = 3965$ ; $M_{6600} = 2243°$ | 8.50 |

De waarden voor $M_{6600}$ zijn echter tevens gegeven, om te doen inzien, dat dit anti-parallelgaan van rotatie en atoomvolume toch geenzins voor *alle* golflengten geldt: voor de stralen van *groote* golflengte, — zoo b.v. reeds in het zichtbare rood, — overtreft de rotatie van het *Rho*-zout zelfs die van de beide andere zouten; alleen in het gebied, waar de rotatie-dispersie zeer aanzienlijk is, wordt de bedoelde regelmatigheid aangetroffen.

Wat de absorptie betreft, zoo werd daaromtrent het volgende vastgesteld: in eene 20 cM. dikke laag liet

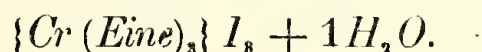
eene oplossing, die 1,1212 $^0/_0$ zout bevatte, alle roode en gele stralen door tot 5380 A.E.
„ „ „ 0,5606 $^0/_0$ „ „ , evenzoo „ 5220 A.E.
„ „ „ 0,2803 $^0/_0$ „ „ „ „ 5030 A.E.
„ „ „ 0,1402 $^0/_0$ „ „ „ „ 4850 A.E.
„ „ „ 0,0701 $^0/_0$ „ „ „ „ 3940 A.E.

§ **3**. Talrijke pogingen werden gedaan, om deze *chromium*-zouten in goed meetbare kristallen te verkrijgen, ten einde aldus de geldigheid van Pasteur's wet ook in dit geval vast te stellen.

Behalve in de gemakkelijke ontleedbaarheid dezer verbindingen in oplossing, vooral onder medewerking van het licht, doch óók reeds in het duister, — was een bezwaar ter bereiking van dit doel vooral gelegen in de groote oplosbaarheid dezer zouten, waardoor, bij de

geringe hoeveelheden der componenten, steeds met kleine volumes der oplossing gewerkt moest worden, waaruit zich kristallen moeilijk in volkomen staat plegen af te zetten. Om dezelfde reden was ook de omzetting van het jodide in het bromide of chloride hier van geen nut, zoodat deze, juist in de andere gevallen zoo belangrijke halogeniden, in dit geval daardoor evenmin voor het onderzoek in aanmerking konden komen.

### Racemisch Triaethyleendiamine-Chromium-Iodide.



$\{Cr\,(Eine)_3\}\,I_3 + 1\,H_2O.$

De verbinding vertoont, bij zeer langzame kristallisatie, den vorm van kleine, oranjeroode, schijnbaar octaëdrische kristalletjes. De kristallisatie moet in het donker geschieden, omdat ook dit zout, evenals alle *triaethyleendiamine-chromi*-zouten, onder den invloed van het licht donker violet wordt, terwijl ook temperatuursverhooging der oplossing vermeden moet worden, aangezien deze een overgang der oranjekleurige zouten dezer reeks, in die van de violetkleurige *aquo*-zouten bevordert.

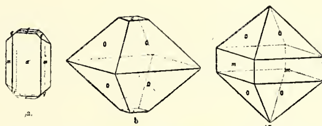


Fig. 2. *Racemisch Triaethyleendiamine-Chromi-Iodide.* ($+ H_2O$).

De gemeten kristalletjes waren niet grooter dan een speldeknop, en soms op vreemde wijze vervormd. Enkele vertoonden mikroskopisch het beeld van fig. 2*a*, zonder dat het mogelijk was de Miller'sche symbolen der vormen met zekerheid te bepalen; meetbare kristalletjes vertoonden de vormen, die in fig. 2*b* en *c* afgebeeld zijn.

*Rhombisch-bipyramidaal.*

$a : b : c = 0{,}8632 : 1 : 0{,}8652.$

De kristallen zijn pseudo-tetragonaal en volkomen isomorf met die der overeenkomstige *kobalti*-[1]), en die der *rhodium*-verbinding[2]), evenals zulks vroeger reeds voor het trigonaal-kristalliseerende *chloride*, dezer reeks[3]) werd vastgesteld. De kleur der kristallen was oranje-

---

1) F. M. Jaeger, deze Verslagen, **23**. 1305. (1915).

2) F. M. Jaeger, deze Verslagen, **26**. 158. (1917)

3) F. M. Jaeger, deze Verslagen, **26**. 154, 155. (1917).

rood; door gedeeltelijk waterverlies worden ze soms geel en ondoorzichtig.

De waargenomen vormen zijn: $o = \{111\}$, groot en zeer glanzend; $c = \{001\}$, klein, doch duidelijk ontwikkeld en goede reflexen leverend; $m = \{110\}$, breed, doch gewoonlijk met afgeronde en rudimentaire kristalvlakken, en praktisch niet nauwkeurig meetbaar. Waarschijnlijk komt soms nog een vorm $q = \{021\}$ voor, en bij de kristallen van fig. $2a$ ongetwijfeld, $a = \{100\}$, als breede afplatting, alsmede een vorm $r = \{h\,o\,k\}$.

| *Hoekwaarden*: | *Gemeten*: | *Berekend*: |
|---|---|---|
| $c : o = (001) : (111) =$ | *52° 56′ | — |
| $o : o = (111) : (1\bar{1}1) =$ | 62 49 | — |
| $o : o = (111) : (11\bar{1}) =$ | 74 10 | 74° 8′ |
| $o : o = (111) : (\bar{1}11) =$ | 74 27 | 74 19 |

Geen uitgesproken splijtbaarheid.

Aan de volkomen isomorfie met het overeenkomstige *Co*- en *Rho*-zout is geen twijfel:

*Cr*-verbinding . . . . . $a : b : c = 0{,}8632 : 1 : 0{,}8652$.
*Co*-verbinding . . . . . $a : b : c = 0{,}8700 : 1 : 0{,}8699$.
*Rho*-verbinding . . . . $a : b : c = 0{,}8541 : 1 : 0{,}8632$.

Tot nu toe waren wij, wegens gemis aan goede kristallen, niet in de gelegenheid, om het bestaan van deze isomorfie ook te bewijzen bij de optische antipoden van dit zout en die van het overeenkomstige *kobalt*- of *rhodium*-zout. Aan het bestaan dezer isomorfie behoeft echter, na alle tot dusverre opgedane ervaringen, wel niet getwijfeld te worden.

*Groningen*, Juni 1918.

*Anorganisch en Fysisch-Chemisch Laboratorium der Rijks-Universiteit.*

---

**Scheikunde**. — De Heer Ernst Cohen biedt, mede namens den Heer C. G. Hetterschy eene mededeeling aan over: „*De invloed van druk op de oplosbaarheid van stoffen*". (5e Mededeeling).

(Deze Mededeeling zal verschijnen in een volgend Zittingsverslag).

**Scheikunde.** — De Heer ERNST COHEN biedt een mededeeling aan van de Heeren H. R. KRUYT en JAC. VAN DER SPEK: „*Bijdrage tot de kennis van het verfproces*". (Tweede mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH).

1. In een vorige mededeeling [1] is er op gewezen van hoeveel belang het is voor de juiste interpretatie van het verfproces om over meer gegevens te beschikken ten aanzien van den invloed van neutrale zouten op de hoeveelheid kleurstof, die onder bepaalde omstandigheden gebonden wordt. Als eerste oriënteering werd met elk van drie kleurstoffen (methyleenblauw, kristalviolet en auramine) één reeks adsorptiebepalingen aan kool gedaan bij aanwezigheid van aequimoleculaire hoeveelheden resp. der zouten NaCl, NaBr, $NaNO_3$, $Na_2SO_4$ en $Na_2HPO_4$ of van schoon water.

Wij hebben dit onderzoek thans uitgebreid door van drie basische kleurstoffen bij aanwezigheid van telkens een der bovengenoemde zouten de adsorptie-isotherm te bepalen, door daar vier punten van vast te leggen.

2. De proeven werden als volgt verricht. De kleurstof werd in 2 L. water, onder verwarming op het waterbad, opgelost en ten overvloede gefiltreerd. De sterkte dezer uitgangsoplossing werd daarna vergeleken met die eener zure kleurstof, die voor titratie volgens PELET en GARUTI [2]) geschikt was. Wij hebben methyleenblauw getitreerd met kristalponceau, kristalviolet met natriumpikraat, fuchsine met naphtolgeel S.

Met elke kleurstof werden vier series van zes proeven gedaan, n.l. vijf onder toevoeging van een der genoemde zouten en één proef met alleen water. Het totaal volume bedroeg steeds 100 ccm., daarvan was steeds 20 cM. zoutoplossing van 20 m.mol p. L. (concentratie na vermenging dus 4 m.mol per L.), en voorts in de series achtereenvolgens 50, 60, 70 en 80 ccm. der uitgangs-kleurstofoplossing, terwijl het verdere volume eventueel met water werd aangevuld. Als adsorbens diende 250 m.g. bloedkool (MERCK, „mit Säuren

[1]) H. R. KRUYT en Mej J. E. M VAN DER MADE, Deze Verslagen 26, 247 (1917).

[2]) PELET en GARUTI, Bull. de la Soc. vaudoise des sc. nat. **43**, 1 (1907).

gereinigt"), waarvan wij een afzonderlijke portie speciaal voor het loopende onderzoek in een stopflesch bewaarden.

De series werden des namiddags ingezet (onder alle voorzorgen voor gelijke behandeling, telkens ontvette en uitgestoomde flesschen, enz.); af en toe werd omgeschud, de analyse geschiedde den volgenden morgen. Een gedeelte werd door centrifugeering van het adsorbens gescheiden, en daarvan 10 ccm. getitreerd; deze analysen verrichtten wij in duplo, doordat ieder van ons beiden een titratie uitvoerde. Onze resultaten stemden steeds uitstekend overeen.

De gebruikte kleurstoffen waren van de volgende herkomst:

Kristalviolet } van
Methyleenblauw B extra ($ZnCl_2$vrij) } Kahlbaum.

Fuchsine, Magentarood van Dr. Grübler.

De zouten waren alle praeparaten van Kahlbaum, zorgvuldig

TABEL I.

Adsorptiebepalingen van methyleenblauw aan kool in tegenwoordigheid van electrolyten. 100 ccm vloeistof. 0.250 gr. kool. Kamertemperatuur.

| Aanvangs-conc. methyleenblauw Gram per L. | Eindconc. methyleenblauw, Gram per L. | Geadsorb. methyleenblauw, Gram p. Gram kool | Aanvangs-conc. methyleenblauw, Gram per L. | Eindconc. methyleenblauw, Gram per L. | Geadsorb. methyleenblauw, Gram p. Gram kool |
|---|---|---|---|---|---|
| Alleen water | | | **NaCl**, 4 m. mol per L. | | |
| 1.25 | 0.34 | 0.364 | 1.25 | 0.32 | 0.371 |
| 1.50 | 0.54 | 0.381 | 1.50 | 0.48 | 0.405 |
| 1.75 | 0.77 | 0.391 | 1.75 | 0.72 | 0.411 |
| 2.00 | 1.00 | 0.398 | 2.00 | 0.95 | 0.418 |
| **NaBr**, 4 m. mol per L. | | | **$NaNO_3$**, 4 m. mol per L. | | |
| 1.25 | 0.24 | 0.405 | 1.25 | 0.19 | 0.425 |
| 1.50 | 0.39 | 0.442 | 1.50 | 0.32 | 0.469 |
| 1.75 | 0.61 | 0.456 | 1.75 | 0.56 | 0.476 |
| 2.00 | 0.84 | 0.462 | 2.00 | 0.79 | 0.483 |
| **$Na_2SO_4$**, 4 m. mol per L. | | | **$Na_2HPO_4$**, 4 m. mol per L. | | |
| 1.25 | 0.32 | 0.371 | 1.25 | 0.28 | 0.388 |
| 1.50 | 0.49 | 0.401 | 1.50 | 0.44 | 0.422 |
| 1.75 | 0.74 | 0.405 | 1.75 | 0.67 | 0.432 |
| 2.00 | 0.96 | 0.415 | 2.00 | 0.89 | 0.442 |

TABEL II.

Adsorptiebepalingen van kristalviolet aan kool in tegenwoordigheid van electrolyten. 100 ccm vloeistof. 0.250 gr. kool. Kamertemperatuur.

| Aanvangs-conc. kristal-violet Gram per L. | Eindconc. kristalviolet Gram per L. | Geadsorb. kristalviolet Gram per Gram kool | Aanvangs-conc. kristal-violet Gram per L. | Eindconc. kristalviolet Gram per L. | Geadsorb. kristalviolet Gram per Gram kool |
|---|---|---|---|---|---|
| Alleen Water | | | $NaCl$, 4 m. mol per L. | | |
| 1.00 | 0.47 | 0.209 | 1.00 | 0.42 | 0.232 |
| 1.20 | 0.62 | 0.228 | 1.20 | 0.58 | 0.247 |
| 1.40 | 0.78 | 0.247 | 1.40 | 0.74 | 0.262 |
| 1 60 | 0.97 | 0.251 | 1.60 | 0.91 | 0.273 |
| $NaBr$. 4 m. mol per L. | | | $NaNO_3$, 4 m. mol per L. | | |
| 1.00 | 0.36 | 0.256 | 1.00 | 0.33 | 0.270 |
| 1.20 | 0.54 | 0.262 | 1.20 | 0.49 | 0.281 |
| 1.40 | 0.67 | 0.270 | 1.40 | 0.66 | 0.294 |
| 1.60 | 0.88 | 0.285 | 1.60 | 0.84 | 0.300 |
| $Na_2SO_4$, 4 m. mol per L. | | | $Na_2HPO_4$, 4 m. mol per L. | | |
| 1.00 | 0.40 | 0.240 | 1.00 | 0.38 | 0.247 |
| 1.20 | 0.57 | 0.251 | 1.20 | 0.57 | 0.251 |
| 1.40 | 0.73 | 0.266 | 1.40 | 0.72 | 0.270 |
| 1.60 | 0.89 | 0.281 | 1.60 | 0.91 | 0.273 |

gedroogd vóór de inweging; het $Na_2HPO_4$ was bewaard in een exsiccator boven 30 % zwavelzuur en werd ingewogen als $Na_2HPO_4$ 12 aq.

De uitkomsten der onderzoekingen zijn in de tabellen I, II en III weergegeven, alsmede in de figuren 1, 2 en 3.

3. Bij deze tabellen dient het volgende opgemerkt te worden. Het eindpunt der titratie met natriumpikraat is moeilijk vast te stellen in de verdunde oplossingen van kristalviolet, die na de adsorptie gemeten moeten worden. Daardoor is het verloop der curven voor kristalviolet minder vloeiend en is die voor phosphaat niet getrokken, maar zijn slechts de punten als staande kruisjes aangegeven. Men moet haar als bijna samenvallend beschouwen met die voor het sulfaat.

Bij de proeven met fuchsine en dinatriumphosphaat deed zich

TABEL III.

Adsorptiebepalingen van fuchsine aan kool in tegenwoordigheid van electrolyten. 100 ccm vloeistof. 0.250 gr. kool. Kamertemperatuur.

| Aanvangs-conc. fuchsine Gram per L. | Eindconc. fuchsine Gram per L. | Geadsorb. fuchsine Gram per Gram kool | Aanvangs-conc. fuchsine Gram per L. | Eindconc. fuchsine Gram per L. | Geadsorb. fuchsine Gram per L. Gram kool |
|---|---|---|---|---|---|
| Alleen Water | | | NaCl, 4 m. mol per L. | | |
| 1.00 | 0.27 | 0.290 | 1.00 | 0.25 | 0.297 |
| 1.20 | 0.42 | 0.304 | 1.20 | 0.41 | 0.313 |
| 1.40 | 0.62 | 0.307 | 1.40 | 0.60 | 0.317 |
| 1.60 | 0.81 | 0.310 | 1.60 | 0.76 | 0.330 |
| NaBr, 4 m. mol per L. | | | $NaNO_3$, 4 m. mol per L. | | |
| 1.00 | 0.22 | 0.310 | 1.00 | 0.17 | 0.330 |
| 1.20 | 0.36 | 0.330 | 1.20 | 0.33 | 0.343 |
| 1.40 | 0.55 | 0.337 | 1.40 | [0.52 | 0.346] |
| 1.40 | 0.72 | 0.346 | 1.60 | 0.66 | 0.370 |
| $Na_2SO_4$, 4 m. mol per L. | | | $NaH_2PO_4$, 4 m. mol. per L. | | |
| | | | 1.00 | 0.24 | 0.300 |
| Het $Na_2SO_4$ in deze concentratie | | | 1.20 | 0.40 | 0.317 |
| doet de kleurstof neerslaan. | | | 1.40 | 0.58 | 0.323 |
| | | | 1.60 | 0.75 | 0.337 |

een onregelmatigheid bij de titratie voor. Werd getitreerd tot er bij de „Tupf"-reactie een gele ring zichtbaar was rondom de purperroode lakvlek, dan werd deze ring na enkele oogenblikken door een lichtroode kleur overdekt. Het alkalische *di*natriumphosphaat scheen ons, in verband met de vorming van leukobasis, de oorzaak van het verschijnsel en inderdaad bleef de nakleuring uit als *mono*natriumphosphaat werd toegevoegd, wat dan ook bij de definitieve proeven is geschied. Bij een mengsel van 4 ccm. di- tegen 6 ccm. mononatriumphosphaat, dat juist neutraal is [1]), trad het verschijnsel der nakomende ringen eveneens op.

Bij het onderzoek met fuchsine moest de reeks met $Na_2SO_4$ uitgeschakeld worden, omdat de kleurstofoplossing bij toevoeging van dit zout in een concentratie van 4 m. mol per L. troebel wordt.

[1]) Vgl. Kolthoff, Pharm. Weekbl. **53**, 396 (1916).

4. Behoudens een kleine omwisseling bij die curven, welke vlak bij elkaar liggen, zijn deze uitkomsten in overeenstemming met die uit de vorige mededeeling. Zij bevestigen ten volle de conclusie, dat

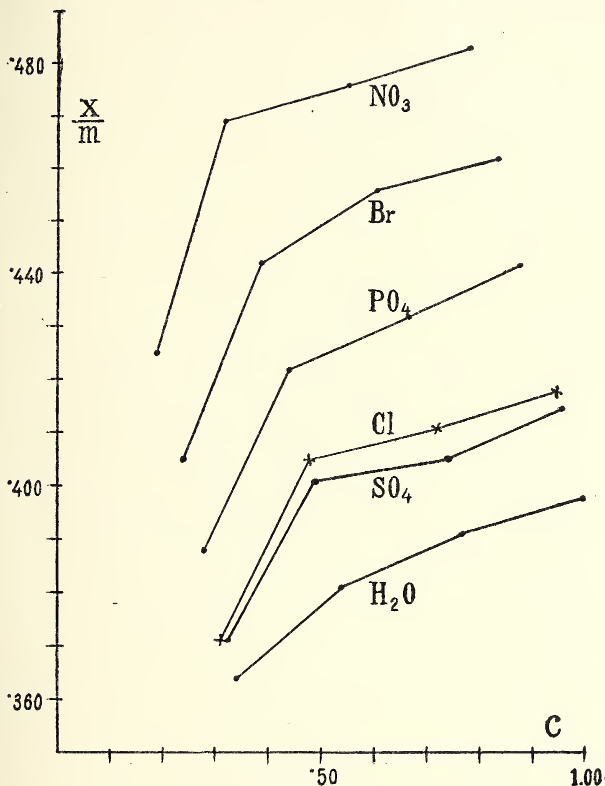



Fig. 1.
Adsorptie-isotherm van **methyleenblauw** aan kool in tegenwoordigheid van natriumzouten.

niet de *electrovalentie* alleen van het toegevoegde ion, dat tegengesteld geladen is ten opzichte van het kleurstofion, beslissend is voor de opneming van kleurstof. Ongetwijfeld speelt hier de lyotrope volgorde der ionen eveneens een rol, zoodat eenerzijds de volgorde

Cl—Br—$NO_3$ voor den dag komt, anderzijds $SO_4$ en $PO_4$ tengevolge hunner electro-adsorptieve positie een plaats innemen, hooger dan met hun lyotrope positie overeenkomt. Beide factoren doen dus hun invloed gevoelen, maar deze onderzoekingen, met kool als adsorbens, vestigen den indruk, dat de lyotrope invloeden de andere overheerschen.

5. Wij hebben vervolgens onderzoek gedaan met wol als adsorbens.
Uitgegaan werd van regeeringswol, die slechts een voorloopige wassching ondergaan had. Wij hebben verschillende waschwijzen op deze wol toegepast en in verband daarmede telkens vergelijkende

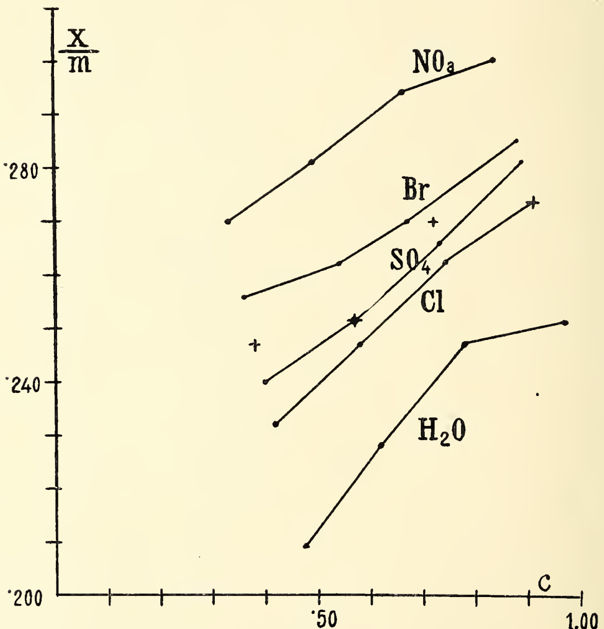



Fig. 2.
Adsorptie-isotherm van **kristalviolet** aan kool in tegenwoordigheid van natriumzouten.

adsorptiebepalingen verricht. Ten slotte gaven wij de voorkeur aan de volgende behandelingswijze: Een portie wol werd tweemaal in lauw water met zuiver natriumoleaat gewasschen, tusschen beide

wasschingen in werd in koud gedistilleerd water gespoeld. Zij werd vervolgens gedroogd boven den radiator der centrale verwarming, uitgeplozen, nogmaals in lauw zeepsop gewasschen, vele malen gespoeld in koud gedistilleerd water, gedroogd en verder bewaard boven 35 pCt. zwavelzuur, opdat zij een vochtgehalte zou hebben, dat behoort bij lucht van normale vochtigheid.

De verfproeven werden verricht geheel overeenkomstig de vorige

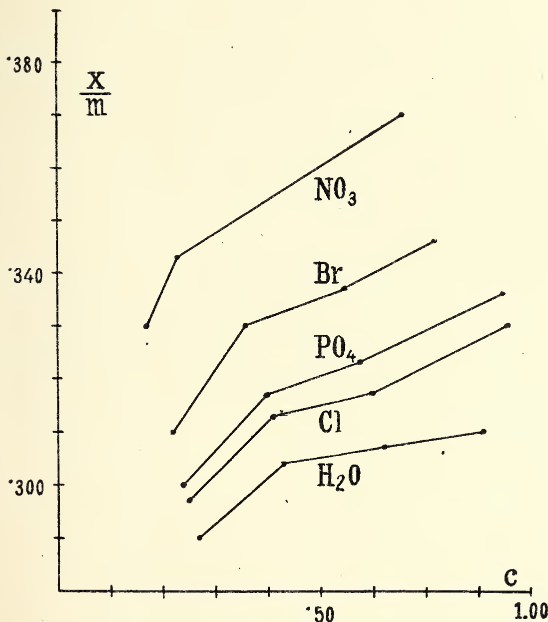
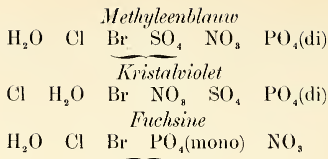



Fig. 3.
Adsorptie-isotherm van **fuchsine** aan kool in tegenwoordigheid van natriumzouten.

onderzoekingen met kool; alleen werd, in verband met de zwakkere adsorptieve kracht van wol uitgegaan van verdundere oplossingen en werd telkens 1,000 gram wol ingewogen.

De uitkomsten dezer proeven zijn in Tabel IV weergegeven.

Deze uitkomsten leeren ons, dat de volgorde der adsorptie hier is:


*Methyleenblauw*

$H_2O$ Cl Br $SO_4$ $NO_3$ $PO_4$(di)

*Kristalviolet*

Cl $H_2O$ Br $NO_3$ $SO_4$ $PO_4$(di)

*Fuchsine*

$H_2O$ Cl Br $PO_4$(mono) $NO_3$

TABEL IV.

Adsorptiebepalingen van kleurstoffen aan wol in tegenwoordigheid van electrolyten. 100 ccm vloeistof. 1 gram wol. Kamertemperatuur.

| Toegevoegd zout 4 m. mol per L. | Aanvangsconc. kleurstof Gram per L. | Eindconc. kleurstof Gram per L. | Geadsorbeerde kleurstof Gram p. Gram wol |
|---|---|---|---|
| | Methyleenblauw | | |
| alleen water | 0.78 | 0.52 | 0.26 |
| NaCl | 0.78 | 0.51 | 0.27 |
| NaBr | 0.78 | 0.50 | 0.28 |
| $NaNO_3$ | 0.78 | 0.49 | 0.29 |
| $Na_2SO_4$ | 0.78 | 0.50 | 0.28 |
| $Na_2HPO_4$ | 0.78 | 0.36 | 0.42 |
| | Kristalviolet [1] | | |
| alleen water | 0.67 | 0.32 | 0 35 |
| NaCl | 0.67 | 0.33 | 0.34 |
| NaBr | 0.67 | 0.30 | 0.37 |
| $NaNO_3$ | 0.67 | 0.28 | 0.39 |
| $Na_2SO_4$ | 0.67 | 0.27 | 0.40 |
| $Na_2HPO_4$ | 0.67 | bijna volkomen ontkleurd | 0.67 |
| | Fuchsine | | |
| alleen water | 0.67 | 0.37 | 0.30 |
| NaCl | 0.67 | 0.34 | 0.33 |
| NaBr | 0.67 | 0.32 | 0.35 |
| $NaNO_3$ | 0.67 | 0.30 | 0.37 |
| $NaH_2PO_4$ | 0.67 | 0.32 | 0.35 |

[1]) Getitreerd met naphtolgeel, dat beter voldoet voor de titratie dan natriumpikraat.

Daaruit kan men besluiten, dat ook bij wol-adsorptie de lyotrope invloed zich superponeert over den invloed der electrovalentie, zij het ook, dat de laatste hier meer op den voorgrond treedt. Bij het kristalviolet bv. is de volgorde zoo, dat men een volkomen valentie-opvolging heeft (merkwaardigerwijze werkt NaCl de opneming der kleurstof hier tegen). Bij methyleenblauw daarentegen overtreft het nitraat het sulfaat, bij fuchsine zelfs het phosphaat, waarbij intusschen het ontbreken eener alkalische reactie niet zonder invloed zal zijn.

6. Samenvattend kan dus vastgesteld worden, dat deze nadere onderzoekingen uitgewezen hebben, dat de theorie van Pelet-Jolivet geen volledig beeld van het verfproces geeft. Het verfproces heeft niet een uitsluitend electro-adsorptief karakter en men kan den invloed van een toegevoegd ion niet uitsluitend beoordeelen naar zijn valentie. Integendeel kan onder omstandigheden het lyotrope karakter van het ion van veel grooter invloed zijn dan zijn valentie. Dit bevestigt de vroeger uitgesproken onderstelling, dat naast een electro-adsorptie zich een zuivere adsorptie afspeelt, die, als zuiver capillair verschijnsel, lyotroop geïnfluenceerd wordt door toegevoegde zouten. Bovendien is gebleken, dat bij proeven als de hier behandelde, de volgorde der verschijnsels aan kool en aan wol vrij belangrijk verschillen kan.

De onderzoekingen worden voortgezet.

*Utrecht.* van 't Hoff-*Laboratorium.*

---

**Meteorologie.** — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van de Heeren Dr. C. SCHOUTE, F. A. VAN HEYST en N. E. GROENEVELD MEIJER over: *„Een instrument ten dienste van den bestuurder van vliegtuigen voor de meting van verticale snelheden".*

(Mede aangeboden door den Heer HAGA).

Het is in veel gevallen van beteekenis, dat de bestuurder van een vliegtuig beschikt over directe aanwijzingen van de snelheid, met welke zijn machine stijgt of daalt, en in de meeste dier gevallen is het van meer gewicht de verticale snelheden te kennen t.o. van de middenstof, de lucht, dan t.o. van de aarde. Dit laatste geldt vooral, waar men de snelheid van stijging of daling wenscht te kennen, om de uitwerking te kunnen beoordeelen van het hoogteroer, zoowel in verband met de veiligheid van de vlucht, als waar het er op aankomt, dat een hoogteverandering zoo snel of zoo langzaam mogelijk tot stand komt.

De wijze, waarop de verticale snelheid wordt bepaald, berust meestal op meting van de snelheid waarmee de luchtdruk varieert. Hiertoe kan men met een bepaalde tusschenpooze barometeraflezingen verrichten. In dat geval echter mist men het voordeel van de momentwaarde. Of men meet de snelheid van de luchtdrukverandering met behulp van den z.g. variometer, bestaande uit een vat, dat door een nauwe opening of capillaire buis met de buitenlucht in gemeenschap staat en daarenboven voorzien is van een zijbuis in welke zich een vloeistofkolom naar binnen of naar buiten verplaatst, naarmate in het vat bij hoogtewisselingen, ondanks het daarin aanwezige „lek", een onderdruk of een overdruk ontstaat.

Bij deze op luchtdruk-verandering berustende metingen worden de verticale snelheden niet t.o. van de middenstof bepaald, en zijn de uitkomsten bovendien niet onafhankelijk van de hoogte, waarop ze worden verricht, zoodat in het algemeen correcties en dikwijls aanzienlijke correcties moeten worden aangebracht.

Bij een andere wijze van meten, n.l. die met behulp van verticaalschoepen-anemometers treedt dit laatste bezwaar niet op. Het ligt voor de hand, aan de mogelijkheid te denken, de met een dergelijken anemometer verkregen rotatie-snelheid langs electrischen weg (met

behulp van een dynamo-anker, dat op de as wordt aangebracht) de aanwijzingen te doen geven. Vooral, omdat deze bij voorkeur aanwijzingen op afstand moeten zijn, aangezien de anemometer een opstelling eischt in zooveel mogelijk ongestoorde lucht, welke men onmiddelijk vóór den bestuurder in het algemeen niet zal vinden. Bij de meting echter van verticale bewegingssnelheden langs dezen weg zou de in den anemometer onvermijdelijk optredende wrijving, die vooral bij den sterken zijdelingschen druk als gevolg van de snelle verplaatsing niet klein kan zijn, storend werken. Het verband tusschen de verticale snelheid ($V_v$) en het aantal omwentelingen per tijdseenheid ($N$) is bij benadering weer te geven door de betrekking

$$V_v = A + B\ N$$

waarin $A$ en $B$ constante grootheden voorstellen. In alle gevallen waarin $V_v$ kleiner is dan A zal de anemometer stilstaan. Verder zal het reeds niet eenvoudig zijn, te zorgen dat de draaiingsas van den anemometer steeds verticaal gericht blijft.

Bij het instrument, waarvan hier de beschrijving volgt, en dat door ons *scansimeter* werd genoemd, zijn met behoud van de voordeelen van den verticaal-anemometer de genoemde bezwaren vermeden.

Daartoe is gebruik gemaakt van de meting van electrische stroomen, welke worden opgewekt in een dynamo anker, aangebracht op een as, die, inplaats van verticaal gericht te zijn, volgens de verplaatsingsrichting van het vliegtuig wordt gesteld, nl. de verplaatsingsrichting van het vliegtuig t. o. van de lucht, welke verder als stilstaande kan worden behandeld. Deze instelling zoowel als het in beweging zetten van de draaiingsas wordt bereikt door aan het achtereinde der as een luchtschroef aan te brengen, die bij de snelle beweging door de lucht door reactie tot draaien wordt gebracht, en daarbij aan de behoorlijk uitgebalanceerde as den juisten stand geeft.

Het was praktisch voldoende, daartoe de as te bevestigen, draaibaar om een lijn, loodrecht op de lengteas van het vliegtuig welke lijn bij vlak liggen, in zijdelingschen zin, van het toestel, horizontaal is; een vereenvoudiging die op grond uitsluitend van het voordeel in de constructie werd aangebracht. In hetgeen volgt is deze lijn steeds als horizontaal behandeld, hetgeen niet tot fouten van eenige beteekenis aanleiding geeft.

De totale verplaatsingssnelheid van het vliegtuig $V_t$ laat zich geheel analoog aan hetgeen bij den verticaal-anemometer werd gezegd bij benadering weergeven door

$$V_t = A + BN$$

In dit geval is de invloed van de wrijvingsconstante $A$ veel geringer,

aangezien $V_t$ steeds groot is, zoodat men door te zorgen dat de as tusschen kogellagers licht loopt (de zijdelingsche druk van den verticaal-anemometer ontbreekt bovendien) kan bereiken, dat het aantal omwentelingen per tijdseenheid $N$ bij benadering evenredig is met $V_t$.

Teneinde nu in het genoemde dynamo-anker stroomen op te wekken, die een maat zijn, niet van de totale snelheid t. o. van de lucht, doch van de verticale componente van deze grootheid, $V_v = V_t \sin \alpha$ (fig. 1), is het magnetisch veld, waarin het dynamo-anker draait op een bijzondere wijze aangebracht, en wel zóó, dat de richting van het veld, dat we ons eenvondigheidshalve homogeen denken, steeds horizontaal blijft, en bovendien evenwijdig aan het verticale vlak door de draaiingsas.

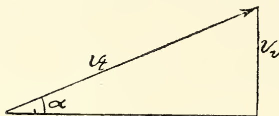


Fig 1

Om dit te kunnen verwezenlijken werden bij het eerste model gleuven gemaakt in de beenen van den permanenten magneet, die de magnetische kracht moest leveren. Deze magneet werd verder draaibaar om een horizontale lijn opgehangen, en wel zóó, dat de krachtlijnen steeds horizontaal gericht bleven. Door de draaiingsas door deze gleuven te voeren, werd mogelijk gemaakt, dat bij horizontaal vliegen de draaiingsas evenwijdig was aan de magnetische krachtlijnen, terwijl bij een stijging of daling de as met de veldrichting een hoek maakte, overeenkomende met $\alpha$ in fig. 1.

Bij latere uitvoering zijn twee magneten gebruikt in plaats van één, evenwijdig aan elkaar ter weerszijden van de draaiingsas opgesteld. In beide gevallen werd gezorgd, dat de horizontale as, om welke de magneet draaibaar was, samenviel met die, om welke de ankeras zich volgens de verplaatsingsrichting instelde.

Is de rotatie-as $AA$ (fig. 2) evenwijdig aan de krachtlijnen, dan zal in de uiteinden van een winding $W$ bij draaiing geen spannings-

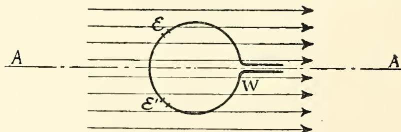


Fig 2

verschil optreden. Tegenover de electromotorische kracht toch, die in een bepaald element $\varepsilon$ van de winding wordt opgewekt, staat

een even groote E. M. K. in tegengestelden zin, opgewekt in het element $\varepsilon'$, dat t. o. van de as in spiegelbeeld-positie ligt.

Maakt de richting van de as $AA$ met de krachtlijnen een hoek $\alpha$ (fig. 3), dan zal in de winding $W$ een spanning optreden, die evenredig is, behalve met de snelheid van draaiing en met de veld-

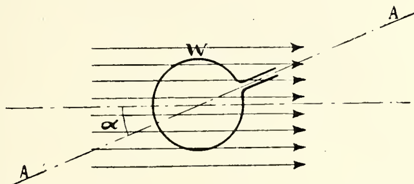



Fig 3

sterkte, met $\sin \alpha$. Men kan het magneetveld beschouwen als de resultante van twee velden, het eene gericht volgens de draaiingsas en het tweede evenwijdig aan het verticale vlak door de as en loodrecht staande op die as, welke velden zich in sterkte verhouden als $\cos \alpha : \sin \alpha$. Van deze beide kan alleen het laatste stroom leveren in $W$.

Zal bij verandering van den hoek $\alpha$ de in $W$ opgewekte spanning evenredig met $\sin \alpha$ varieeren, dan moet als eisch worden gesteld, dat het magnetische veld bij verandering van den relatieven stand van draaiingsas en magneetveld onveranderd blijft. Om dit te bereiken moet men 1°. voor de draaiingsas een niet-magnetisch materiaal kiezen, en 2°. indien men niet op de homogeniteit van het veld wil vertrouwen, en van een weekijzeren kern gebruik maakt, aan deze kern den bolvorm geven.

Door het combineeren van de door reactie draaiende schroefas met anker, en de hier in beginsel beschreven „sinusdynamo" bereikt men, dat in het anker stroomen worden opgewekt, die zoowel met de totale snelheid $V_t$ van fig. 1 als met den sinus van den hoek $\alpha$ waaronder het vliegtuig stijgt of daalt evenredig zijn, zoodat deze stroomsterkten een directe aanwijzing geven op afstand van de verticale snelheid, welke aanwijzing op de middenstof betrekking heeft en niet afhankelijk is van de hoogte van waarneming of van eenige met het vliegtuig samenhangende grootheid, zoodat geenerlei correctie behoeft te worden aangebracht.

In fig. 4 is de inrichting van een dergelijke sinusdynamo schematisch weergegeven. Aan het bolvormige anker A is de eenvoudigste

uitvoering gegeven: alle windingen $W$ zijn in twee evenwijdige cirkelgroeven ter weerszijden van de as $aa$ ingebed. In den magneet

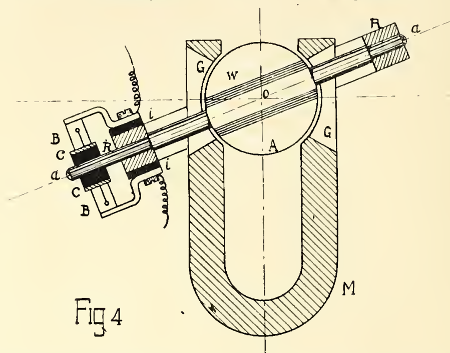


Fig 4

$M$ zijn gleuven $G$ gemaakt, die de as toestaan verschillende standen in te nemen t. o. van den magneet, waarbij de as draaibaar is om $O$, het punt, dat tevens de horizontale as bepaalt om welke de magneet draaibaar is. Aangezien alleen bij gelijkstroom de richting van de beweging kenbaar is, zoodat tusschen stijgen en dalen is te onderscheiden, is een tweedeelige collector $C$ aangebracht, met de borstels $B$, geisoleerd ($i$) aan het raam $R$ bevestigd.

De scansimeter is in fig. 5 schematisch weergegeven.

Behalve de in fig. 4 met overeenkomstige symbolen aangeduide onderdeelen, ziet men in deze figuur de schroef $S$, kogellagers $K$, en het cirkelvormig geteekende, naar de zijkanten licht geweltde omhulsel *Omh.* *Ga* is, hetgeen te zien is van de gaffel, waarin de gemeenschappelijke as van den magneet en van het raam $R$ draaibaar is.

Voor de meting der in de dynamo opgewekte stroomen wordt een meetinstrument gebruikt, dat vóór den bestuurder is aangebracht, en waarvoor men bij voorkeur een specialen vorm zal kiezen, zóó dat aan een stijging of daling van het vliegtuig eveneens een stijging of daling van den wijzer beantwoordt. Meters van het gebruikelijke Desprez-d'Arsonval-type waren voor deze waarnemingen zeer geschikt.

Om te voorkomen dat de proportionaliteit van den uitslag met de draaisnelheid door ankerterugwerking wordt gestoord, is het gewenscht, de stroomsterkte zoo klein mogelijk te houden, hetgeen men bereikt door aan de metingen meer het karakter van spanningsmetingen te geven, dan van stroommetingen, dus den weerstand van de ankerwikkelingen klein te nemen in vergelijking met dien van het

meetinstrument. Aan den anderen kant is het, om te grooten invloed van overgangsweerstanden uit te sluiten, gewenscht, aan de ankerwindingen een weerstand te geven die niet minder dan 10 à 20 Ohm bedraagt.

Omtrent het verloop van de voorbereidende proeven met dit instrument genomen kan het volgende worden opgemerkt.

Nadat de draaiingsas van den scansimeter in het laboratorium zuiver horizontaal was gesteld en de evenwichtsstand van den magneet zóó was geregeld, dat bij draaiing van de as geen stroom werd opgewekt, kon aan een der exemplaren (andere vertoonden dit effekt in mindere mate of niet) een stroom worden opgewekt, naar ver-

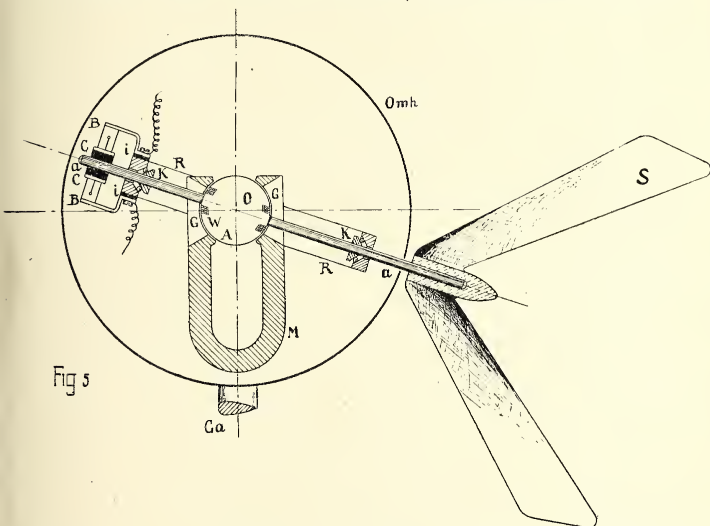


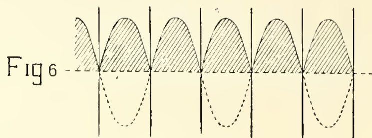
Fig 5

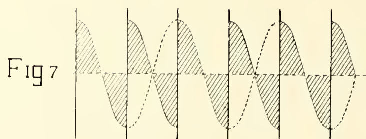
kiezing in elk van beide richtingen, door uitsluitend in den borstelstand verandering te brengen, door z.g. borstelverschuiving dus. Dit op het eerste gezicht verrassende verschijnsel kon als volgt worden verklaard [1]).

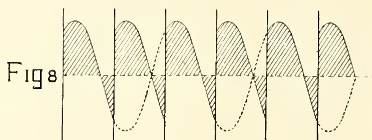
Klaarblijkelijk is in dit geval het magneetveld niet voor te stellen

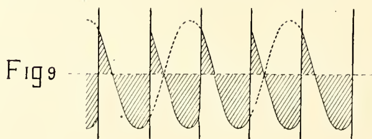
[1]) We mogen hierbij wel afzien van den invloed der ankerreactie omdat deze bij de zwakke stroomen in het anker waarmee gewerkt werd zeer klein was. Overigens verandert door het in rekening brengen dezer terugwerking slechts weinig aan de redeneering.

als de resultante van twee velden, één volgens de as en één ander evenwijdig aan het verticale vlak door de as en loodrecht op de as staande, maar moet men nog een derde componente aannemen, die we horizontaal gericht en loodrecht op de as kunnen denken. Heeft men aan de borstels den stand gegeven, waarbij de componente in het verticale vlak tot volle uiting komt, waarbij dus de stroomwisseling plaats heeft op de oogenblikken, waarop de spanning tusschen de collectorhelften nul is (fig. 6), dan is het effect van de horizontale componente loodrecht op de as juist nul, omdat voor




deze componente de stroomwisseling optreedt op het oogenblik waarop de opgewekte E.M.K. haar grootste absolute waarde heeft (fig. 7). Draait men nu den collector t.o. van de windingen of de borstels t.o. van het magneetveld, dan is deze horizontale componente niet langer inactief, zoodat men een stroom, naar verkiezing in elke richting, kan doen optreden (fig. 8 en 9).

Het scheeve in het veld, dat dit exemplaar vertoonde, kan gemak-

kelijk optreden indien de centreering van de ankerkern binnen de poolschoenen te wenschen overlaat, zoowel zijdelings als in de richting van de as, hetgeen bij een luchtspleet, die niet meer dan enkele tiende millimeters bedraagt, licht het geval kan zijn. Uit deze verklaring blijkt, hetgeen de proef bevestigde, dat bij den juisten relatieven stand van collector en windingen een dergelijke scheefheid niet tot fouten in de meting aanleiding geeft.

Eenige moeilijkheid gaf het vinden van een gunstigen vorm en van de geschikte materialen die een ongestoord afnemen van den stroom aan den collector gedurende langen tijd achtereen toelieten. Zeer hoog zijn in één opzicht de eischen niet: schommelingen in de stroomsterkte ten bedrage van 1 °/₀ door weerstandverandering aan den collector zullen in de praktijk zonder bezwaar zijn toe te laten. Daartegenover staat, dat de betrouwbaarheid van de werking verzekerd moet zijn bij een minimum van nazien en contrôle. Door de collectormiddellijn niet grooter te maken dan enkele m.M. en door als materiaal voor collector en collectorveeren zilver te nemen, werd een wijze van stroom afnemen verkregen, die zonder smering langen tijd achtereen zeer goed voldeed.

Het is niet te vermijden, dat de vrijhangende magneet bij toevallige versnellingen en vertragingen in de lucht kleine schommelingen begint uit te voeren, of dat het raam dat de schroefas draagt om zijn draaipunt min of meer oscilleert. Om te voorkomen dat de wijzer onder invloed van zulke schommelingen hinderlijk bewegelijk was, werd aan den stroommeter de eisch gesteld, dat de instelling langzaam zou zijn, waartoe door demping een over-aperiodische instelling werd gegeven, terwijl de schommelingen van den magneet zoo kort mogelijk werden gemaakt, waarbij door een mechanische wrijving zooveel demping werd aangebracht, als met den eisch van een zuivere instelling vereenigbaar was.

Werd het instrument zijdelings aan het vliegtuig bevestigd buiten den „schroefwind", ongeveer te halverhoogte tusschen de twee draagvlakken van een tweedekker, dan deed zich het verschijnsel voor, dat bij horizontaal vliegen een vrij sterke stijging werd aangewezen, terwijl een stijging sterk overdreven en een daling niet of nauwelijks tot uiting kwam. Deze verschuiving in de richting van een stijging, die in de aanwijzingen in meerdere of mindere mate op een aantal plaatsen aan het vliegtuig werd waargenomen, is het gevolg van luchtstroomen welke bij verplaatsing van het vliegtuig door de lucht door reactie optreden. Aan het eind van den vleugel, op eenigen afstand buiten het vliegtuig aangebracht, gaf het instrument natuurgetrouwe aanwijzingen. Bij dien stand echter was de invloed van

schokken en stooten in de beweging hindelijker, dan bij een meer centrale opstelling.

Het zou een waardevol resultaat zijn, indien met behulp van dit instrument een systematisch onderzoek kon worden ingesteld naar de verticale snelheden van deze in de nabijheid van een vliegtuig in vlucht optredende reactiestroomingen.

Het is zeer te betreuren, dat in ons land de gelegenheid ontbreekt, om de ijking van de scansimeterschaal in een kunstmatigen luchtstroom uit te voeren. De bekendheid verondersteld van de electrische weerstanden, de sterkte van het magneetveld en de gevoeligheid van den stroommeter, komt deze ijking neer op een onderzoek naar de draaisnelheid van de luchtschroef bij verschillende snelheden t. o. van de lucht. Sinds de op kleine schaal opgezette „luchttunnel" in het Aerodynamisch Laboratorium van de Kon. Nederl. Vereeniging voor Luchtvaart buiten werking moest worden gesteld, kan een dergelijke ijking hier te lande niet worden verricht.

**Meteorologie.** — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer S. W. VISSER: „*Over de Buiging van het Licht bij de vorming van Halo's. II. Onderzoek naar de kleuren, die bij halo's worden waargenomen*".

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

In de eerste mededeeling over de buiging van het licht bij de vorming van halo's [1]) werd een overzicht der waargenomen kleuren gegeven op pag. 1330, ontleend aan „Onweders, Optische verschijnselen enz. in Nederland".

Prof. Dr. E. VAN EVERDINGEN deelde me evenwel mede, dat deze opgaven zeer onvolledig zijn, omdat lang niet alle kleurwaarnemingen in de „Onweders" verwerkt worden. Op zijn verzoek heb ik een aantal berichten aan het Kon. Ned. Met. Inst. ingezonden, doorgewerkt. In de eerste plaats hoop ik hiermede een verzuim, tegen de getrouwe, vrijwillige waarnemers van het Instituut gepleegd, te hebben hersteld; in de tweede plaats leverde dit onderzoek waardevol materiaal op ter beantwoording van de vraag, in hoeverre en op welke wijze de buiging zich doet gelden bij de halovorming.

In het volgende wordt een overzicht gegeven van het onderzoek, en worden eenige beschouwingen gewijd aan de resultaten, waarbij zal blijken, dat inderdaad de buiging een belangrijke rol vervult bij de lichtbreking in ijskristallen.

Aangevangen werd met alle kleuropgaven uit de jaren 1913, '14 en '15. Later werd het onderzoek uitgebreid over de jaren 1910, '11 en '12. Het bleek bij het eerste gedeelte al spoedig, dat groote voorzichtigheid vereischt werd.

Als voorbeeld noem ik de berichten over „regenboogkleuren". In de 3 jaren 1913—'15 vind ik 12 maal „regenboogkleuren" vermeld door 9 waarnemers. Onder deze 9 zijn er evenwel 7, die in al dien tijd geen andere berichten inzonden. Zij hebben zich blijkbaar meer laten leiden door suggestie en fantasie dan waarnemingsvermogen. Ook het persoonlijk karakter treedt sterk op den voorgrond.

Daarom werd besloten een sterke schifting te houden, en alleen

---

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wet. XXV, p. 1328; 1917.

te gebruiken de berichten van hen, die als alleszins betrouwbare waarnemers bekend staan bij het Instituut. Zoo werden de opgaven verwerkt van elf waarnemers, die in het vervolg aangeduid zullen worden met de cijfers I tot XI. Weggelaten werden alle onvolledige berichten en die over de maan. Ter beschikking bleven 550 waarnemingen, aldus over de verschillende jaren verdeeld:

| | 1910 | 1911 | 1912 | 1913 | 1914 | 1915 | Som |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kleuropgaven | 125 (6) | 107 (7) | 114 (7) | 81 (8) | 66 (8) | 57 (7) | 550 |
| totaal | 473 | 480 | 399 | 283 | 325 | 377 | 2337 |
| °/₀ | 26 | 22 | 29 | 29 | 20 | 15 | 24 |

Tusschen haken is in de eerste rij het aantal waarnemers vermeld. De rij „totaal" vermeldt het totale aantal opgaven, volgens „Onweders enz.". Een vierde deel van alle opgaven levert vertrouwbare berichten.

Er worden 31 kleuren en kleurgroepen genoemd, waaronder drie zeer afwijkende (blauw, IX; violet, rood, VIII; rood, violet, groen, V). In de eerste mededeeling komen nog voor[1]) goudbruin (rood), geel, groen, violet (3 maal door 2 waarnemers); geel, violet; goudbruin, helwit, blauw.

Alle kleurwaarnemingen (verdeeld over de beide kringen, de bijzon, raakbogen en circumzenithaalboog) zijn opgenomen in tabel I. Een enkele waarneming van den boog van Lowitz is genoemd, maar niet medegeteld. (Zie tabel I volgende pag.)

Tusschen haken is telkens het aantal waarnemers vermeld.

Uit de tabel blijkt sterk het persoonlijke karakter.

144 waarnemingen van rood door 10 waarnemers (waaronder 115 van VII en IX) en 133 van oranje door 5 (waaronder 130 van V en X), waar in de meeste gevallen dezelfde kleur bedoeld is, wijzen duidelijk op de subjectieve waardeering van deze kleur. Hetzelfde komt uit in de groepen rood-wit en oranje-wit. Van dit persoonlijke oordeel geeft ook tabel II een beeld. (Zie tab. II pag. 130.

Alle kleuropgaven van ieder der waarnemers, afzonderlijk voor den gewonen kring, de bijzon en de raakbogen, zijn zonder meer in deze tabel opgenomen. Hieruit blijkt, dat de opgaven van V, VII en X tot groen beperkt blijven (van V is één waarneming van violet op een totaal van 158). III vermeldt ook blauw, maar nooit violet. VIII noteert noch groen, noch blauw, maar in 22 berichten 12 maal violet.

Dit verschijnsel, hoe belangrijk ook uit een physiologisch oogpunt, vermindert zeer de waarde der opgaven, maar zonder eenigen twijfel

[1]) l.c. p. 1330 e.v.

TABEL I.

| | kring 22 | byzon | raakbg. | kring 46 | C Z B | totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| wit | 51 (8) | 7 (3) | 1 (1) | — | — | 59 (8) |
| rood (bruin) | 119 (10) | 14 (3) | 9 (4) | 2 (2) | — | 114 (10) [1] |
| oranje | 123 (4) | 7 (2) | 3 (1) | — | — | 133 (5) |
| geel | 15 (6) | 4 (3) | 1 (1) | — | — | 20 (6) |
| blauw | — | — | — | 1 (1) | — | 1 (1) |
| rood, wit (bruin, wit) | 20 (6) | 8 (1) | 1 (1) | — | — | 29 (6) [2] |
| oranje, wit | 27 (1) | 1 (1) | 1 (1) | — | — | 29 (2) |
| geel, wit | 5 (2) | — | — | — | — | 5 (2) |
| rood, oranje | 4 (1) | — | — | — | — | 4 (1) |
| rood, geel (bruin, geel) | 10 (4) | 2 (1) | 1 (1) | — | — | 13 (6) [3] |
| rood, groen | 22 3) | 9 (5) | 5 (2) | — | 2 (2) | 38 (5) |
| rood, blauw | 10 (3) | 2 (1) | 2 (2) | 1 (1) | — | 15 (4) |
| rood, violet | 7 (1) | 2 (2) | 1 (1) | 1 (1) | — | 11 (2) |
| oranje, geel | 1 (1) | — | — | — | — | 1 (1) |
| oranje, groen | 1 (1) | — | — | — | — | 1 (1) |
| oranje, violet | — | 1 (1) | — | — | — | 1 (1) |
| violet, rood | 1 (1) | — | — | — | — | 1 (1) [4] |
| rood, oranje, wit | — | 1 (1) | — | — | — | 1 (1) |
| rood, geel, wit | 1 (1) | 1 (1) | 1 (1) | — | — | 3 (2) |
| rood, groen, wit | 1 (1) | — | — | — | — | 1 (1) |
| rood, oranje, groen | 1 (1) | — | — | — | — | 1 (1) |
| rood, oranje, violet | — | 1 (1) | — | — | — | 1 (1) |
| rood, geel, groen | 4 (3) | 2 (2) | 1 (1) | — | 4 (1) | 11 (3) [5] |
| rood, geel, blauw | 8 (3) | — | 1 (1) | — | — | 9 (4) |
| rood, geel, violet | 1 (1) | 1 (1) | — | — | — | 2 (2) |
| rood, groen, blauw | 3 (2) | — | 3 (2) | — | — | 6 (2) |
| rood, blauw, violet | — | — | 1 (1) | — | — | 1 (1) |
| rood, violet, groen | — | 1 (1) | — | — | — | 1 (1) |
| rood, geel, groen, blauw | — | — | 2 (2) | — | — | 2 (2) |
| rood, groen, blauw, violet | — | — | 1 (1) | — | — | 1 (1) |
| rd., or., gl., gr., bl., vi. | 1 (1) | 1 (1) | 1 (1) | — | 2 (1) | 5 (3) [6] |
| | 436 | 65 | 36 | 5 | 8 | 550 |

[1]) Waaronder bruin 10 (2).
[2]) „ bruin, wit 11 (3).
[3]) „ bruin, geel 3 (1).
[4]) 1911, 12 April: „aan den buitenkant roodachtig, van binnen violet". VIII. — 23 April meldt VIII: „aan de buitenzijde gewoon rood".
[5]) Hierbij is niet geteld een waarneming van een boog van Lowitz door Hissink, 1910, 7 Sept. te Zutphen.
[6]) De kleuren genoemd: 2 maal.
„Alle kleuren" 1 maal.
„Regenboogkleuren" 2 maal.

TABEL II.

| | Kring van 22° | | | | | | | Bijzon | | | | | | | Raakboog | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *w* | *r* | *o* | *g* | *g* | *b* | *v* | *w* | *r* | *o* | *g* | *g* | *b* | *v* | *w* | *r* | *o* | *g* | *g* | *b* | *v* |
| I | 1 | 3 | — | 4 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| II | — | 4 | — | 1 | — | — | — | — | 1 | — | — | 1 | — | — | — | 3 | — | — | — | 4 | — |
| III | 2 | 21 | — | 5 | 2 | 15 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 | — | 1 | 3 | 1 | — |
| IV | — | 1 | — | — | — | — | — | | 5 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | — | 1 | — | — | — | — | 1 |
| V | 61 | 44 | 82 | 13 | 23 | — | — | — | 6 | — | — | 6 | — | 1 | 2 | 5 | 1 | — | 4 | — | — |
| VI | 1 | 6 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — |
| VII | 23 | 60 | 1 | 8 | 4 | — | — | — | 5 | — | 2 | 2 | — | — | — | 5 | — | 1 | 2 | — | — |
| VIII | 2 | 13 | 1 | 2 | — | — | 8 | 1 | 3 | 3 | 1 | — | — | 3 | — | 1 | — | — | — | — | 1 |
| IX | 11 | 50 | — | 7 | 1 | — | — | 14 | 23 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 6 | — | 3 | — | 1 | — |
| X | 3 | 4 | 73 | 2 | 1 | — | — | 2 | 1 | 6 | 1 | 1 | — | — | — | — | 3 | 1 | — | — | — |
| XI | 1 | 7 | — | — | 1 | 2 | — | 1 | 1 | — | — | 1 | — | — | — | 5 | 1 | 2 | 4 | 5 | 2 |
| | 105 | 213 | 158 | 46 | 33 | 22 | 10 | 18 | 45 | 12 | 11 | 13 | 3 | 7 | 4 | 30 | 5 | 8 | 13 | 11 | 4 |

komen groene en blauwe kleurschakeeringen veelvuldig voor, zooals nader blijkt uit de percentages der afzonderlijke kleuren in het volgende tabelletje, waarbij bijzon en raakboog samen genomen zijn.

| | wit | rood | oranje | geel | groen | blauw | violet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kring 22° | 17.9 | 36.3 | 26.9 | 7.8 | 5.6 | 3.8 | 1.7 |
| bijzon, raakb. | 11.9 | 40.8 | 9.2 | 10.3 | 14.1 | 7.6 | 6.1 |

Zeer zeker zijn de getallen voor violet sterk geflatteerd (21 opgaven van violet, waaronder 12 van VIII). Zonder de opgaven van VIII zijn de percentages voor violet resp. ongeveer 0.3 en 3.8.

Duidelijk is de groote kleurenrijkdom van bijzon en raakboog [1]).

Door rood en oranje, groen, blauw en violet samen te tellen, worden de persoonlijke invloeden eenigszins opgeheven. Ik vind dan

| | wit | rood oranje | geel | groen blauw violet |
|---|---|---|---|---|
| kring 22° | 17.9 | 63.2 | 7.8 | 11.1 |
| bijzon, raakb. | 11.9 | 50.0 | 10.3 | 27.8 |

Tegenover een vermindering in wit en rood, staat een stijging

[1]) Zonder twijfel heb ik in de eerste mededeeling (pag. 1328) PERNTER eenigszins verkeerd begrepen. Het overheerschen van bepaalde kristalstanden toch moet in ieder geval van groote beteekenis zijn.

in de andere kleuren. In meer dan 1/4 van de gevallen wordt melding gemaakt van kleuren in de buurt van groen en blauw bij bijzon en raakboog. Dit is ook nog het geval bij 1 op de 9 gewone kringen, waarbij van kleur gewag gemaakt wordt.

Sommige kleuren en groepen komen betrekkelijk veel voor.

| | | |
|---|---|---|
| geel; geel, wit | 25 maal; | 6 waarnemers |
| rood, geel; rood, geel, wit | 16 „ | 6 „ |
| rood, groen; rood, blauw; rood, violet | 64 „ | 8 „ |
| rood, geel, groen; rood, geel, blauw; rood, geel, violet | 22 „ | 7 „ |
| rood, groen, blauw | 6 „ | 2 „ |
| Spectrumkleuren | 5 „ | 3 „ |

Groen, blauw en violet zijn weer, om subjectieve invloeden te ontgaan, samengevoegd. Een eigenaardige plaats neemt het geel in: gele kringen schijnen voor te komen. Dat het geel tusschen het rood en het groen zeer vaak ontbreekt, maar ook dikwijls voorkomt, staat vast.

Van de „regenboogkleuren" blijven over 6 jaar 5 waarnemingen over van 3 waarnemers.

Bijzondere vermelding verdienen de breedteschattingen van HEMMES te Arnhem bij den gewonen kring en den raakboog.

| | | |
|---|---|---|
| 1911 | 29 Dec. | rood $\frac{1}{2}°$ geel $\frac{1}{2}°$ blauw 1° |
| 1912 | 18 Feb. | } |
| | 3 Mrt. | „ $\frac{1}{4}°$ „ $\frac{1}{4}°$ „ $\frac{1}{4}°$ |
| | 10 Mei | } |
| | 8 Mrt. | „ $\frac{1}{2}°$ „ $\frac{1}{2}°$ speciaal boven ook blauw. |
| 1912 | 6 Jan. | } rood $\frac{1}{4}°$ groen $\frac{1}{4}°$ blauw $\frac{1}{4}°$ |
| 1913 | 14 Juni | } |
| 1911 | 3 Dec. | rood $\frac{1}{4}°$ geel $\frac{1}{4}°$ groen $\frac{1}{4}°$ blauw $\frac{1}{4}°$. |

Het feit, dat de breedte sterk wisselt, blijkt ook uit de uitvoerige tabellen over den circumzenithaalboog van BESSON [1]). 17 maal op 91 bogen heeft BESSON de kleuren uitgemeten. De afstand van rood tot violet varieert van $1\frac{1}{2}°$ tot 3° ($1\frac{1}{2}°$, 3 maal; 2°, 6 maal; $2\frac{1}{2}°$, 2 maal; 3°, 3 maal). Drie maal ontbreken blauw en violet; hierbij is één boog, waarvan de breedte van het binnenste rood tot het groen 5° bedraagt: BESSON teekent hierbij aan: très large, très brillant.

Deze breedtewisselingen zijn voor de buigingstheorie van veel beteekenis.

1) Sur la Théorie des Halo's. Paris 1909. p. 62.

Resumeerende vind ik als resultaten van het onderzoek, na de eliminatie van de subjectieve invloeden:

1. de vrij groote kleurenrijkdom.
2. de veranderlijkheid in kleur.
3. de veranderlijkheid in breedte.

Deze resultaten doet de eenvoudige brekingstheorie niet verwachten, maar zij toonen het optreden van buiging aan. Het zijn juist deze eigenschappen, die ook voor den regenboog de gewone brekingstheorie onvolledig maakten.

Blijkbaar zijn de voorwaarden voor de ontwikkeling van deze buigingsverschijnselen niet zelden aanwezig.

Met groote zekerheid heeft dit onderzoek de conclusies, in de eerste mededeeling getrokken, bevestigd: de waarnemingen, hoe moeielijk ook door de geringe sterkte der kleuren, die meestal als mengkleuren zijn op te vatten, de opgaven, hoe bedriegelijk dikwijls door subjectieve invloeden, toonen voldoende aan, dat bij de halo de buiging een belangrijke rol speelt.

---

**Anatomie.** — De Heer Boeke biedt een mededeeling aan van den Heer A. B. Droogleever Fortuyn: *„De involutie der placenta bij de muis in vruchtkamers, waarin het embryo gestorven is".*

(Mede aangeboden door den Heer van Wijhe).

Bij allerlei zoogdieren, die van verscheidene embryonen tegelijk zwanger zijn komt het af en toe voor, dat een of meer embryonen nog voor de geboorte sterven. Wat er in dat geval met de placenta gebeurt, is slechts in weinige gevallen nagegaan en blijkt nauw samen te hangen met den bouw der placenta. Waar nu die bouw bij de muis belangrijk afwijkt van dien van vele andere zoogdieren scheen het de moeite waard ook bij dit dier, zooals bij mijn weten nog niet is gebeurd, de involutie der placenta na onderbreking der zwangerschap na te gaan. Voor dit doel stonden mij de uteri van 8 muizen ten dienste, die tezamen naast vele normale vruchtkamers 20 vruchtkamers zonder embryo bevatten. De ontwikkelingstoestand der normale vruchtkamers wees uit, dat van de 8 muizen er een op den 13[den], een op den 15[den], vier op den 16[den], een op den 17[den] en een op den 18[den] zwangerschapsdag gedood was.

Voor een uitvoeriger beschrijving der 20 leege vruchtkamers moet ik verwijzen naar een artikel, dat ik aan het Tijdschrift der Nederlandsche Dierkundige Vereeniging hoop aan te bieden. Hier wil ik de resultaten meer in het algemeen weergeven.

Van het embryo zelf waren in geen enkel geval andere sporen dan wat losse cellen over, die niet nader herkend konden worden. Van de foetale hulsels overleefden verschillende deelen het embryo, maar zij deden dit niet alle even lang. Zoodoende konden er onder de leege vruchtkamers groepen onderscheiden worden met meer of minder resten der foetale hulsels.

In de eerste groep waren naast de reuzencellen (bij de muis sterk vergroote en zelfstandig geworden trophoblastcellen) en de membraan van Reichert ook deelen van den ectoplacentairen kegel en daarnaast deelen van het proximale of distale dooierblaasentoderm of van beide over gebleven. Het proximale dooierblaasentoderm was aan het uiterlijk der cellen goed te herkennen, maar steeds in stukken uiteengevallen. Het distale dooierblaasentoderm bekleedde soms nog groote stukken der membraan van Reichert inwendig; daarnaast kwamen

losse cellen ervan voor. De ectoplacentaire kegel bevatte nooit embryonale bloedvaten, een enkele maal wat bindweefsel van de allantois, dat met de groote bloedvaten in den ectoplacentairen kegel indringt, doch steeds waren de cellen of het syncytium van den ectoplacentairen kegel te herkennen. Een paar maal bleken zij in jonge reuzencellen over te gaan, die immers ook in normale gevallen uit cellen van den ectoplacentairen kegel kunnen ontstaan. Dikwijls lagen, evenals in volle vruchtkamers het geval is, met moederlijk bloed gevulde ruimten tusschen de ectoplacentairkegelcellen. Reichert's membraan was gemaklijk te herkennen als het structuurlooze vlies, dat onder het trophoblastepitheel ontstaat, wanneer dit in losse reuzencellen overgaat. Na het verdwijnen van het embryo had de contractie van den uteruswand den ectoplacentairen kegel grootendeels in de tevoren door het embryo ingenomen ruimte geperst en tevens had die contractie Reichert's membraan in plooien gelegd. Soms was deze membraan sterk verkleind, maar steeds vertoonde zij de opening waardoorheen de cellen van den ectoplacentairen kegel eertijds samenhingen met de allantois.

De reuzencellen lieten in het algemeen bijzonder duidelijk haar vermogen zien om erythrocyten en andere deelen van het moederlijk deciduaweefsel op te nemen, doch waren weinig veranderd. Anders was dit in de tweede groep der leege vruchtkamers, waar van de foetale bestanddeelen slechts het distale dooierblaasentoderm, de membraan van Reichert en de reuzencellen overgebleven waren. Daar waren verscheidene dezer laatste tot zelfs voor reuzencellen buitengewoon groote afmetingen uitgegroeid. In normale vruchtkamers hebben de reuzencellen tot taak het deciduaweefsel en het moederlijk bloed aan te tasten en een deel van het opgenomen voedsel aan het embryo af te staan. Zij leiden daarbij, als zij eenmaal het trophoblastepitheel of den ectoplacentairen kegel hebben losgelaten een volkomen zelfstandig leven. Na den dood van het embryo verandert dit alles slechts in zooverre dat de reuzencellen natuurlijk aan het embryo geen voedsel meer kunnen afstaan. Zij behouden alles voor zich en dit heeft ten gevolge, dat zij sterk gaan groeien. Daarbij worden zij in alle richtingen even groot, daar de druk van het embryo, die haar in normale vruchtkamers sterk afplat hier opgeheven is. Zoodoende wordt de ruimte door de reuzencellen in beslag genomen veel grooter dan ooit in normale vruchtkamers het geval is. Haar aantal lijkt mij slechts daarom grooter, omdat zij minder spoedig dan in normale vruchtkamers afsterven, niet omdat er meer zouden worden gevormd. Toch is afsterven ook hier het lot, dat de reuzencellen treft. Duidelijker dan in deze groep van leege vruchtkamers

blijkt dit in een andere, waarin de reuzencellen het eenig overgebleven foetale bestanddeel zijn. Hier vooral ziet men het cellichaam der reuzencel zijn kleurbaarheid verliezen en oplossen, zoodat de kern naakt achterblijft. Deze ondergaat vervolgens hetzelfde lot.

De reuzencellen hebben voor haar verdwijnen niet de geheele laag deciduaweefsel kunnen verteeren. Toch moet deze uit den weg worden geruimd wil de normale toestand van den uteruswand terugkeeren. De reuzencellen worden dan ook in haar taak bijgestaan door een andere soort cellen, blijkbaar amoeboiede zwerfcellen met phagocytaire eigenschappen. Deze cellen, die een tot nu toe onbekende soort vormen en in normale vruchtkamers ook na de baring niet voorkomen zijn zeer uiteenloopend van vorm en grootte. Zij hebben een meestal excentrisch gelegen kern, soms twee of meer kernen en cytoplasma, dat opvalt door de buitengewoon sterke kleurbaarheid met in water oplosbare eosine, terwijl de kleurbaarheid met in alcohol oplosbare eosine goed, maar niet buitengewoon is. Ik wil deze cellen eosinophiele phagocyten noemen. Over haar afkomst is mij niets bekend, maar ik houd haar voor moederlijke cellen. De eosinophiele phagocyten ontbraken maar in een van de twintig leege vruchtkamers en deze was duidelijk nog geen dag na den dood van het embryo gefixeerd. Zij treden het eerst in kleine groepen tusschen de groep reuzencellen en de laag onaangetast deciduaweefsel op. Deze groepen breiden zich uit tot steeds dikkere lagen, die altijd tusschen het deciduaweefsel en de reuzencellen of tusschen dit en de uterusholte zijn gelegen. De eosinophiele phagocyten tasten blijkbaar alleen het moederlijke deciduaweefsel en niet de reuzencellen aan en zij gaan hiermee door tot na het verdwijnen der reuzencellen. Zoo is er dus een vierde groep van leege vruchtkamers, waarin men in het geheel geen foetale resten meer ziet, doch slechts eosinophiele phagocyten, die de inmiddels sterk verkleinde laag deciduaweefsel opruimen. Het verdwijnen der eosinophiele phagocyten heb ik niet kunnen waarnemen.

Het is bekend, dat in de vruchtkamers der muis het uteruslumen aan de mesometrische zijde van het embryo verdwijnt om zich van uit de tusschen de vruchtkamers gelegen stukken van den uterus aan de antimesometrische zijde van het embryo weer uit te breiden. Voor dat de beide deelen van het nieuwe uteruslumen elkaar in het midden der vruchtkamer hebben bereikt, dat is voor den 17[den] dag, is er in de vruchtkamer een dikker of dunner dwarsschot van deciduaweefsel, dat beide naar elkaar toe groeiende deelen van het nieuwe uteruslumen scheidt. Dit schot nu is in vele leege vruchtkamers terug te vinden, maar in sommige is het doorgescheurd, in

andere wordt het door eosinophiele phagocyten aangetast en in nog andere is het blijkbaar door eosinophiele phagocyten voor den tijd volkomen uit den weg geruimd.

Over de oorzaken van den dood van het embryo kan ik zelfs geen vermoeden uiten. Wel blijkt het embryo op zeer verschillende leeftijden te gronde te kunnen gaan. Ik meen althans een geval gevonden te hebben, waarin dit op den 8sten en een waarin dit op den 16den dag plaats vond. Wie over jonger materiaal beschikt (mijn jongste embryonen waren van het eind van den 13den dag) zal allicht ook voor den 8sten dag afgestorven kiemblazen aantreffen. Bovendien blijkt, dat ook in eenzelfden uterus embryonen op zeer verschillende tijden kunnen dood gaan. Ik vond althans in eenzelfden uterus een der leege vruchtkamers met de minste en een der leege vruchtkamers met de meeste foetale resten, waaruit ik afleid, dat het eene embryo veel langer dood was dan het andere.

*Leiden.* *Anatomisch Kabinet.*

---

**Anatomie.** — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer H. C. DELSMAN: „*De eiklieving van Volvox globator en hare verhouding tot de voortbeweging van den volwassen vorm en tot de klievingstypen der Metazoen*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN BEMMELEN).

Meer nog dan voor den botanicus is *Volvox* voor den zooloog een belangwekkend object. Reeds bij dit organisme toch, waarvan het nog twijfelachtig is of wij het als plant dan wel als dier te beschouwen hebben, zien wij de hoofdlijnen aangeduid, waarlangs de ontwikkeling der Metazoen een aanvang heeft genomen. Terecht merkt BÜTSCHLI [1]) op, dat *Volvox* niet langer als een protozoenkolonie, doch als een eenvoudig gebouwd veelcellig organisme te beschouwen is. Niet slechts zijn de cellen onderling door plasmodesmen verbonden en vormen dus één enkele protoplasmamassa, maar ook is een verschil tusschen sterfelijke somatische en potentieel onsterfelijke voortplantingscellen opgetreden, gelijk dat voor Metaphyten en Metazoen kenmerkend is. Tusschen deze beide houdt *Volvox* het midden, herinnert door zijn chlorophylgehalte aan de eerste, terwijl zijn verdere organisatie meer in de richting van het dierenrijk wijst. Reeds vroeg werd het eerste ontwikkelingsstadium der Metazoen, de blastula, met *Volvox* vergeleken en bijv. door HUXLEY [2]) als "the animal Volvox" aangeduid. De overeenkomst bleek later nog grooter te zijn dan HUXLEY vermoeden kon. *Volvox* toch is geenszins een homaxone blaas, zonder bepaalde richting rondwentelend, doch vertoont een uitgesproken tegenstelling tusschen een animale en een vegetatieve pool. De lijn, die beide verbindt, kan als hoofdas van het organisme aangeduid worden. Dit is niet zuiver bolvormig, doch eenigszins langwerpig in de richting der hoofdas. Met de animale pool naar voren zwemt het voort, roteerend om de hoofdas, evenals het geval is met pelagische larven van lagere Metazoen en zelfs nog van *Amphioxus*. Aan de animale pool zijn de cellen kleiner, liggen daardoor wijder uiteen, en bevatten ook minder chlorophyl dan die aan de vegetatieve pool, welke door het grooter chlorophylgehalte

[1]) O BÜTSCHLI, 1883—1887, Protozoa II, p. 775, in BRONN's Klassen und Ordnungen des Thierreichs.

[2]) T. H. HUXLEY, 1877. The Anatomy of Invertebrated Animals, p. 678.

donkerder groen en door talrijker en breedere plasmodesmen met elkaar verbonden zijn. De cellen aan de animale pool bevatten elk een rood stigma, kenmerkend voor lichtgevoelige flagellaten (waartoe ook de Volvocineën behooren), terwijl die aan de vegetatieve pool dat missen. De overgang van beide soorten cellen in elkander is een geleidelijke. De voortplantingscellen zijn tot de vegetatieve helft beperkt. Een ieder, die gelegenheid heeft *Volvox* te bestudeeren, kan zich van dit alles makkelijk overtuigen.

De voortplanting vindt plaats òf door eicellen en spermatozoen, òf parthenogenetisch door z.g. parthenogonidien. Het laatste geschiedt, evenals bij Rotatorien en Infusorien, gedurende een aantal generaties, het eerste tegen het einde van een dergelijke periode, waarna het geëncysteerde ei overblijft. De klievingsstadien van het ei en van de parthenogonidien, waarvan de ontwikkeling op overeenkomstige wijze verloopt, vertoonen weer veel overeenkomst met die van Metazoeneieren. Met name herinneren de afbeeldingen, daarvan door verschillende onderzoekers voor *Volvox*, *Pleodorina*, *Eudorina*, *Pandorina* en *Gonium* gegeven, vaak aan de beelden van het spiraalsgewijze klievingstype, dat wij wel als het oorspronkelijke klievingstype der Zygoneura of Protostomia mogen aanduiden en thans nog gevonden wordt bij Polycladen, Nemertinen, Polychaeten en de meeste Mollusken. Het scheen mij daarom zeer belangwekkend, eens na te gaan, in hoeverre de klieving van *Volvox* aan dit type beantwoordt. De opgaven, daaromtrent door vroegere onderzoekers gedaan, bleken niet volledig en niet overeenstemmend genoeg om deze vraag bevredigend te beantwoorden [1]).

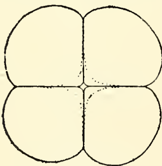


Fig. 1. *Volvox globator*, parthenogonidum, stadium 4, gezien van de vegetatieve zijde bij diepe instelling. De stippellijnen geven het beeld aan bij hoogere instelling.

Toen zich dan ook de gelegenheid bood, de klieving der parthe-

---

[1]) Opgaven over de klieving van *Volvox* vindt men bij:

J. Goroshankin, 1875, Genesis im Typus der palmellenartigen Algen. Versuch einer vergleichenden Morphologie der Volvocineae. Mitt. Kaiserl. Ges. naturf. Freunde in Moskau, Bd. 16 (Russisch, referaat in Botan. Jahresber. f. 1875, p. 27).

E. Overton, 1889, Beitrag zur Kenntniss der Gattung Volvox. Botan. Centralbl., Bd. 10, p. 177.

L. Klein, 1890, Vergleichende Untersuchungen über Morphologie und Biologie der Fortpflanzung bei der Gattung Volvox. Ber. naturf. Ges. Freiburg, Bd. 5, p. 15

nogonidien van *Volvox* eens nader te bestudeeren, waar deze vorm in het Victoria regia-bassin van den Leidschen Hortus overvloedig bleek voor te komen, maakte ik daarvan terstond gebruik. Bestudeerd werd levend materiaal [1]). Tijdens de ontwikkeling neemt het parthenogonidium, dat door plasmodesmen met de omliggende cellen verbonden blijft, aanzienlijk in grootte toe [2]), zoodat de oudere stadien vaak makkelijker te bestudeeren zijn dan jongere, bij welke het gebruik van olie-immersie in den regel gewenscht is.

Door twee meridionale deelingen wordt het parthenogonidium eerst in vier gelijke cellen gedeeld, die elk een kwadrant zullen leveren. Het achtcellig stadium werd reeds herhaaldelijk voor *Volvox* en andere Volvocineeën afgebeeld, de overgang van het vier- tot

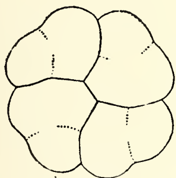


Fig. 2. Begin van de derde deeling, van de animale zijde.

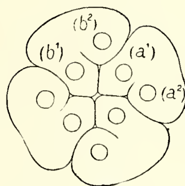



Fig. 3. Overgang 4—8, van de vegetatieve zijde.

het achtcellig stadium nog niet. Gelijk fig. 2 en 3 leeren, vindt hierbij een torsie van wat wij kortheidshalve de vier vegetatieve cellen willen noemen ten opzichte van de vier animale cellen ten bedrage van 45° plaats. In de terminologie van het spiraalsgewijze klievingstype zouden wij deze deeling een *dexiotrope* noemen, daar, wanneer wij het ei van de animale pool bezien, de vier animale cellen ten opzichte van de vier vegetatieve in de richting van de wijzers van een uurwerk verschoven blijken te zijn.

Het interesseerde mij natuurlijk te ervaren, of deze derde klieving steeds in denzelfden zin plaats vindt, of wel, wat ook denkbaar ware, nu eens dexiotroop, dan weer laeotroop is. Bij de klieving van *Balanus*, die eveneens een zekere torsie vertoont, vond ik bijv. beide mogelijkheden door elkaar voorkomen [3]). Bij het spiraalsgewijze klievingstype is de 3e deeling steeds dexiotroop, behalve bij invers

[1]) Aan mej. H. C. C. La Rivière moet ik mijn welgemeenden dank betuigen voor hare welwillende hulp bij het verkrijgen en uitzoeken van dit materiaal.

[2]) De figuren bij dit artikel zijn alle op gelijke grootte geteekend.

[3]) H. C. Delsman, 1917. Die Embryonalentwicklung von Balanus balanoides Linn. Tijdschr. Nederl. Dierk. Ver. (2), Dl. 15.

gewonden Gastropoden, waar ook het geheele klievingsproces in inversen zin verloopt. Niet alleen de volwassen vorm, maar ook reeds de vroegste klievingsstadien vertoonen in dat geval dus het spiegelbeeld van wat wij bij normaal gewonden slakken vinden.

Het bleek mij, dat bij *Volvox* de derde klieving steeds in denzelfden, n.m. in dexiotropen zin verloopt, en het ligt voor de hand, ook hier naar een eigenschap van den volwassen vorm te zien, die daarmede wellicht verband zou kunnen houden. Hoe is het n.m. met de richting, waarin *Volvox* om de hoofdas roteert, is deze steeds dezelfde, of wel nu eens rechts-, dan weer linksdraaiend? Gelijk reeds door vroegere onderzoekers opgemerkt was en ik hier nog eens bevestigen kan, geschiedt de rotatie steeds zoodanig, dat men haar, op de animale pool ziend, in de richting van de wijzers van een uurwerk ziet plaats hebben, wat wij dus rechtsdraaiend zouden kunnen noemen. Het ligt voor de hand aan een verband tusschen beide verschijnselen te denken, gelijk dat ook bij Gastropoden opgemerkt is. Dat bij deze laatste van geen direct oorzakelijk verband tusschen de torsie van het volwassen dier en die van de klievingscellen kan sprake zijn, zal terstond duidelijk worden, als wij bedenken, dat het spiraalsgewijze klievingstype evengoed bij niet-getordeerde vormen, als Lamellibranchiaten, Chitonen, Polychaeten enz. voorkomt. Of wellicht bij *Volvox* aan een meer direct verband gedacht kan worden tusschen rotatierichting en klieving is een vraag, waarop wij zoo aanstonds terug zullen komen.

In het reeds meermalen afgebeelde achtcellige stadium (fig. 4, 5)

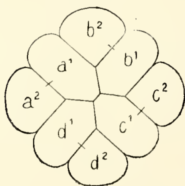


Fig 4. Stadium 8, van de animale zijde.

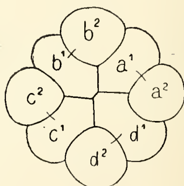


Fig. 5. Stadium 8, van de vegetatieve zijde.

liggen de vier vegetatieve cellen afwisselend met de vier animale. Zij vormen tezamen een celplaatje, dat phylogenetisch het *Gonium*-stadium voorstelt, doch dat reeds aan den rand begint in te krommen. Deze inkromming wordt sterker tijdens den overgang tot het stadium 16 en treedt bij *Volvox* blijkbaar iets vroeger op dan bij

*Pleodorina*, *Eudorina* en *Pandorina*, waar ook in het stadium 16 de cellen nog in een gekromd plaatje liggen, terwijl dit bij *Volvox* dan reeds in een hol bolletje met een opening, den „phialoporus", is overgegaan. Met de vegetatieve zijde, den phialoporus dus, ligt het ei steeds naar de oppervlakte van het moeder„dier" gekeerd.

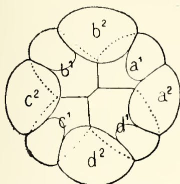



Fig. 6. Begin van de vierde verdeeling, van de vegetatieve zijde.

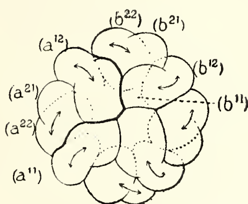



Fig. 7. Overgang 8—16, van de animale zijde.

De overgang 8—16, die bij het spiraalsgewijze type door een laeotrope klieving bewerkstelligd wordt, wordt nu bij *Volvox* gekenmerkt door een voortgezette torsie der vegetatieve cellen ten opzichte van de animale in denzelfden zin, waarin zij ook reeds bij de voorgaande klieving tot uiting kwam, wat wij dus als dexiotroop kunnen aanduiden. Dit uit zich reeds in den vorm der cellen, zoodra de vierde klieving aanvangt, gelijk fig. 6 leert. De torsie is hier reeds iets grooter dan 45 geworden, gelijk blijkt als men de ligging van de onderste punt der vegetatieve cellen ($a_2$—$d_2$) ten opzichte van het kruis der klievingsgroeven aan de animale pool in het oog vat.

De vierde klieving (fig. 7, 8) kan dan ook niet als laeotroop

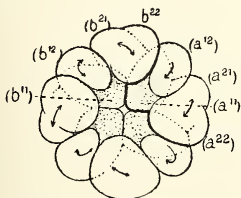



Fig. 8. Overgang 8—16, van de vegetatieve zijde.

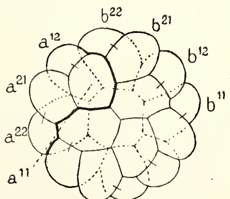



Fig. 9. Stadium 16, van de animale zijde.

aangeduid worden, veeleer, onder invloed der bovenvermelde torsie, als dexiotroop. Het schijnt mij dan ook niet wenschelijk, ook in

verband met het verdere klievingsverloop, hier de door CONKLIN voor het spiraalsgewijze type ingevoerde nomenclatuur toe te passen; ik zal deze eenigszins wijzigen. De cellen der vier kwadranten duid ik resp. met *a*, *b*, *c* en *d* aan, van hare nakomelingen geef ik telkens die, welke naar de animale pool gekeerd ligt, den exponent 1, die welke naar de vegetatieve pool gekeerd ligt, den exponent 2. Alle cellen met de letter *a* zijn dus nakomelingen van de cel *a* van het viercellig stadium, vormen dus tezamen één kwadrant, dat ik bovendien nog door een dikkere lijn omgrensd heb. Fig. 9 beantwoordt nu weliswaar geheel aan het beeld, dat een 16-cellig stadium van het spiraalsgewijze klievingstype biedt. Echter zou men dan verwachten, dat de vier cellen $a^{11}$, $a^{12}$, $b^{21}$ en $b^{22}$ tezamen één kwadrant zouden voorstellen. Dit is thans gebleken niet het geval te zijn en bij beschouwing van fig. 8 en 9 valt terstond de dexiotrope torsie op, welke tijdens de klieving heeft plaats gevonden. Tusschen $a^{11}$ en $a^{22}$ bedraagt deze torsie thans tusschen de 45° en 90°. De phialoporus wordt begrensd door de cellen $a^{22}$—$d^{22}$ en $a^{12}$—$d^{12}$, waarbij de eerste de vier langere, de laatste de vier kortere zijden van den achthoekigen phialoporusrand vormen. Soms reikt ook nog een der cellen $a^{21}$—$d^{21}$ tot aan den rand, zoodat deze dan door negen cellen begrensd wordt.

De 5e klieving, die tot het stadium 32 voert, is wederom uitgesproken laeotroop, gelijk zoowel een beschouwing van de animale

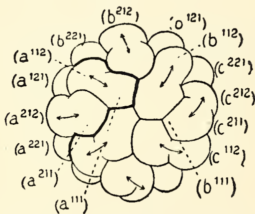



Fig. 10. Overgang 16—32, van de animale zijde.

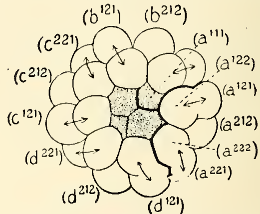



Fig. 11. Overgang 16—32, van de vegetatieve zijde.

(fig. 10) als van de vegetatieve zijde (fig. 11) leert. De dexiotrope torsie wordt dus ook hier voortgezet en, gelijk fig. 11 en vooral fig. 13 toont, bereikt deze torsie van het vegetatieve uiteinde van elk kwadrant ten opzichte van het animale uiteinde (de cel $a^{111}$) thans welhaast een waarde van 90°. Terwijl $a^{212}$ zich tusschen $a^{12}$ en $a^{22}$ indringt, gelijk reeds in het 16-cellig stadium het geval was, zoodat $a^{221}$ daarvoor eenigszins uitwijkt (fig. 11, 13), wordt $a^{12}$, terwijl zij zich deelt, door de zich eveneens deelende $a^{11}$ naar

den phialoporusrand geduwd, waardoor thans $a^{122}$—$d^{122}$ de langere zijden, $a^{222}$—$d^{222}$ de kortere zijden van den achthoekigen phialoporus vormen. Vaak ook zijn alle acht zijden ongeveer even lang.

De rangschikking der cellen in het 32-cellig stadium is een zoo regelmatige (fig. 12 en 13), dat men daaruit zeker niet de torsie vermoeden zou, welke door het vervolgen der deelingen hier aangetoond is.

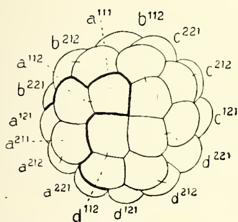


Fig. 12. Stadium 32, van de animale zijde.

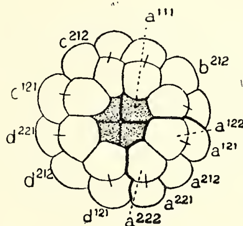


Fig. 13. Stadium 32. (hetzelfde ei) van de vegetatieve zijde.

De laatste door mij bestudeerde klieving is die, welke tot het 64-cellig stadium voert (fig. 14 en 15). De richting der deelingen wordt langzamerhand aan meer variatie onderhevig, ook meer meridionale deelingen schijnen thans op te treden, al blijft toch de aequatoriale richting evenals bij vorige klievingen — zij het met een door de torsie veroorzaakte afwijking — de overheerschende. Dat de torsie ook thans nog voortgaat leert vooral fig. 15, die aantoont, dat zij de 90° reeds overschreden heeft.

Bij den aanvang van dit onderzoek had ik half verwacht te zullen vinden, dat *Volvox* zich volgens het spiraalsgewijze klievingstype deelt. Hiertoe hadden mij de door verschillende onderzoekers gegeven afbeeldingen der klievingsstadiën aanleiding gegeven. Zeker zou

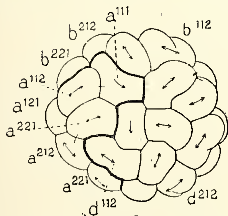


Fig. 14. Overgang 32—64, van de animale zijde.

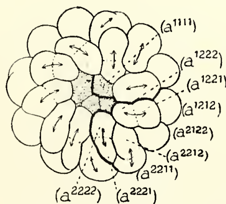


Fig. 15. Overgang 32—64, van de vegetatieve zijde.

deze bevinding belangwekkend geweest zijn met het oog op de beoordeeling der verschillende klievingstypen der Metazoen en hare onderlinge verhouding, en het twijfelachtig gemaakt hebben, of wij bijv. het zoo regelmatige spiraalsgewijze klievingstype hebben afgeleid te denken uit de vaak onregelmatige en regellooze klieving der Coelenteraten. Een meer direct verband tusschen *Volvox* en de laagste vormen, die dit spiraalsgewijze type vertoonen, zou daardoor niet onmogelijk schijnen, te meer, daar, gelijk boven vermeld, ook in andere opzichten aanknoopingspunten niet ontbreken. Dat *Volvox* bladgroen bezit zou daarbij geen onoverkomelijk bezwaar vormen, daar het toch wel nauwelijks twijfelachtig is, of de dieren moeten van organismen met bladgroen afstammen, zonder welke productie van organische uit anorganische stof niet wel denkbaar is.

Intusschen is gebleken, dat de klieving van *Volvox* niet zonder meer tot het spiraalsgewijze type te rekenen is in den vorm, waarin dat bij Metazoen voorkomt en waarbij dexiotrope en laeotrope deelingen met elkander afwisselen. Hoewel punten van overeenstemming niet ontbreken, wil ik mij van verdere beschouwingen in deze richting daarom voorshands onthouden.

In een ander opzicht schijnen mij de verkregen resultaten echter interessant. Wij hebben tijdens de klieving een steeds voortschrijdende torsie van de vegetatieve ten opzichte van de animale cellen kunnen constateeren, die vooral duidelijk aan den dag treedt bij een vergelijking van fig. 2, 4, 7, 9, 10, 12 en 14 en van fig. 3, 5, 6, 8, 11, 13 en 15, en hebben dus alle reden om aan te nemen, dat ook in den volwassen vorm een dergelijke rangschikking der cellen aanwezig is. Bij het spiraalsgewijze klievingstype heffen de opeenvolgende dexiotrope en laeotrope deelingen elkaars werking vrijwel op, zoodat in de blastula de tot één kwadrant behoorende cellen ongeveer een oppervlak innemen, als gelegen is tusschen twee meridianen, wier afstand 90° bedraagt, gelijk in fig. 16*a* voorgesteld is. In fig. 16*b* is voorgesteld, hoe de ligging der tot één kwadrant behoorende cellen bij *Volvox* is in het geval dat de torsie niet meer dan 90° bedragen zou. Hoe groot deze in den volwassen *Volvox* geworden is, valt natuurlijk niet te zeggen. In dezelfde dexiotrope richting vindt nu, gelijk vermeld, ook de rotatie plaats, en het komt mij waarschijnlijk voor, dat wij hier naar een meer direct verband tusschen beide verschijnselen mogen uitzien, dan bij de torsie der Gastropoden. Nemen wij daartoe aan, dat niet alleen aan de kolonie, maar ook aan elk der cellen bij *Volvox* een zekere polariteit en dus een hoofdas toekomt, loopende in de richting van de animale naar de vegetatieve pool der kolonie. Deze polariteit der

cellen uit zich bijv. in de gelijke richting, waarin de flagellen slaan, waardoor, gelijk zich aan in het water zwevende deeltjes in de

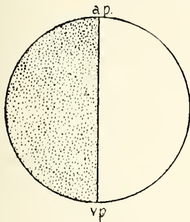



Fig. 16*a*.

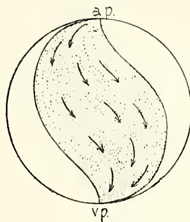



Fig. 16*b*.

nabijheid van tusschen dek- en objectglas vastgelegde Volvoces makkelijk constateeren laat, een waterstroom van voren naar achteren wordt opgewekt, die het organisme, wanneer het vrij is, in de richting van de animale pool doet voortbewegen. Nemen wij voorts aan, dat bij de dexiotrope torsie tijdens de klieving de richting van de hoofdas der cellen een dexiotrope afwijking ondergaat en de flagellen thans dus slaan in de richting der pijltjes in fig. 16*b*, dan volgt hieruit vanzelf de dexiotrope rotatie der kolonie. Dat de flagellen inderdaad aldus slaan behoeft niet nader bewezen te worden, doch volgt uit het feit der rotatie vanzelf.

Het zou zeker interessant zijn, indien eens een linksdraaiende varieteit van *Volvox globator* ontdekt werd. Het laat zich nauwelijks anders verwachten, dan dat hierbij ook de klieving tot het inverse type zou blijken te behooren.

Is met het bovenstaande nu de roteerende beweging van *Volvox* mechanisch verklaard uit de tijdens de klieving optredende torsie? In meer directen zin wel, indien onze onderstelling juist is. Blijft echter te verklaren de torsie der klievingscellen. Phylogenetisch zou ik er nu meer toe neigen, de torsie, die tijdens de klieving optreedt, te beschouwen als een gevolg van de rotatie, die het volwassen dier uitvoert, dan als de oorzaak daarvan. De studie der ontwikkelingsgeschiedenis toch leert ons telkens weer, dat wij den bouw van het volwassen dier phylogenetisch niet moeten beschouwen als een product van de ontwikkelingsprocessen, doch veeleer deze laatste moeten verklaren uit den bouw van het volwassen dier. Zoo zou ik ook in de torsie tijdens de eiklieving bij *Volvox* niet anders willen zien, dan een zeer vroegtijdig optredende eigenschap van den volwassen vorm, verband houdende met de voortbeweging van dezen laatste. Deze eigenschap, bij den volwassen vorm niet aan te toonen, kon slechts door de studie der ontwikkeling aan het licht worden gebracht.

**Mathématiques.** — „*Nouvelle démonstration du théorème de* JORDAN *sur les courbes planes*". Note de M. ARNAUD DENJOY, présentée par MM. L. E. J. BROUWER et HK. DE VRIES.

Le théorème fondamental de JORDAN sur les courbes fermées peut s'énoncer ainsi :

*Si les points d'un ensemble $\Gamma$ et ceux d'un cercle se correspondent réciproquement et continument, chacun à chacun, l'ensemble $\Gamma$ divise le plan en deux régions.*

L'hypothèse faite sur $\Gamma$ caractérise une *courbe* de JORDAN. Je me propose dans cette Note de donner une démonstration du théorème ci-dessus énoncé. Je rappellerai d'abord certaines définitions et résultats connus.

Nous caractérisons comme il suit les *côtés positif et négatif en un point $I$ d'une ligne $HIK$* formée de deux segments de droite $HI, IK$, dont $I$ est le seul point commun. Décrivons, dans le sens direct des rotations, un arc circulaire inférieur à $2\pi$, de centre $I$, ayant son origine sur $IK$ et son extrémité sur $HI$. Cet arc borne, avec $HI$ et $IK$, un secteur de cercle $\omega$. Soit $L$ un ensemble continu, tel que, à l'intérieur d'un certain cercle $c$ de centre $I$ et de rayon inférieur à celui de $\omega$, $L$ et $HIK$ aient seulement $I$ en commun. Nous dirons que, au voisinage de $I$, $L$ est situé du côté positif de la ligne $HIK$ (ou du côté négatif de la ligne $KIH$) si les points de $L$ intérieurs à $c$ et distincts de $I$ sont tous dans $\omega$.

Il est aisé de voir que, *si $IK'$ est du côté positif de $HIK$, $IK$ est du côté négatif de $HIK'$.*

Si $I$ est un point non extrême d'une ligne brisée $\lambda$ simple (c'est-à-dire telle qu' un point quelconque de la ligne n'appartient à deux côtés différents que si ce point est origine de l'un et extrémité de l'autre), pour définir les côtés positif et négatif de $\lambda$ en $I$, nous considérons un secteur de cercle analogue à $\omega$, limité au côté (ou aux deux côtés) de $\lambda$ contenant $I$, et ne rencontrant aucun autre côté de $\lambda$.

Soit $P$ un polygone simple, défini avec son sens de parcours. On montre (voir *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1911) que $P$ divise le plan en deux régions (nous les appelons respectivement positive et négative, et les désignons par $P+$ et $P-$),

telles que tout continu joignant un de leurs points $M$ au polygone $P$, atteint celui-ci du côté positif pour $P+$, du côté négatif pour $P-$. $A$ et $B$ étant deux points de $P$, la ligne brisée décrite en parcourant $P$ selon son sens, de $A$ à $B$ est l'*arc direct* $AB$ de $P$. L'*arc rétrograde* $AB$ est géométriquement identique à l'arc direct $BA$, mais les sens de parcours des deux arcs sont opposés.

Pour démontrer le théorème de M. JORDAN, nous utiliserons le lemme suivant:

*Si, en parcourant une fois un polygone $P$ dans un sens invariable, on rencontre successivement les quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ de ce polygone, et si $(AC)$, $(BD)$ sont deux continus joignant respectivement $A$ à $C$, $B$ à $D$, et dont tous les points, sauf $A$, $B$, $C$, $D$, sont dans une même région limitée par le polygone, ces deux continus ont au moins un point commun.*

Supposons d'abord que $(AC)$ soit une ligne brisée simple. On peut toujours choisir le sens positif de parcours de $P$, de façon que la région de $P$ contenant $(AC)$ et $(BD)$, sauf leurs extrémités, soit $P+$.

Considérons alors le polygone $\pi$ formé de l'arc direct $CA$ de $P$, et de la ligne $(AC)$ parcourue de $A$ vers $C$. $(AC)$ atteignant $P$ en $A$ et $C$ du côté positif, l'arc direct $AC$ de $P$ s'écarte de $\pi$ du côté négatif en $A$ et $C$. Donc, $D$ qui est sur cet arc est dans $\pi-$. Mais, $P$ et $\pi$ ayant en commun l'arc $CA$ qui contient $B$, les côtés positifs de $P$ et de $\pi$ au voisinage de $B$ coïncident. Donc le continu $(BD)$ est, au voisinage de $B$, dans $\pi+$. On en déduit que $(BD)$ rencontre $\pi$ en un point différent de $B$. Comme $(BD)$ ne rencontre pas l'arc $CA$, $(BD)$ rencontre $(AC)$.

Supposons que ni $(AC)$ ni $(BD)$ ne soient des lignes brisées simples. Si ces continus n'ont pas de points communs, leur distance minimum est un nombre positif $\alpha$. On remplace le continu $(AC)$ par une ligne brisée simple $\lambda$ d'extrémités $A$ et $C$, située, sauf pour ces deux points, dans $P+$ comme l'est $(AC)$, et ayant tous ses points à une distance de $(AC)$ inférieure à $\alpha$. D'après la première partie de la démonstration, $\lambda$ rencontre $(BD)$. Nous aboutissons donc à une contradiction. Donc $(AC)$ et $(BD)$ se rencontrent dans tous les cas.

Nous déduirons de ce lemme une proposition essentielle.

Soit $\Gamma$ une courbe de JORDAN et $O$ la circonférence de cercle correspondant ponctuellement à $\Gamma$. Si un point décrit $O$ dans le sens direct, nous dirons que le point homologue de $\Gamma$ décrit $\Gamma$ dans le sens positif. On échange le sens positif de parcours de $\Gamma$ en transformant le cercle $O$ en lui-même par une symétrie par rapport à un de ses diamètres. Cela posé,

*Si $A$, $B$, $C$, $D$ sont quatre points d'un polygone simple $P$, et $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ quatre points d'une courbe de* Jordan *$\Gamma$ ne rencontrant pas $P$, si $(AA')$, $(BB')$, $(CC')$, $(DD')$ sont quatre continus deux à deux distincts contenant respectivement les points mis en évidence dans leurs désignations et n'en ayant aucun autre de commun avec $P$ ni avec $\Gamma$, l'ordre des quatre points $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ sur la courbe $\Gamma$, et celui de $A$, $B$, $C$, $D$ sur $P$, l'une et l'autre parcourus dans le sens positif, sont identiques ou inverses.*

On voit sans peine qu'en échangeant entre elles, s'il en est besoin, les dénominations des couples associés $A$ et $A'$, etc., et aussi en modifiant le sens positif de $\Gamma$, la proposition serait en défaut dans le cas unique où, $A$, $B$, $C$, $D$ étant rencontrés sur $P$ dans leur ordre d'énonciation, on rencontrerait sur $\Gamma$ successivement $A'$, $C'$, $B'$, $D'$. Mais alors le continu $(AC)$ formé de $(AA')$, de $(CC')$ et de l'arc direct $A'C'$ de $\Gamma$, ne rencontrerait pas le continu $(BD)$ formé de $(BB')$, de $(DD')$ et de l'arc direct $B'D'$ de $\Gamma$. Or ces deux continus sont, à l'exception de leurs extrémités $A$, $B$, $C$, $D$ l'un et l'autre dans la région de $P$ contenant $\Gamma$. C.q. f. d.

Rappelons maintenant que si l'on forme une subdivision du plan en carrés égaux $(\gamma)$ par deux familles de droites respectivement parallèles à deux directions rectangulaires, et, si l'on considère les ensembles formés par les carrés ne contenant, ni intérieurement ni sur leur contour, nul point d'un continu $E$, ces ensembles forment des domaines (réunion d'un continuum et de sa frontière; un continuum est un ensemble connexe dont tous les points lui sont intérieurs) dont chacun est limité par un polygone simple appelé *polygone d'approximation de $E$, relatif au quadrillage* $(\gamma)$. Le sens positif d'un tel polygone $\pi$ sera défini par la condition que $E$ soit dans $\pi^-$.

Tout point $H$ de $\pi$ est situé sur l'un (ou sur deux) des côtés d'un (ou de deux ou de trois) carré $\gamma$ dont l'intérieur appartient à $\pi^-$ et qui contient, intérieurement ou sur son contour, au moins un point de $E$. L'un de ces points-ci $H'$, est tel que la distance $HH'$ est minimum. Les points non extrêmes du segment $HH'$ sont situés dans $\pi^-$ et étrangers à $E$. D'ailleurs $HH'$ est au plus égal à la diagonale de $\gamma$.

Cela étant, soient $M$ et $N$ deux points, distincts ou non, appartenant à une même région limitée par $\Gamma$, et $P$, $Q$ deux points de $\Gamma$ tels que les segments $MP, NQ$ aient en commun 1° avec $\Gamma$, uniquement les points respectifs $P$ et $Q$, 2° entre eux, éventuellement et seulement certains de leurs points extrêmes (donc si $M$ coïncide avec $N$, $P$ est distinct de $Q$ et inversement). $M$ et $N$ peuvent être joints par une ligne simple $\lambda$ dont tous les points sont distincts de

$\Gamma$. Soit $4\alpha$ un nombre inférieur à la distance de $\lambda$ á $\Gamma$, et à la distance rectiligne $P\,Q$. $\varepsilon$ étant moindre que $\alpha$, considérons dans un quadrillage de côté $\varepsilon$ le polygone $\pi$ d'approximation de $\Gamma$, dont la région positive contient $M$ et $N$. A partir de $P$ et de $Q$, les segments $PM$, $QN$ rencontrent $\pi$ aux premiers points respectifs $M_1$ et $N_1$. Soit $\vartheta$ la plus grande des deux longueurs $M_1\,P$ et $N_1\,Q$. $\vartheta$ tend vers zéro avec $\varepsilon$. Si $\vartheta + \varepsilon < \alpha$, sur chacun des arcs directs $M_1\,N_1$, $N_1\,M_1$ de $\pi$, il existe des sommets, respectivement $H$, $K$, tels que les segments $HH'$, $KK'$ les joignant à leurs correspondants définis plus haut, ne coupent ni $M_1\,P$ ni $N_1\,Q$. Alors, d'après le lemme, $H'$ et $K'$ sont séparés sur $\Gamma$ par $P$ et par $Q$.

Cela posé, à un sommet $H$ de l'arc direct $M_1\,N_1$ de $\pi$, faisons correspondre $P$ ou $Q$ ou $H'$, selon que $HH'$ rencontre $M_1\,P$ ou $M_1\,Q$, ou ni l'un ni l'autre de ces segments. Alors, á la suite des sommets de l'arc $M_1\,N_1$ correspond une suite de points de $\Gamma$, tels que la distance de chacun d'eux au suivant est inférieure à $2\vartheta + 5\varepsilon$. Tous ces points sont sur un même arc $P\,Q$ de $\Gamma$, puisqu' aucun d'eux n'est sur l'arc $P\,Q$ contenant $K'$.

De même, sur ce dernier arc, nous pouvons former entre $P$ et $Q$ une chaîne de points, telle que la distance de chacun d'eux au suivant soit inférieure à $2\vartheta + 5\varepsilon$, chacun de ces points étant d'ailleurs distant de moins de $2\varepsilon$ d'un sommet de $\pi$. Nous déduisons de là les deux corollaires suivants:

1° *Toute région limitée par* $\Gamma$ *admet pour frontière la totalité de* $\Gamma$.

Car la région contenant $M$ et $N$ admet pour frontière chacun dès deux arcs $P\,Q$ de $\Gamma$.

2° $M$ *et* $N$ *étant dans une même région de* $\Gamma$, $P$ *et* $Q$ *étant sur* $\Gamma$ *et les segments* $M\,P$ *et* $N\,Q$ *étant sans points non extrêmes communs, ni avec* $\Gamma$, *ni entre eux; quel que soit le nombre positif* $\eta$, *il est possible de trouver deux lignes brisées* $\lambda, \lambda'$ *dont tous les points sont étrangers à* $\Gamma$ *et situés à une distance inférieure à* $\eta$, *respectivement de l'arc direct* $P\,Q$ *et de l'arc direct* $Q\,P$ *de* $\Gamma$, *les extrémités de chacune des deux lignes* $\lambda, \lambda'$ *étant, l'une sur* $M\,P$, *l'autre sur* $N\,Q$.

En particulier, si $M$, $N$ et l'un des arcs $P\,Q$ sont intérieurs à un cercle $c$, on peut joindre $M$ à $N$ par une ligne brisée ne rencontrant pas $\Gamma$ et intérieure à $c$.

De ces corollaires nous tirons les propositions suivantes:

1° *Toute courbe de* Jordan *admettant un arc rectiligne divise le plan en deux régions.*

En effet, soit $I$ le milieu de l'arc rectiligne direct $H\,K$ appartenant à $\Gamma$ et $\omega$ un cercle de centre $I$ ne contenant aucun point de l'arc $K\,H$ de $\Gamma$. Le diamètre $H\,K$ divise $\omega$ en deux demi-cercles

$\omega_1$ et $\omega_2$. L'intérieur de $\omega_1$ fait partie d'une même région $r_1$ limitée par $\Gamma$. De même l'intérieur de $\omega_2$ appartient à une même région $r_2$ limitée par $\Gamma$. D'ailleurs, toute région limitée par $\Gamma$ admet $I$ pour point frontière, donc possède des points dans $\omega$, donc dans $\omega_1$ ou dans $\omega_2$. Elle coïncide donc avec $r_1$ ou avec $r_2$.

Je dis que $r_1$ et $r_2$ sont distincts. Sinon, soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux points symétriques par rapport à $I$, et respectivement intérieurs à $\omega_1$ et à $\omega_2$. S'il était possible de joindre $\alpha_1$ à $\alpha_2$ par une ligne brisée simple $\lambda$ ne rencontrant pas $\Gamma$, on pourrait choisir $\lambda$ sans points communs avec le segment $\alpha_2\,\alpha_1$ en dehors de ses points extrêmes, et en ajoutant à $\lambda$ le segment $\alpha_2\alpha_1$, on obtiendrait un polygone fermé $\varpi$. Le segment $HK$ et le côté $\alpha_1\alpha_2$ de $\varpi$ se coupent en leur milieu $I$. D'ailleurs $HK$ ne rencontre plus $\varpi$. Donc, $H$ et $K$ sont dans deux régions différentes de $\varpi$. Donc, l'arc direct $KH$ de $\Gamma$ rencontre $\varpi$, et comme cet arc ne rencontre pas le segment $\alpha_1\alpha_2$, il rencontre $\lambda$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition est donc démontrée.

2° *Toute courbe de* Jordan *divise le plan en deux régions.*

Soit $J$ un point quelconque de $\Gamma$. Soit $c$ un cercle de centre $J$ et laissant à son extérieur un point $K_0$ de $\Gamma$. Il existe un cercle $c'$ concentrique et intérieur à $c$, tel que, si $P$ est un point de $\Gamma$ intérieur à $c'$, l'un des deux arcs $PJ$ de $\Gamma$ est intérieur à $c$. La même propriété est dès lors vérifiée pour l'un des deux arcs $PQ$, si $P$ et $Q$ sont à la fois sur $\Gamma$ et dans $c'$.

Il est possible d'entourer $K_0$ d'un cercle $c''$ extérieur à $c$ et tel que, si $\alpha$ et $\beta$ sont deux points de $\Gamma$ intérieurs à $c''$, l'un des deux arcs $\alpha\beta$ de $\Gamma$ est extérieur à $c$. Le segment $\alpha\beta$ rencontre en général $\Gamma$ en d'autres points que $\alpha$ et $\beta$, peut-être même en une infinité de points. Ceux-ci forment sur le segment $\alpha\beta$ un ensemble fermé. Soit $HK$ un intervalle contigu à cet ensemble. Le segment $HK$ est une corde de $\Gamma$. Ses extrémités seules font partie de $\Gamma$. L'un des deux arcs $HK$ de $\Gamma$ est extérieur à $c$. L'autre contient $J$. On peut, quitte à échanger les dénominations de $H$ et de $K$, supposer que ce dernier arc est l'arc direct $KH$ de $\Gamma$.

Soit $\Gamma_1$ la courbe de Jordan obtenue en ajoutant à l'arc direct $KH$ de $\Gamma$, le segment rectiligne $HK$. Dans $c$, $\Gamma$ et $\Gamma_1$ coïncident, puisque ces deux courbes diffèrent uniquement par leurs arcs directs $HK$, l'un et l'autre extérieurs à $c$.

$\Gamma_1$ divise le plan en deux régions admettant l'une et l'autre $J$ pour point frontière. Soient $M$ et $N$ deux points appartenant respectivement à ces deux régions et contenus dans $c'$. Joignons $M$ et $N$ à $J$. Soient, à partir de $M$ et de $N$ respectivement, $P$ et $Q$ les deux premiers points de rencontre obtenus avec $\Gamma$. Les segments

$MP$, $NQ$ étant intérieurs à $c'$, où $\Gamma$ et $\Gamma_1$ coïncident, $P$ et $Q$ sont sur $\Gamma_1$ et les segments $MP$, $NQ$ n'ont avec $\Gamma_1$ d'autres points communs que $P$ et $Q$. $MP$ et $NQ$ n'ont pas de points communs entre eux, sauf éventuellement $P$ et $Q$, si ces points coïncident avec $J$.

Je dis que tout point $S$ étranger à $\Gamma$ peut être joint à $M$ ou à $N$ par une ligne brisée ne rencontrant pas $\Gamma$. En effet, d'après le premier corollaire, $S$ peut être joint à un point $T$ intérieur à $c'$ et étranger à $\Gamma$. $T$ est, relativement à $\Gamma_1$, dans la même région que $M$ ou que $N$. Soit $R$ le premier point de rencontre à partir de $T$, du segment $TJ$ avec $\Gamma$ (et avec $\Gamma_1$, puisque $TJ$ est dans $c'$). En vertu du second corollaire, on peut joindre $T$ à $M$ (ou $T$ à $N$) par une ligne brisée $TT_1 M_1 M$ (ou $TT_1 N_1 N$) étrangère à $\Gamma_1$, et intérieure à $c$, puisque $c$ contient les segments $MP$, $NQ$, $TR$, l'un des deux arcs $PR$ et l'un des deux arcs $QR$. Comme l'arc direct $HK$ de $\Gamma$ ne pénètre pas dans $c$, la même ligne brisée est sans points communs avec $\Gamma$. Donc, $\Gamma$ divise le plan en deux régions au plus.

D'ailleurs, $M$ et $N$ sont dans deux régions différentes de $\Gamma$, sinon on pourrait joindre $M$ à $N$ par une ligne brisée étrangère à $\Gamma$ et située dans $c$. Donc, cette même ligne ne rencontrerait pas $\Gamma_1$, et par suite $M$ et $N$ seraient dans la même région de $\Gamma_1$, ce qui est faux par hypothèse.

Donc, $\Gamma$ divise le plan en deux régions et deux seulement. Le théorème de JORDAN est donc démontré. Nous avons au surplus obtenu un procédé pour définir le côté positif de $\Gamma$ en un point $J$. On se donne $c$. On en déduit $c'$, puis une corde $HK$ de $\Gamma$, telle que ni cette corde, ni l'arc direct $HK$ ne rencontrent $c$. La courbe formée par l'arc direct $KH$ de $\Gamma$ suivi de la corde $HK$, limite une région contenant le côté positif de la corde $HK$. Les points de cette région situés dans $c'$ définissent le côté positif de $\Gamma$ en $J$.

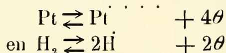
On montre sans difficulté que ce côté est indépendant de la corde auxiliaire choisie $HK$, et que les côtés positifs de $\Gamma$ en tous ses points appartiennent à une même région limitée par $\Gamma$ et que l'on peut appeler région positive de $\Gamma$.

**Scheikunde.** — De Heer P. ZEEMAN biedt namens den Heer A. SMITS een mededeeling aan: „*Het verschijnsel electrische overspanning*”.

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

In een vorige mededeeling [1]) is er reeds op gewezen, dat de metalen, die ons de zoogenaamd onaantastbare electroden leveren, daarin verschillen van de andere metalen, dat zij ideaal traag zijn, zoodat de potentiaalsprong van zoo'n metaal-electrode, t. o. v. een electrolyt, beheerscht wordt door de bestaande electronen-concentratie in dezen electrolyt. Laat ons nu onderstellen, dat een gladde platina-electrode, in een waterige oplossing van zontzuur gedompeld, tot kathode wordt gemaakt, dan kunnen wij gemakkelijk inzien wat er gebeuren zal.

De twee evenwichten, die hier ter sprake komen, zijn:



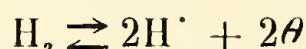
$$Pt \rightleftarrows Pt^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 4\theta$$
$$\text{en } H_2 \rightleftarrows 2H^{\cdot} + 2\theta$$

waarvan het eerste geheel wordt beheerscht door de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht.

Wanneer wij een platina-electrode dompelen in een oplossing van zoutzuur, zal de platina-ionen-concentratie in den electrolyt onmerkbaar klein zijn. Toch kunnen wij over een platina-evenwicht in den electrolyt spreken, dat echter, zooals reeds werd opgemerkt, geheel wordt beheerscht door de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht.

Op grond hiervan kan men zeggen, dat platina van den aanvang af een waterstof-electrode is, maar zoolang de waterstof nog niet als tweede phase is opgetreden, zal het platina een waterstof-electrode zijn, overeenkomstig een waterstofdruk, kleiner dan de druk waaronder de electrolyt verkeert.

Maken wij het platina tot kathode, dan worden er electronen aan toegevoegd, en een gevolg hiervan zal zijn, dat waterstof-ionen uit den electrolyt op het metaal-oppervlak neerslaan en daarin oplossen, waaruit blijkt, dat de waterstof natuurlijk niet onmiddellijk als nieuwe phase aanwezig is. Als het innerlijk evenwicht.



$$H_2 \rightleftarrows 2H^{\cdot} + 2\theta$$

op het metaal-oppervlak zich zéér snel instelde, zou, niettegenstaande

1) Kon. Akad. v. Wet. **26**, (1918).

den toevoer van electronen, dit innerlijk evenwicht in het metaaloppervlak steeds ingesteld zijn. Maar boven een zekere stroomdichtheid, die blijkbaar zéér laag ligt, is dit niet meer het geval, en het metaal-oppervlak zal meer waterstof-ionen en electronen bevatten, dan met het innerlijk evenwicht overeenkomt. Tengevolge hiervan zal de potentiaalsprong, zooals uit de formule

$$\Delta = -\frac{RT}{F} \ln \frac{K_H \cdot (H^{\cdot}_S)}{(H^{\cdot}_L)}$$

blijkt negatiever zijn, dan wanneer zich innerlijk evenwicht had ingesteld. Laat ons nu onderstellen, dat de stroomdichtheid voortdurend wordt opgevoerd, terwijl de potentiaalsprong steeds negatiever wordt, dan zal op een gegeven moment in het metaal-oppervlak oververzadiging aan waterstof optreden, en bij een zekeren graad van oververzadiging zal zich waterstof als tweede phase afzetten. Bij konstanthouden der stroomdichtheid zal de potentiaal-sprong thans een weinig kunnen afnemen, maar bij toeneming der stroomdichtheid zal de potentiaalsprong ook nu nog verder stijgen, omdat al heeft een waterstof-ontwikkeling plaats, dit proces toch gepaard kan gaan met een toename van de concentratie der waterstof-ionen in het oppervlak der electrode, en buitendien doordat de vorming der gasbellen, door verkleining van het aanrakingsoppervlak metaal-electrolyt, de stroomdichtheid zéér sterk doet toenemen. Daar op het oogenblik, dat zich de waterstof als tweede phase gaat afzetten, het metaaloppervlak meer waterstof-ionen en electronen bevat, dan met het innerlijk evenwicht overeenkomt, zal de potentiaal-sprong op dit oogenblik, overeenkomstig de hier boven genoemde formule, sterker negatief zijn, dan met den innerlijken evenwichtstoestand overeenkomt. Dit innerlijk-evenwicht stelt zich in, wanneer zonder stroomdoorgang, waterstof van 1 atmosfeer druk om de geplatineerde platinaelectrode wordt geleid. Het verschil tusschen dezen evenwichts-potentiaal van de waterstof en den potentiaal-sprong, waarbij, tijdens stroomdoorgang, de waterstof zich voor het eerst als tweede phase op de onaantastbare electrode gaat afzetten, noemt men „*overspanning*". Het is duidelijk, dat in het licht der nieuwere beschouwingen dit verschijnsel zich in geen enkel opzicht onderscheidt van het verschijnsel der kathodische polarisatie. De overspanning van waterstof is dan ook niets anders dan een gevolg van de vertraging in de innerlijke evenwichts-instelling bij haar electrolytische afscheiding, en op volkomen dezelfde wijze laat zich de overspanning bij alle andere gasafscheidingen verklaren.

[1]) Zeitschr. f. physik. Chem. 42, 24 (1916).

Men heeft gevonden, dat het bedrag der overspanning bij dezelfde stroomdichtheid nog afhankelijk is van den aard der metaal-electrode; ook dit is in het licht van deze beschouwingen niet zonderling, want de verschillende metaal-electroden zullen een verschillende katalytische werking uitoefenen op de instelling van het innerlijke waterstof-evenwicht. Doch niet alleen de aard van de electrode, maar ook de toestand, waarin een bepaalde electrode verkeert, zal van invloed zijn op de overspanning. Een gepolijste platina-electrode of een geplatineerde platina-electrode geven niet het zelfde resultaat; in het laatste geval is de overspanning practisch nul, hetgeen hierdoor kan worden verklaard, dat het veel grootere oppervlak van den katalysator een snelle instelling van het innerlijk evenwicht veroorzaakt, waar nog bij komt, dat juist door dat grootere oppervlak de werkelijke stroomdichtheid veel kleiner is dan men meent. Tenslotte zal ook de electrolyt nog invloed op de innerlijke evenwichtinstelling kunnen uitoefenen, en zoo zien wij dus, dat de polarisatie-verschijnselen bij gasafscheidingen zich met alle andere electrolytische polarisatie-verschijnselen, van uit het zelfde standpunt laten overzien en verklaren.

*Beschouwingen in het licht van de phasenleer. Een zoogenaamd onaantastbaar metaal als waterstof-electrode.*

In mijn vorige mededeeling „over het electromotorisch gedrag der metalen" [1]) heb ik reeds de onaantastbare electroden en hun bruikbaarheid als gas-electroden behandeld. Daarbij heb ik aangetoond, dat het resultaat dezer beschouwingen op overzichtelijke wijze is aan te geven in een $\Delta$, $x$-fig.

Dat een platina-electrode, gedompeld in een zure oplossing, en omspoeld door waterstof van 1 atmosfeer druk, den waterstof-potentiaal overeenkomstig dezen druk aangeeft, wordt verduidelijkt door nevenstaande fig. 1, die b.v. geldt voor atmosferischen druk en konstante totaal-ionen concentratie.

Ofschoon ons de evenwichts-normaal-potentiaal van platina, ten gevolge van zijn groote traagheid niet bekend is, toch kan met zekerheid worden gezegd, dat deze evenwichtspotentiaal, indien hij gemeten kon worden, zéér sterk positief zou zijn t.o.v. de waterstof. De samenstelling van den electrolyt $c$ zou dan ook praktisch geheel met de as voor de waterstof samenvallen. Met het oog op de overzichtelijkheid heb ik echter in deze schematische teekening het punt $c$ met opzet niet met de $H_2$-as doen samenvallen.

Stel nu, dat een platina-electrode wordt gedompeld in een elec-

[1]) l. c.

trolyt van de samenstelling $x_1$, en dat de electrode met waterstof van 1 atm. druk wordt omspoeld, dan wil onze conclusie uit de vorige mededeeling, dat n.l. het platina-evenwicht, in de vloeistof, wordt beheerscht door de electronen-concentratie van het waterstof-

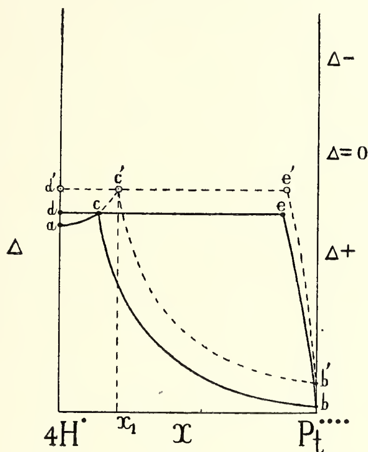



Fig. 1.

evenwicht in den electrolyt, of m. a. w. dat de platina-electrode, waterstof-electrode wordt, het volgende zeggen:

Uit de $\Delta,x$ fig. 1 blijkt, dat de potentiaalsprong van de waterstof t. o. v. den electrolyt $x_1$, wordt aangegeven door het punt C′, liggende op het metastabiele verlengde van *ac*.

Nu volgt echter uit de hier gegeven beschouwingen, dat platina bij het hier genoemde experiment denzelfden potentiaal-sprong zal vertoonen als waterstof, en dat de electrolyt dus niet alleen met waterstof maar ook met platina electromotorisch in evenwicht zal zijn. Dit wil dus zeggen, dat $c'$ niet alleen op het verlengde van *ac*, maar tevens op een lijn ligt, die in de plaats van *bc* getreden is. De lijn *bc* had betrekking op de electrolyten, die electromotorisch koëxisteeren met platina in innerlijk evenwicht, terwijl wij nu te maken krijgen met een kromme, die aangeeft de electrolyten die met een in onedele richting verstoorden toestand van platina kunnen koëxisteeren, en deze kromme ligt dus boven *bc*, en is hier aangegeven door $b'c'$.

De potentiaal-sprong, dien wij dus aan de platina-electrode in het hier ondersteIde geval meten, is de potentiaal-sprong bij het drie-

phasen evenwicht $d'c'e'$, waarin $d'$ de waterstof-phase, $c'$ den electrolyt, en $e'$ de waterstofhoudende platina-phase voorstelt.

Zooals reeds werd gezegd ligt $c$ practisch op de waterstof-as, en daar nu bij gebruik van een onaantastbare electrode, als waterstof-electrode, de onaantastbare electrode wordt gedompeld in een electrolyt, die practisch vrij is van de ionen van het electrode-materiaal, ligt de samenstelling $x_1$, eveneens geheel aan den waterstofkant, zoodat ook het punt $c'$, evenals $c$ practisch met $a$ zal samenvallen, d. w. z. de verschillende onaantastbare electroden zullen, als waterstof-electrode toegepast, onder dezelfde omstandigheden practisch denzelfden potentiaal-sprong vertoonen.

*De overspanning met de $\Delta$,x-fig. toegelicht.*

Dompelen wij een gladde platina-electrode in een groote hoeveelheid van een electrolyt van de samenstelling $x_1$, en maken wij haar daarop tot kathode, dan geeft fig. 2 de opeenvolgende toestanden

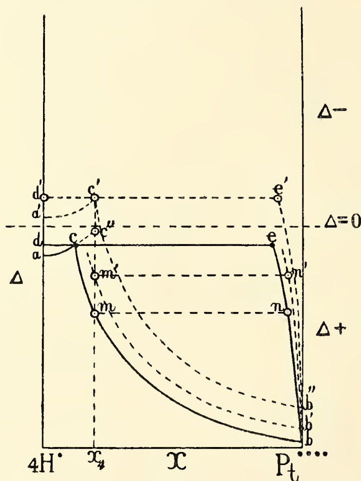



Fig. 2.

aan. Voordat de platina-electrode tot kathode wordt gemaakt, hebben wij electromotorisch evenwicht tusschen den electrolyt $m$ en de verstoorde waterstofhoudende platina-phase $n$. Zoodra het platina kathode wordt, slaan er platina- en waterstof-ionen op het metaal-oppervlak neer, en daar de evenwichts-instelling in het metaal-

oppervlak de ionen-afscheiding niet volgen kan, krijgt men een nog sterker verstoord platina-oppervlak, waarin meer platina en meer waterstof-ionen aanwezig zijn dan met den evenwichtstoestand overeenkomt. Vandaar dan ook, dat een oogenblik na den doorgang van den stroom het punt $n'$ aangeeft den potentiaal-sprong en de samenstelling van de verstoorde, waterstofhoudende platina-electrode, zoodat $m'$ en $n'$ thans de koëxisteerende phasen voorstellen.

Bij toenemende stroomdichtheid verplaatst het electromotorische tweephasen-evenwicht in onze $\Delta,x$-fig. zich voortdurend naar boven, en men zou kunnen meenen, dat de waterstof zich voor het eerst *als phase* zal kunnen afzetten, op het oogenblik dat de lijn, die de electrolyten aangeeft, die met een platina-electrode van bepaalde verstoring kunnen koëxisteeren, juist door het punt $c''$ gaat, of m.a.w. op het oogenblik, dat de verstoring van de platina-electrode in zoodanige mate is toegenomen, dat de potentiaal-sprong wordt aangegeven door een horizontale lijn gaande door $c''$.

Dit zou echter het geval zijn, wanneer de waterstof zich in het metaal-oppervlak in innerlijk evenwicht had kunnen stellen, en er dus geen overspanning was. De overspanning moet juist, zooals reeds werd gezegd, daardoor worden verklaard, dat ook de innerlijke evenwichts-instelling van de waterstof de ionen-afscheiding niet volgen kan. Vandaar dan ook dat de waterstof voor het eerst als tweede-phase optreedt, niet, wanneer de potentiaalsprong van de metaal-phase is gestegen tot $c''$, maar tot een hooger punt, b.v. $c'$. In dit punt, overeenkomende met de samenstelling van den electrolyt, snijden dan de krommen $a'c'$ en $b''c'$ elkaar, welke lijnen betrekking hebben op de electrolyten, die met een verstoorde waterstof resp. platina-phase kunnen koëxisteeren.

De waterstof-phase $d'$, die zich dus afscheidt, is een verstoorde waterstof-phase, daar zij meer waterstof-ionen en electronen bevat dan met den innerlijken evenwichtstoestand overeenkomt.

Uit de figuur is nu direct de overspanning af te lezen; deze is gelijk aan den afstand $c'c''$.

Nu moet hierbij weer opgemerkt worden, dat het punt c practisch met de waterstof-as samenvalt, en dat, wanneer men een platina-electrode in de waterige oplossing van een zuur dompelt de samenstelling $x_1$, practisch met het waterstofpunt samenvalt, en dientengevolge het snijpunt $c'$ eveneens practisch op de waterstof-as zal liggen.

Het is duidelijk, dat de hier gegeven beschouwingen algemeen zijn, en dus ook op de overspanning van andere gassen van toepassing zijn.

Zooals werd aangetoond verschilt het verschijnsel van overspanning in den grond van de zaak niet van dat van de polarisatie. Het eerste is alleen in zoo verre een weinig gecompliceerder, dat hier ook nog een onaantastbare electrode in het stelsel is opgenomen.

Beschouwen wij echter het verschijnsel van overspanning aan niet onaantastbare electroden dan is alle verschil met het gewone polarisatie-verschijnsel verdwenen.

*Algemeen- en anorganisch-chemisch Laboratorium der Universiteit.*

*Amsterdam*, 18 Juni 1918.

**Scheikunde.** — De Heer ZEEMAN biedt, namens de Heeren A. SMITS en C. A. LOBRY DE BRUYN, een mededeeling aan „*Over de periodische passiviteit van ijzer*, II".

(Mede aangeboden door den Heer HOOGEWERFF).

*Periodische passiviteit bij proefnemingen met ingekitte ijzerelectroden.*

In een vorige mededeeling [1]) over dit onderwerp hebben wij aangetoond hoe het ons gelukt is, bij anodische polarisatie van ijzer in een oplossing van 0,473 gr. mol $Fe\,SO_4$ + 0,023 gr. mol $Fe\,Cl_2$ per liter, het verschijnsel der periodische passiviteit te voorschijn te roepen. Bij deze proeven maakten wij gebruik van een 0.3 c.M. lange ijzerelectrode met een oppervlak van ± 0.3 $cM^2$ die door middel van schellak in het korte been van een U-vorming buisje was ingekit. De overwegingen die ons tot deze onderzoekingen leidden waren de volgende. Bij het anodisch oplossen van ijzer in een oplossing van $Fe\,SO_4$ is het innerlijk evenwicht in het metaal-oppervlak boven een zekere stroomdichtheid zoo sterk te verstoren, dat er passiviteit optreedt. Brengt men nu in de oplossing Cl, Br. of J-ionen in een voldoende concentratie, welke echter slechts uiterst gering behoeft te zijn, dan treedt plotseling activeering van het ijzer op. Hieruit volgt, dat bij een bepaalde, door de stroomdichtheid gegeven oplossingssnelheid van het ijzer, een halogeen-ionenconcentratie te vinden moet zijn, waarbij op een bepaald moment de kans, dat het ijzer passief blijft, even groot is als die, dat het actief wordt.

Wanneer nu op dit moment de stroomdichtheid iets wordt verminderd zal stellig de overgang passief-actief optreden.

Terwijl de ijzeranode in den passieven toestand uiterst weinig oplost zal het ijzer, thans actief geworden, in sterke mate in oplossing gaan.

Het contact van de halogeen-ionen met het ijzer zal ten gevolge hiervan verminderen, en daar nu het ijzer bijna geheel aan den katalytischen invloed van de halogeen-ionen is onttrokken, zal het weer in den passieven toestand kunnen overgaan.

Daar nu echter, zooals gezegd, het passieve ijzer zéér weinig oplost, en de processen, die thans aan de anode zich afspelen, be-

[1]) Versl. Kon. Akad. **24**, 745 (1915).

staan uit de ontlading der $SO''_4$-ionen met de daarop volgende $O_2$-ontwikkeling en verder uit een concentratie-vermeerdering der halogeen-ionen, zal door dit laatste proces op een gegeven moment weer activeering intreden enz.

Dit vermoeden werd volkomen bevestigd, en bij gebruik van den uitnemenden galvanometer van Dr. MOLL, namen wij fotografisch eenige buitengewoon regelmatige periodische krommen op, waarvan de maxima en minima 1.74 Volt in ligging van elkaar verschilden. Deze opnamen waren echter in zoover nog onvolledig, dat de tijdlijnen nog werden gemist.

Bij het voortgezet onderzoek hebben wij gebruik gemaakt van een op dit laboratorium vervaardigde fotografische registreer-inrichting met tijd-signaal-apparaat, zoodat op de nieuwe foto's ook de tijdlijnen zichtbaar zijn en dus een betere voorstelling van de regelmatigheid van het verschijnsel verkregen kan worden.

Wij wenschen met deze inrichting nog verschillende vragen te beantwoorden, maar willen, vóór daartoe over te gaan eerst nog een fotografische opname laten volgen van het verschijnsel der periodische passiviteit onder ongeveer dezelfde omstandigheden als vroeger, maar nu met registratie van den tijd.

Deze opname wordt weer gegeven door Fig. 1. De potentiaalsprong loopt hier weer van circa —0,3 Volt, t.o.v. de 1 norm. calomel-electrode, in den actieven toestand, tot ongeveer + 1,4 Volt, in den passieven toestand, terwijl de stroomdichtheid daarbij van 33 m.Amp. terugliep tot 28 m.Amp. per $cM^2$. Daar de tijdlijnen, die zich op een afstand van 3,3 seconde van elkaar bevinden, nu ook opgenomen zijn, is men in staat, beter dan vroeger, de regelmatigheid van het verschijnsel te beoordeelen. De maxima liggen 6,15 sec. uit elkaar. Verder laat deze Fig. 1 zien, dat het ijzer kort actief en betrekkelijk lang passief was. De electrode was ingekit, zooals vroeger en 1,5 cM. lang, en de hevel van de hulpelectrode bevond zich op de halve hoogte der electrode. De oplossing bevatte 0,72 gr. mol. $FeSO_4$ en ± 0,014 gr. mol. $FeCl_2$ per liter oplossing.

Het gehalte aan $FeCl_2$ was dus veel geringer dan vroeger en dientengevolge trad de periodiciteit hier reeds bij een kleinere stroomdichtheid in.

Fig. 2 heeft betrekking op een experiment, met dezelfde electrode, doch genomen met een iets kleinere stroomdichtheid n.l. 30—25 m.Amp. Zooals uit deze opname duidelijk spreekt, heeft dit tengevolge gehad, dat de periodes langer zijn geworden en de tijd gedurende welken het ijzer in actieven toestand verkeerde, ongeveer even lang was geworden als de tijd waarin het ijzer passief was.

Merkwaardig is het, dat wanneer men met deze electrode in deze richting verder tracht te gaan, en den actieven toestand nog langer wil doen duren door de stroomdichtheid nog meer te verminderen, dit slechts korten tijd te handhaven is, en spoedig weer een toestand intreedt, als hier is gefotografeerd.

*Periodische passiviteit bij proefnemingen met niet ingekitte ijzerelectroden.*

Het volgende experiment werd genomen met een electrode, die *niet* ingekit was, maar waarbij een ijzer-electrode eenvoudig 1,5 cM. diep in den electrolyt werd gedompeld, terwijl de hevel der hulpelectrode geheel onderaan tegen de ijzer-electrode was geplaatst. In dit geval was er steeds een activeerende invloed, uitgaande van het ijzer op de hoogte van het vloeistofoppervlak, maar bij orienteerende proeven was ons reeds gebleken, dat deze activeerende invloed toch niet verhinderde, dat het ijzer onderaan de 1,5 cM. lange electrode vrij regelmatige periodische passiviteit vertoonde.

Fig. 3 laat het resultaat zien, dat wij bij dit experiment verkregen. Het verschijnsel is wel is waar niet zóó mooi regelmatig als bij ingekitte electroden, maar groot is het verschil niet.

*Periodische passiviteit op verschillende hoogten onder den vloeistofspiegel.*

Wij wilden nu nagaan hoe een niet ingekitte electrode zich gedraagt op verschillende hoogten onder het vloeistofoppervlak.

Daartoe werden proeven genomen met een electrode, die veel dieper n.l. ruim 5 c.M. onder de vloeistof was gedompeld. Werd de hulpelectrode weer geheel onderaan geplaatst, dan werd evenals bij de minder diepe onderdompeling een tamelijk regelmatige periodiciteit waargenomen, dit toont de opname in Fig. 4. Werd nu de hulp-electrode 1,5 c.M. boven het ondereind tegen de ijzer-electrode geplaatst, dan werd de activeerende invloed van boven uitgaande reeds zéér duidelijk merkbaar. Zoo laat Fig. 4a zien, dat hoewel het verschijnsel nog wel regelmatig is, het karakter van de kromme sterk is gewijzigd. De periodes zijn veel korter; de passieve toestand duurt zeer kort, en merkwaardiger wijze is thans een iets langere activiteits- dan passiviteitsduur wel te handhaven.

In het volgende experiment hebben wij de hulp-electrode op de halve hoogte van het ondergedompelde gedeelte geplaatst, dus ± 2,5 c.M. van den onderkant, en onder deze omstandigheden traden nog

sterkere wijzigingen op, daarin bestaande, dat het ijzer niet altijd even sterk actief werd, en dat regelmatig op twee minder actieve toestanden een meer actieve volgde, of dat een meer actieve en een minder actieve elkaar afwisselden, zooals Fig. 5 en 5*a* duidelijk laten zien. De volgende Fig. 6 heeft betrekking op het verschijnsel dat optreedt, wanneer de hulp-electrode slechts 1 m.m. onder den vloeistof-spiegel tegen de ijzer-electrode wordt geplaatst, en hier uit zien wij, hoe zeer de activeerende invloed, die van het ijzer ter hoogte van den vloeistof-spiegel uitgaat, de periodiciteit in de war stuurt; de regelmaat bestaat thans dan ook slechts hierin, dat de meest actieve toestand op vrij geregelde tijden terugkeert.

De stroomsterkte van den polariseerenden stroom was, zooals verwacht kon worden, volkomen regelmatig periodisch.

*Invloed van de grootte van het oppervlak op de periodische passiviteit.*

Ten slotte hebben wij nagegaan wat de invloed is van een vergrooting van het ondergedompelde oppervlak. Daartoe hebben wij de proef genomen met een spiraal, waarvan 5 windingen met een gezamenlijke lengte van 60 c.M. in den electrolyt, waren ondergedompeld. De kathode bevond zich binnen de windingen, terwijl de hulp-electrode tegen de tweede winding van boven was geplaatst. Terwijl de stroomsterkte weer regelmatig periodisch was, vertoonde de potentiaal-sprong zéér onregelmatige schommelingen, zooals Fig. 7 duidelijk laat zien. De onregelmatigheid was zoo groot, dat zelfs de meest actieve toestand niet regelmatig terugkeerde, en de geheele kromme vertoont dan ook de periodiciteit onder den invloed van groote storingen. Het was bij beschouwing van de ijzer-electrode dan ook duidelijk waar te nemen, dat deze nooit op het zelfde moment over de geheele oppervlakte passief resp. actief was, maar dat verschillende gedeelten op verschillende tijden werden geactiveerd.

Deze kromme is een zeer schoone demonstratie van het reeds vroeger door ons geconstateerde feit, dat een stuk ijzer des te moeilijker is te passiveeren, naarmate het oppervlak grooter is.

*Algemeen- en Anorganisch Chemisch Laboratorium der Universiteit.*

*Amsterdam*, 27 Juni 1918.

PLAAT I.

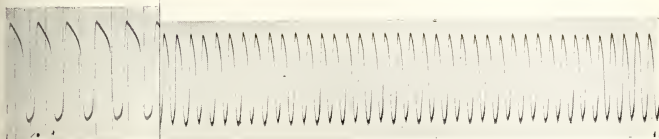


Fig. 1. Ingekittele lang 5.3 cm., diameter 3 mm. niet ingekit. Oplossing als per Liten fig. 1. Potentiaal gemeten 1.5 cm. van onder af. Stroomgemeten —43 milli-ampère/cm². 1 periode 2.7 secunde. 1 period

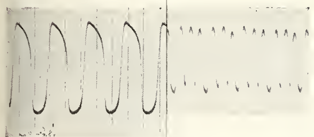


Fig. 2. Electrod lang 5.1 cm., diam. Potentiaal gemeten bij proeroomdichtheid 30— 1 period². 1 periode 2.2 sec.

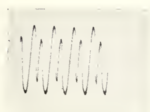


Fig. 5*a*. Electrode, oplossing en plaatsing hevel voor potentiaalmeting als in Fig. 5. Stroomdichtheid 28—32 milli-ampere/cm².

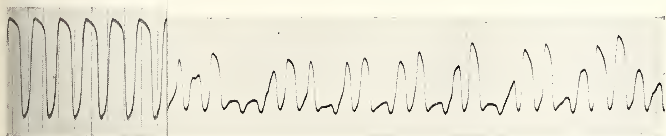


Fig. 3. Electrode oplossing als in Fig. 5. Potentiaal gemeten 1 mm. onder het bij de prvlak. Stroomdichtheid 47—53.5 milli-ampère/cm². 1 periode Stroomdi

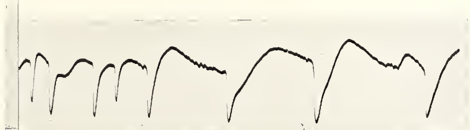


Fig. 4. Electrode ± 60 cm., diameter 3 mm. electrode in 5 windingen spiraal-als bij dden. Potentiaal gemeten aan de tweede winding van boven. kant af. S bij ± 0.5 ampère regelmatig periodiek. secunden

sterkere wijzigingen op, daarin bestaande, dat het ijzer niet altijd even sterk actief werd, en dat regelmatig op twee minder actieve toestanden een meer actieve volgde, of dat een meer actieve en een minder actieve elkaar afwisselden, zooals Fig. 5 en 5*a* duidelijk laten zien. De volgende Fig. 6 heeft betrekking op het verschijnsel dat optreedt, wanneer de hulp-electrode slechts 1 m.m. onder den vloeistof-spiegel tegen de ijzer-electrode wordt geplaatst, en hier uit zien wij, hoe zeer de activeerende invloed, die van het ijzer ter hoogte van den vloeistof-spiegel uitgaat, de periodiciteit in de war stuurt; de regelmaat bestaat thans dan ook slechts hierin, dat de meest actieve toestand op vrij geregelde tijden terugkeert.

De stroomsterkte van den polariseerenden stroom was, zooals verwacht kon worden, volkomen regelmatig periodisch.

*Invloed van de grootte van het oppervlak op de periodische passiviteit.*

Ten slotte hebben wij nagegaan wat de invloed is van een vergrooting van het ondergedompelde oppervlak. Daartoe hebben wij de proef genomen met een spiraal, waarvan 5 windingen met een gezamenlijke lengte van 60 c.M. in den electrolyt, waren ondergedompeld. De kathode bevond zich binnen de windingen, terwijl de hulp-electrode tegen de tweede winding van boven was geplaatst. Terwijl de stroomsterkte weer regelmatig periodisch was, vertoonde de potentiaal-sprong zéér onregelmatige schommelingen, zooals Fig. 7 duidelijk laat zien. De onregelmatigheid was zoo groot, dat zelfs de meest actieve toestand niet regelmatig terugkeerde, en de geheele kromme vertoont dan ook de periodiciteit onder den invloed van groote storingen. Het was bij beschouwing van de ijzer-electrode dan ook duidelijk waar te nemen, dat deze nooit op het zelfde moment over de geheele oppervlakte passief resp. actief was, maar dat verschillende gedeelten op verschillende tijden werden geactiveerd.

Deze kromme is een zeer schoone demonstratie van het reeds vroeger door ons geconstateerde feit, dat een stuk ijzer des te moeilijker is te passiveeren, naarmate het oppervlak grooter is.

*Algemeen- en Anorganisch Chemisch Laboratorium der Universiteit.*

*Amsterdam*, 27 Juni 1918.

PLAAT I

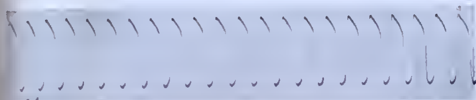


Fig. 1. Ingekitte ijzerelectrode lang 1.5 cm., diameter 3 mm. Oplossing bevat per Liter 0.72 gr. mol. $FeSO_4$ ± 0.014 gr. mol. $FeCl_3$. Potentiaal gemeten op halve hoogte. Stroomdichtheid 28—33 milli-ampère cm². 1 periode 6.15 secunden. Verschil der uiterste waarden ± 1.7 Volt.

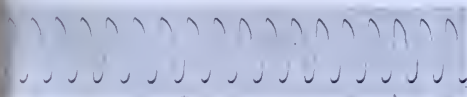


Fig. 2. Electrode, oplossing en plaatsing hevel voor potentiaalmeting als bij proef in fig. 1. Stroomdichtheid 25—30 milli-ampère cm². 1 periode 7.8 secunden.

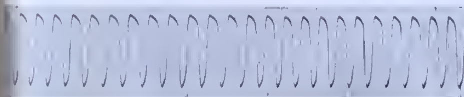


Fig. 3. Electrode lang 1.4 cm., diameter 3 mm., niet ingekit, oplossing als bij de proef in fig. 1. Potentiaal gemeten onder aan de electrode. Stroomdichtheid 32—36 milli-ampère cm². 1 periode 5.25 secunden.

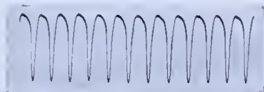


Fig. 4. Electrode lang 5.1 cm., diameter 3 mm., niet ingekit. Oplossing als bij de proef in fig. 1. Potentiaal gemeten 1 mm. van de onderkant af. Stroomdichtheid 24—39 milli-ampère cm². 1 periode ± 5.1 secunden.

PLAAT II.

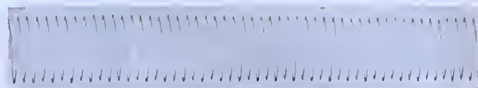


Fig. 4*a*. IJzerelectrode lang 5.3 cm., diameter 3 mm. niet ingekit. Oplossing als bij proef in fig. 1. Potentiaal gemeten 1.5 cm. van onder af. Stroomdichtheid 38—43 milli-ampère cm². 1 periode 2.7 secunde.

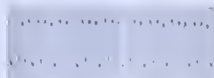


Fig. 5. IJzerelectrode lang 5.1 cm., diam. 3 mm. niet ingekit. Potentiaal gemeten op halve hoogte. Stroomdichtheid 30—34 milli-ampère cm². 1 periode 2.2 sec.

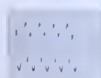


Fig. 5*a*. Electrode, oplossing en plaatsing hevel voor potentiaalmeting als in Fig. 5. Stroomdichtheid 28—32 milli-ampere cm².

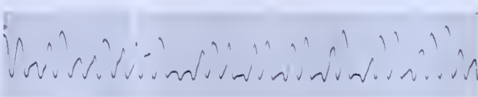


Fig. 6. Electrode en oplossing als in Fig. 5. Potentiaal gemeten 1 mm. onder het vloeistof-oppervlak. Stroomdichtheid 47—53.5 milli-ampère cm². 1 periode 3.65 secunde.

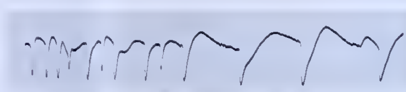


Fig. 7. Electrode lang ± 60 cm., diameter 3 mm. electrode in 5 windingen spiraalvormig gewonden. Potentiaal gemeten aan de tweede winding van boven. Stroomsterkte bij ± 0.5 ampère regelmatig periodiek.

**Scheikunde.** — De Heer S. HOOGEWERFF biedt, namens de Heeren A. SMITS en V. S. F. BERCKMANS, een mededeeling aan „*Over het stelsel aether-chloroform*".

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

1. De aanleiding tot ons onderzoek omtrent het stelsel aether-chloroform was een opmerking van een medicus tot een van ons gericht. Hij wees n.l. op de betrekkelijk groote warmte-ontwikkeling, die bij menging van deze twee stoffen optreedt, een verschijnsel dat het eerst door GUTHRIE [1]) was waargenomen en aanleiding was geweest tot de aanname van het bestaan van een zoogenaamde moleculaire verbinding, en wel van de samenstelling $(C_2H_5)_2O.CHCl_3$, omdat het warmte-effect juist een maximum waarde bereikt bij een mengsel van deze samenstelling, zooals uit nevenstaande figuur 1 volgt.

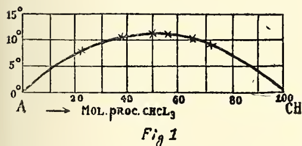


Fig 1

GUTHRIE meende verder nog steun te vinden voor deze aanname in de resultaten van zijn onderzoekingen omtrent de volumcontractie en de dampspanning van aether-chloroform-mengsels, en het schijnt, dat hij ook heeft getracht zijn aanname te toetsen door middel van stolpuntsbepalingen. Hij zegt n.l.: „De vloeistof van genoemde samenstelling stolt beneden 0° tot een witte kristallijne massa bij een constante temperatuur, welke ik zal opgeven, wanneer ik haar nauwkeurig zal hebben bepaald". GUTHRIE is echter niet meer op deze stolpuntsbepalingen teruggekomen.

DOLEZALEK en SCHULZE [2]) kwamen later op grond van hunne onderzoekingen omtrent warmte-ontwikkeling en volumecontractie tot het resultaat, dat deze verschijnselen maximaal zijn bij een aequimoleculair mengsel van aether en chloroform. In de overtuiging, dat deze verschijnselen moesten worden toegeschreven aan het ontstaan van een verbinding hebben zij door gefractioneerde kristallisatie getracht deze verbinding af te zonderen en vonden op deze wijze bij gebruik van een pentaan-thermometer voor het stolpunt circa —80°.

[1]) Phil. Mag. **5** 18, 508 (1884).

[2]) Zeitschr. f phys. Chem. **83**, 45 (1913).

Op grond van hun waarnemingen komen DOLEZALEK en SCHULZE op deze wijze, evenals GUTHRIE vóór hen, tot de conclusie, dat in het stelsel aether-chloroform een aequimoleculaire verbinding optreedt, die in de vloeistof-phase min of meer gedissocieerd is.

**2.** Om de vraag naar het al of niet optreden van een verbinding met volkomen zekerheid te kunnen beantwoorden is het noodig de smeltfiguur van het stelsel te bepalen en dit is dan ook de reden geweest, waarom dit onderzoek hier ter hand is genomen.

Bij gebruik van den snellen en gevoeligen weerstandsthermometer van de Heeren DE LEEUW EN ZERNIKE, een fabrikaat van het Amsterdamsch anorganisch-chemisch Laboratorium, werden de in de hiernevenstaande tabel vermelde resultaten verkregen.

Geeft men deze uitkomsten in een $T,X$-figuur weer, dan krijgt men het volgende:

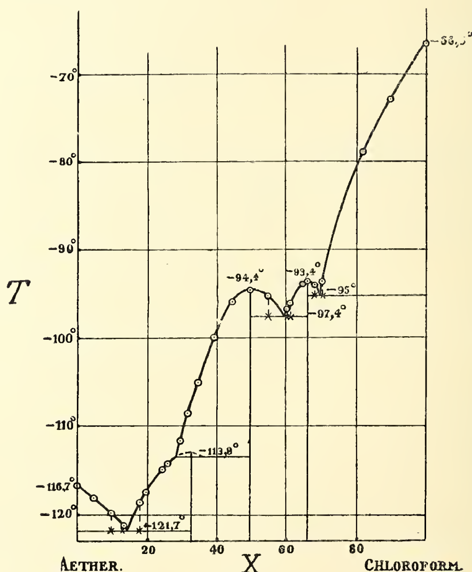
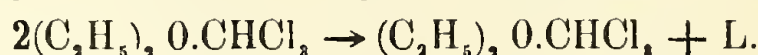



Fig. 2.

Deze figuur (2) laat in de eerste plaats zien, dat de onderstelling van GUTHRIE, DOLEZALEK en SCHULZE juist is, en dat in dit stelsel inderdaad een aequimoleculaire verbinding met een stolpunt, gelegen

| No. der mengsels | Gewicht in grammen | | Moleculen procenten | | 1e Stolpunt | | Eindstolpunt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $CHCl_3$ | Aether | $CHCl_3$ | Aether | | Herhaling met oud mengsel | |
| 1 | — | — | 100.00 | — | — 66.5 | | |
| 2 | 21.545 | 1.479 | 90.04 | 9.96 | — 72.6 | — 72.3 | |
| 3 | 21.509 | 2.975 | 81.77 | 18.23 | — 78.7 | | |
| 4 | 8.358 | 2.223 | 70.00 | 30.00 | — 93.5 | | — 95.3 |
| 5 | 15.807 | 4.226 | 69.89 | 30.11 | — 94.2 | — 93.8 | — 95.1 |
| 6 | 8.119 | 2.371 | 68.00 | 32.00 | — 93.6 | | |
| 6*a* | 8.119 | 2.371 | 68.10 | 32.00 | — 93.5 | | — 94.7 |
| 7 | 7.952 | 2.468 | 66.66 | 33.33 | — 93.5 | | |
| 7*a* | 7.952 | 2.468 | 66.66 | 33.33 | — 93.3 | | |
| 8 | 7.761 | 2.594 | 65.00 | 35.00 | — 93.6 | — 93.6 | |
| 8*a* | 7.761 | 2.594 | 65.00 | 35.00 | — 93.9 | | |
| 9 | 7.283 | 2.890 | 61.00 | 39.00 | — 96.0 | | — 98.1 |
| 10 | 7.164 | 2.964 | 60.00 | 40.00 | — 96.4 | | — 97.4 |
| 11 | 14.328 | 6.022 | 59.62 | 40.38 | — 96.8 | — 96.4 | |
| 12 | 6.567 | 3.335 | 55.00 | 45.00 | — 95.1 | | — 97.4 |
| 13 | 11.947 | 7.414 | 50.00 | 50.00 | — 94.4 | — 94.4 | |
| 13*a* | 5.970 | 3.705 | 50.00 | 50.00 | — 94.4 | | |
| 14 | 11.956 | 9.021 | 45.13 | 54.87 | — 95.8 | | |
| 15 | 4.776 | 4.446 | 40.00 | 60.00 | — 99.7 | | |
| 15*a* | 11.41 | 10.609 | 40.03 | 59.97 | — 99.9 | — 99.8 | |
| 16 | 4.179 | 4.817 | 35.00 | 65.00 | —104.8 | —105.1 | |
| 16*a* | 4.179 | 4.817 | 35.00 | 65.00 | —104.9 | | |
| 17 | 3.976 | 4.935 | 33.33 | 66.66 | —108.1 | | |
| 18 | 7.798 | 11.266 | 30.05 | 69.95 | —111.4 | —110.5 | |
| 18*a* | 3.582 | 5.196 | 29.97 | 70.03 | —111.4 | | |
| 18*b* | 3.582 | 5.226 | 29.84 | 70.16 | —111.4 | | |
| 19 | 3.224 | 5.409 | 27.00 | 73.00 | —114.3 | | |
| 20 | 2.985 | 5.558 | 25.00 | 75.10 | —114.7 | | |
| 20*a* | 2.985 | 5.558 | 25.00 | 75.10 | —114.3 | | |
| 21 | 4.798 | 11.888 | 20.03 | 79.97 | —117.2 | —117.5 | |
| 21*a* | 2.388 | 5.928 | 20.00 | 80.00 | —117.6 | | |
| 22 | 4.327 | 11.717 | 18.65 | 81.35 | —118.4 | —118.3 | —121.7 |
| 23 | 1.791 | 6.302 | 14.99 | 85.01 | —121.5 | | —121.7 |
| 24 | 1.991 | 11.113 | 10.01 | 89.99 | —119.9 | —120.1 | —121.6 |
| 24*a* | 1.993 | 11.133 | 9.99 | 90.01 | —120.2 | | |
| 25 | 0.616 | 7.063 | 5.13 | 94.87 | —118.3 | | |
| 26 | — | — | — | 100.00 | —116.4 | —116.4 | |

bij — 94,4°, aanwezig is; maar —, en vooral hierdoor blijkt, hoe noodig de studie van de smeltfiguur is om met zekerheid volledig ingelicht te worden omtrent het optreden van verbindingen, — wij zien tevens, dat er nog twee andere verbindingen optreden n.l. van de samenstelling $2\,(C_2H_5)_2O.\,CHCl_3$ en $(C_2H_5)_2O.\,2\,CHCl_3$, waarvan de tweede een stolpunt heeft, gelegen bij —93,3°, terwijl de eerste geen stabiel smeltpunt vertoont, maar, voordat deze temperatuur is bereikt, n.l. bij —113,8°, de volgende omzetting ondergaat;



$$2(C_2H_5)_2\,O.CHCl_3 \rightarrow (C_2H_5)_2\,O.CHCl_3 + L.$$

Het is nu interessant hierbij te beschouwen de *px*-figuren van hetzelfde stelsel, zooals deze door KOHNSTAMM en VAN DALFSEN eenerzijds en door DOLEZALEK anderzijds bij 33°,25; 60° en 100° zijn gevonden (fig. 3).

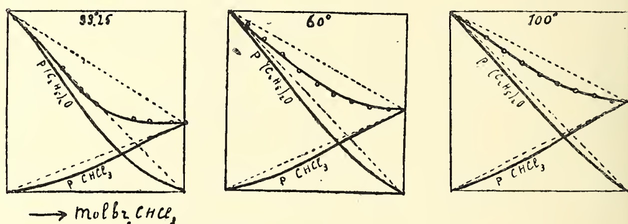



Fig. 3.

Het is thans zeer waarschijnlijk, dat de eigenaardige gedaante dezer *px*-figuren, vooral die voor de laagste temperatuur, niet alleen door physische, maar *daarnaast* ook door chemische krachten is beïnvloed.

*Algemeen en anorganisch-chemisch Laboratorium der Universiteit.*

*Amsterdam*, 26 Juni 1918.

**Scheikunde.** — De Heer S. HOOGEWERFF biedt, namens de Heeren A. SMITS en J. M. BIJVOET, een mededeeling aan *„Over het stelsel ijzer-zuurstof"*.

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

De evenwichten, waartoe de reacties tusschen ijzer-oxyden en reduceerende gassen als kooloxyd en waterstof aanleiding geven, zijn reeds meerdere malen onderwerp van een wetenschappelijk onderzoek geweest.

Zoo bestudeerde men van de gasphase der driephasen-evenwichten $FeO + Fe + G$ en $Fe_3O_4 + FeO + G$, de verhouding $\frac{(CO)}{(CO_2)}$ resp. $\frac{(H_2)}{(H_2O)}$ [1]).

Men bestudeerde driephasen-stelsels van drie komponenten, stelsels dus, die bij konstanten druk monovariant waren. De druk behoefde hierbij echter niet constant gehouden te worden, omdat bovengenoemde verhoudingen onafhankelijk daarvan zijn. Als resultaat leverden de onderzoekingen met CO als reduceerend gas, voor het homogene evenwicht in de gasphase, die met twee vaste phasen koëxisteert, twee evenwichts-lijnen op, die driephasen-lijnen genoemd kunnen worden, en wel een voor $FeO + Fe + G$, en een andere voor $Fe_3O_4 + FeO + G$, waarvan door SCHEFFER [2]) werd aangetoond, dat zij op grond van het warmte-effect der omzettingen elkaar moesten snijden.

Onderzoekingen met $H_2$ als reductie-middel gaven niet alleen de ligging van de driephasenlijn voor $Fe + FeO + G$, maar ook die voor $Fe + Fe_3O_4 + G$. Dit laatste werd waarschijnlijk gemaakt door REINDERS, die tevens met behulp van het watergasevenwicht de ligging van de driephasenlijn voor $Fe_3O_4 + FeO + G$ in dit stelsel berekende uit de overeenkomstige lijn voor de reductie met CO. Teekenen wij de driephasenlijnen voor $Fe_3O_4 + FeO + G$ en voor $FeO + Fe + G$, voor het geval $G = CO + CO_2$, dan krijgen wij, indien *log* K

[1]) Literatuur-overzicht dezer onderzoekingen is opgegeven in de verhandeling van den heer REINDERS over: de evenwichten van ijzeroxyde met waterstof en waterdamp. Chem. Weekblad **15**, 180 (1918).

[2]) Deze Verslagen **25**, 600 (1916).

als functie van T wordt uitgezet de volgende figuur 1, waarin van het snijpunt, dat hier een quadrupelpunt is, zooals SCHEFFER opmerkt, nog een derde driephasenlijn voor $Fe + Fe_3O_4 + G$ moet uitgaan.

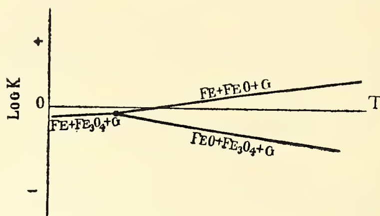



Fig. 1.

*Over de menging van de vaste phasen $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$.*

Nu doet zich de vraag voor, of er ook nog een driephasenlijn bestaat voor $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$.

SOSMAN en HOSTETTER [1]) meenen uit hunne bepalingen omtrent de dissociatie-spanning en de lichtbreking van mengsels $Fe_2O_3 + Fe_3O_4$ te moeten afleiden, dat de oxyden $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$, in den vasten toestand, zoo niet in alle verhoudingen, dan toch tot zéér dicht bij de samenstelling $Fe_3O_4$ mengbaar zijn. Bestond hier inderdaad eën continue mengkristal-reeks, dan zou er geen driephasenlijn voor $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + C$ optreden, en de hier besproken figuur zou volledig zijn.

Het is echter de vraag of wij hier op grond van het onderzoek van SOSMAN en HOSTETTER tot een continue mengkristalreeks mogen besluiten. Ontwerpen wij een $p,x$-doorsnede van het stelsel *zuurstof-ijzer* overeenkomstig de temperatuur 1100°, aannemende dat $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$ in den vasten toestand slechts beperkt mengbaar zijn, dan komen wij tot de schematische voorstelling in Fig. 2 geteekend.

In deze $p,x$-doorsnede, waarin aangenomen is, dat de oxyden een zekere menging in den vasten toestand vertoonen, geeft de lijn $df$ de $Fe_2O_3$-rijke mengkristallen aan, die koëxisteeren met de dampen $be$, terwijl de lijn $gk$ betrekking heeft op $Fe_3O_4$-rijke mengkristallen, die met de dampen $eh$ kunnen koëxisteeren.

Een punt op de lijn $df$, hier $p$, komt overeen met de samenstelling $Fe_2O_3$, en zoo komt een punt van de lijn $gk$, n.l. $q$ overeen met de samenstelling $Fe_3O_4$.

Hieruit volgt onmiddellijk, welke kromme men krijgen moet,

[1] Journal Amer. chem. Soc. **38**, 807 (1916).

wanneer men van $Fe_2O_3$ uitgaat en bij de konstante temperatuur, van b.v. 1100°, telkens een hoeveelheid van de dampphase wegneemt. De totaal-samenstelling zal dan veranderen in de richting van $Fe_2O_3$ naar $Fe_3O_4$, en de druk zal daarbij ook een verandering ondergaan.

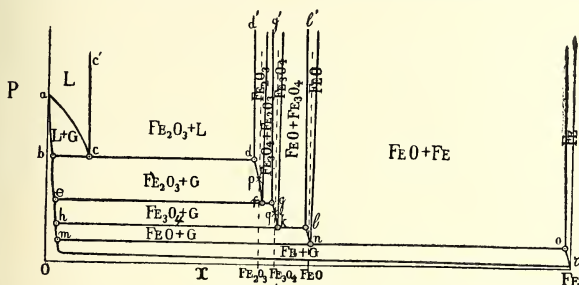


Fig. 2.

Eerst zal de druk geleidelijk dalen van $p$ naar $f$. Tijdens deze drukafname koëxisteeren twee phasen, n.l. $Fe_2O_3$-rijke mengkristalphasen en dampen, die bijna uitsluitend uit zuurstof bestaan. Is de druk tot dien van het driephasenevenwicht $efg$ gedaald, dan zal zich naast de $Fe_2O_3$-rijke mengkristalphase $f$, nog een $F_3O_4$-rijke mengkristalphase $g$ afzetten, en er ontstaat dan een driephasenstelsel, waarvan de phasenregel verlangt, dat bij evenwicht de druk konstant blijft. Bij voortgezette onttrekking van een gedeelte van de gasphase, waarbij de totaalsamenstelling voortdurend naar rechts verschuift, blijft dus de druk konstant, totdat het laatste spoortje van de $Fe_2O_3$-rijke mengkristalphase geheel is verdwenen. Op dit oogenblik koëxisteeren alleen de damp en de $Fe_3O_4$-rijke mengkristalphase $g$, en bij verdere onttrekking van de gasphase zal de druk weer gelijkmatig dalen, waarbij de vaste phase zich verplaatst langs $gk$ omlaag.

Teekenen wij nu de dampspanning als functie van de totaalsamenstelling, dan voorspelt dus de theorie, dat bij gedeeltelijke menging van de twee oxyden $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$, in den vasten toestand, een gebroken lijn, zooals in Fig. 3 schematisch is voorgesteld, gevonden zal worden, waarvan het middelste stuk horizontaal loopt.

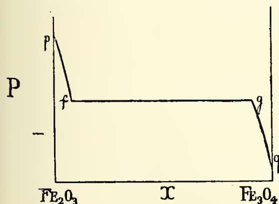


Fig. 3.

Dit is de theoretische kromme, en

nu is het direct in te zien, waarin de experimenteel bepaalde van deze zal verschillen.

In de eerste plaats spreekt het van zelf, dat men door allerlei storende beïnvloedingen dezer kleine drukken, zooals b.v. de aanwezigheid van sporen geadsorbeerde gassen of verontreinigingen, en het langzaam verloopen der dissociatie, veel kans heeft het middenstuk niet horizontaal, maar min of meer hellend te vinden; en in de tweede plaats zal men de aansluiting van de twee hellende stukken op het horizontale gedeelte niet discontinu, maar steeds kontinu vinden, vooral wanneer men in de onmiddellijke omgeving van *f* en *g* veel waarnemingen doet. In plaats van de hierboven gegeven gebroken lijn zal men in het gunstigste geval dus vinden de kontinue kromme van fig. 4.

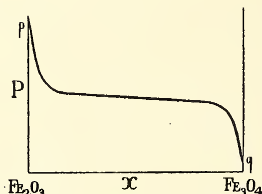



Fig. 4.

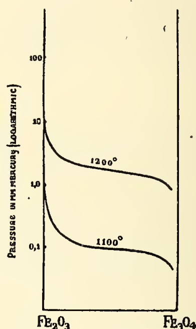



Fig. 5.

Vergelijken wij met deze kromme de lijnen, die door Sosman en Hostetter werden gevonden, welke in Fig. 5 zijn weergegeven, dan zien wij dus, dat de gevonden krommen zéér veel gelijken op die, welke de theorie bij slechts *gedeeltelijke* menging van $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$ in den vasten toestand, doet verwachten.

Alles hangt er hier van af, of het niet horizontaal zijn van het tusschenstuk essentieel is of niet, want indien dit wel essentieel is en de waargenomen drukkingen komen overeen met de evenwichtstoestanden, dan zou dit verloop van de isotherm inderdaad pleiten voor het bestaan van een continue mengkristalreeks. Een bevestiging voor de opvatting, dat de menging van $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$ continu is, zien Sosman en Hostetter in het feit, dat de brekings-indices der mengsels verre van evenredig met de hoeveelheid $Fe_3O_4$, tusschen haematiet ($\varepsilon = 2{,}78$) en magnetiet ($n = 2{,}42$), veranderen.

Zij geven n.l. de volgende resultaten.

| Samenstelling v/h. mengsel | $\varepsilon$ voor 700 $\mu\mu$ |
|---|---|
| Haematiet | 2.74 |
| 0.58 % FeO | 2.74 |
| 5.60 „ „ | 2.73 |
| 12.99 „ „ | 2.72 |
| 16.11 „ „ | 2.71 |
| 17.79 „ „ | 2.71 |
| — | — |
| Magnetiet (31.03 % FeO) | $n = 2.42$ |

Naar het ons voorkomt zien zij hierbij echter over het hoofd, dat het bij ontmenging geenszins onmogelijk is, dat de $Fe_3O_4$-rijke phase van het ontmengingsevenwicht, door haar gehalte aan $Fe_2O_3$, een veel sterker breking vertoont, dan het zuivere magnetiet. Deze mogelijkheid is ook geenszins onwaarschijnlijk, omdat uit de bovenstaande bepalingen toch reeds volgt, dat onafhankelijk ervan of al dan niet ontmenging wordt aangenomen, de breking ergens in het optisch niet onderzochte gebied veel sneller zal moeten afnemen, dan aan den $Fe_2O_3$-kant.

Buitendien moet worden bedacht, gelijk ook SOSMAN [1]) opmerkte, dat indien we een continue menging-reeks aannemen, tusschen het hexagonale haematiet en het regulaire magnetiet, dit een voorbeeld zou zijn van een continue menging tusschen niet isomorphe stoffen, iets dat nog in geen enkel geval experimenteel is vastgesteld.

Nu kan, indien we aannemen dat uit de $p, x$ Fig. bij 1100° en 1200° inderdaad tot een continue mengkristal-reeks tusschen $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$ besloten moet worden, de genoemde moeilijkheid nog ondervangen worden door de aanname dat bij deze temperatuur de twee oxyden isomorph zijn; daar SOSMAN en HOSTETTER konstateerden dat de homogene mengkristalphasen dubbelbrekend zijn, zou dan magnetiet beneden 1100° een overgangspunt moeten bezitten, waarboven de regulaire vorm metastabiel is. Deze niet waarschijnlijke verandering van kristalklasse is echter niet geconstateerd en kan bovendien de continue menging niet aannemelijk maken voor temperaturen onder die van het overgangspunt.

1) Journ. of the Washington Ac. of Science 7, 10 (1917).

Hoe het ook zij, het bestaan van een continue mengingreeks van $Fe_2O_3 + Fe_3O_4$ lijkt ons nog niet bewezen, en wij achten het daarom gewenscht er rekening mede te houden, dat in Fig. 1 wellicht nog een driephasenlijn ontbreekt n.l. die voor $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$, liggende onder die voor $FeO + Fe_3O_4 + G$.

Deze ligging doet de vraag rijzen, of deze nieuwe driephasenlijn een andere kan snijden. Sneed zij de driephasenlijn voor $Fe + Fe_3O_4 + G$, dan zou de samenhang worden als in Fig. 6 is aangeduid.

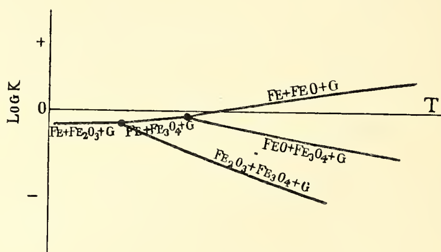
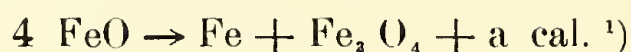


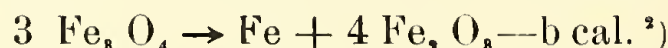

Fig. 6.

De gevolgtrekking, dat de driephasenlijnen voor $Fe + FeO + G$ en $Fe_3O_4 + FeO + G$ elkaar snijden, en dit snijpunt dus de laagste temperatuur aangeeft, waarbij $FeO$ naast de gasphase G stabiel kan optreden, is geheel in overeenstemming met het teeken van de omzetting, die bij warmte-onttrekking in dit punt moet plaats grijpen n.l.



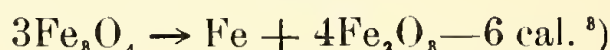
$$4\ FeO \rightarrow Fe + Fe_3O_4 + a\ \text{cal.}$$ [1]

Sneden nu ook de driephasenlijnen voor $Fe + Fe_3O_4 + G$ en $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$ elkaar op de hier aangewezen wijze, dan zou in dit snijpunt bij warmte-onttrekking de omzetting



$$3\ Fe_3O_4 \rightarrow Fe + 4\ Fe_2O_3 - b\ \text{cal.}$$ [2]

moeten verloopen, doch dit is in strijd met het warmte-effect van deze reactie. Uit de metingen volgt n.l.



$$3Fe_3O_4 \rightarrow Fe + 4Fe_2O_3 - 6\ \text{cal.}$$ [3]

De onderstelling in Fig. 6 tot uiting gebracht moet dus verworpen worden.

Er blijven nu nog twee mogelijkheden over nl. deze, dat de twee driephasenlijnen voor $Fe_3O_4 + FeO + G$ en voor $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$

---

[1] Comptes Rendus **120**, 623 (1895).

[2] ,, ,, ,, ,, ,,

[3] ,, ,, ,, ,, ,,

elkaar bij hoogere temperatuur snijden, maar dat, voor dat deze snijding plaats heeft, smelting optreedt. In dit geval krijgen wij een ligging, zooals deze door fig. 7 schematisch is aangegeven.

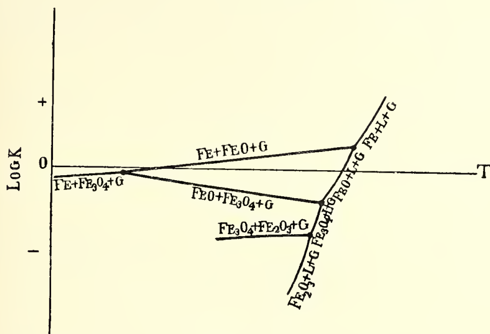



Fig. 7.

Een andere mogelijkheid is deze, dat de zooeven genoemde snijding wel plaats heeft in het stabiele gebied, en dan is de samenhang zooals deze in Fig. 8 is aangeduid.

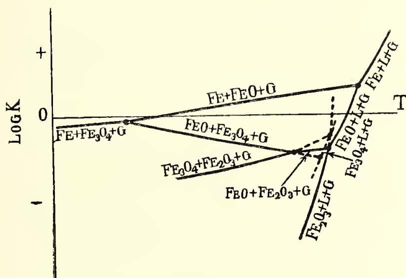



Fig. 8

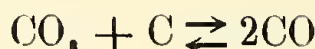
Het zal vrij gemakkelijk zijn experimenteel uit te maken, welke van deze twee laatste figuren met de werkelijkheid overeenstemt.

*Het Hoogoven proces.*

Hiermede is voor het eerst een volledig overzicht gegeven van de driephasenlijnen en de tweephasen-gebieden in het stelsel $Fe—CO—CO_2$ (resp. $Fe—H_2—H_2O$), en daardoor is het nu ook mogelijk geworden

de ons interesseerende reacties, welke zich b.v. in het hoogovenbedrijf afspelen, van het begin tot het eind aan de hand van een grafische voorstelling te verduidelijken.

Daartoe kiezen wij een van onze laatste twee figuren b.v. de waarschijnlijkste, Fig. 7, en teekenen daarin de lijn $pQ$ voor het evenwicht



$$CO_2 + C \rightleftarrows 2CO$$

zooals dit in den hoogoven gelegen is.

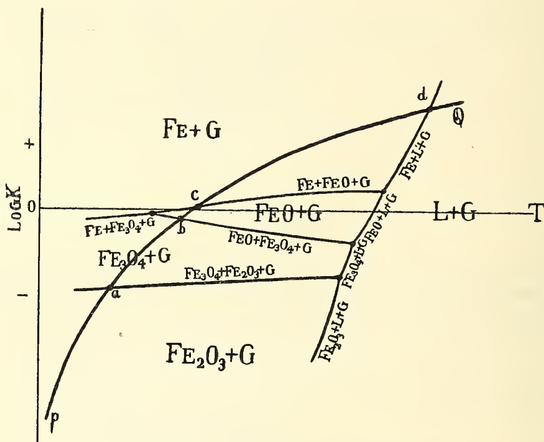



Fig. 9.

Zoo ontstaat Fig. 9, en de processen die in den hoogoven plaats hebben leest men uit de grafische voorstelling af, wanneer men bedenkt, dat men dan den loop van deze evenwichtslijn moet nagaan door de verschillende, hier aangegeven gebieden. Wij gaan dan uit van het punt $P$ en eindigen in $Q$.

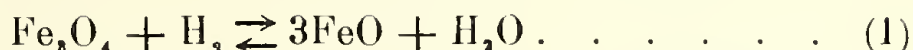
Zoo zien wij dan, dat theoretisch in het punt $a$ voor het eerst de reductie plaats grijpt van $Fe_2O_3$ tot $Fe_3O_4$, vervolgens in $b$ de reductie van $Fe_3O_4$ tot FeO, in $c$ die van FeO tot Fe, terwijl ten slotte in $d$ smelting van het ijzer optreedt. In elk van deze snijpunten, welke vierphasen-evenwichten voorstellen, zullen wij dus bij warmtetoevoer blijven, totdat een der phasen geheel is omgezet.

Het is bekend, dat, vooral de evenwichten met koolstof zich beneden 800° betrekkelijk langzaam instellen, waardoor men, bij proeven met stroomend gas, de hier genoemde trapsgewijze reacties bij tempe-

raturen vindt boven die, overeenkomende met de punten *a*, *b* en *c*. [1])

*Afleiding van de P,T-figuur van het stelsel O—Fe uit de evenwichten van de ijzeroxyden met reduceerende resp. oxydeerende gassen.*

Als men bedenkt dat een evenwicht als het volgende;



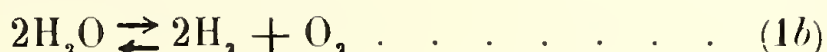
$$Fe_3O_4 + H_2 \rightleftarrows 3FeO + H_2O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

kan worden opgevat als te bestaan uit de twee evenwichten



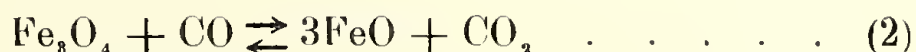
$$2Fe_3O_4 \rightleftarrows 6FeO + O_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1a)$$

en



$$2H_2O \rightleftarrows 2H_2 + O_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1b)$$

en evenzoo



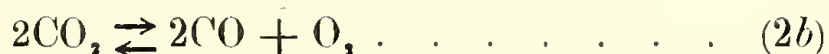
$$Fe_3O_4 + CO \rightleftarrows 3FeO + CO_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

als bestaande uit de evenwichten



$$2Fe_3O_4 \rightleftarrows 6FeO + O_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2a)$$

en



$$2CO_2 \rightleftarrows 2CO + O_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2b)$$

dan is het duidelijk, dat men uit de evenwichten (1) en (1*b*) resp. (2) en (2*b*) de liggingen van (1*a*) zal kunnen afleiden, en zoo staat het ook met de andere hier ter sprake komende evenwichten.

Hieruit volgt tevens, dat daar, waar men de driephasenlijn voor $FeO + Fe_3O_4 + (CO + CO_2)$ bestudeerde, ook $FeO + Fe_3O_4 + O_2$ met elkaar in evenwicht waren. Vandaar dan ook, dat men uit de ligging der bepaalde evenwichtslijnen kan afleiden de gedaante van een deel der P,T-projectie van het stelsel O—Fe.

Zoo ziet men dan onmiddellijk in, dat, daar de driephasenlijnen voor $Fe + FeO + (CO + CO_2)$ en voor $FeO + Fe_3O_4 + (CO + CO_2)$ elkaar snijden, dit ook het geval moet zijn met de driephasenlijnen van $Fe + FeO + G$ en van $FeO + Fe_3O_4 + G$ in het stelsel O—Fe.

Brengen wij dit in teekening, en onderstellen wij dan tevens het bestaan van de driephasenlijn $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$, dan komen wij, aannemende, zooals ook in Fig. 7 is ondersteld, dat de driephasenlijnen $FeO + Fe_3O_4 + G$ en $Fe_3O_4 + Fe_2O_3 + G$ elkaar niet stabiel snijden, tot de volgende P.T-projectie (Fig. 10).

Deze projectie vertoont dus de bijzonderheid die tot heden nog nooit in een geval als dit is geconstateerd, dat n.l. twee driephasenlijnen, voor twee vaste phasen en damp, elkaar snijden, zonder dat

---

[1]) Het is duidelijk dat, wanneer tengevolge van het optreden van een overgangspunt $Fe_2O_3$ en $Fe_3O_4$ boven een bepaalde temperatuur in alle verhoudingen mengbaar worden, de lijn voor $Fe_3O_4 + Fe_2O_3 + G$ plotseling eindigt. Dit eindpunt kan dan echter ook boven *a* gelegen zijn, in welk geval de beschouwingen in dit hoofdstuk gegeven, geen veranderingen ondergaan.

in het systeem inverse smelting optreedt. Bij inverse smelting moet zoo'n snijding optreden, zooals vroeger door een van ons werd

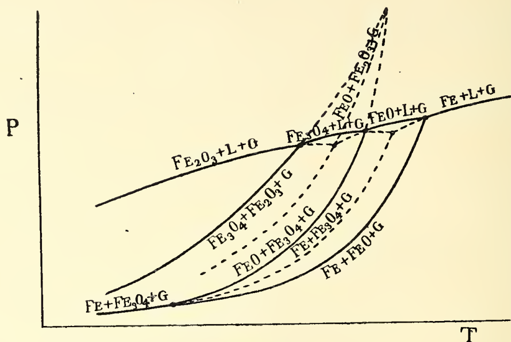



Fig. 10.

aangetoond; het geval van zoo'n snijding, zonder inverse smelting echter, was nog niet beschouwd, zoodat het stelsel O—Fe ons hier iets nieuws leert.

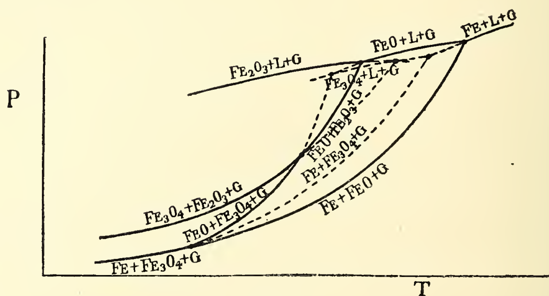
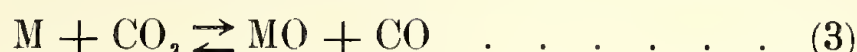


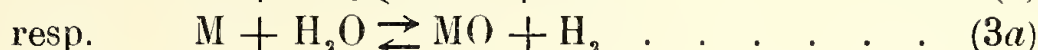

Fig. 11.

Beschouwen wij thans de mogelijkheid van een stabiele snijding van de twee driephasenlijnen voor $FeO + Fe_3O_4 + G$ en $Fe_3O_4 + Fe_2O_3 + G$, overeenkomstig de onderstelling in Fig. 8, dan krijgt men voor de P,T-projectie van het stelsel O—Fe een gedaante als in Fig. 11 is aangeduid. In dit geval zou dus de driephasenlijn voor $Fe_3O_4 + L + G$ metastabiel zijn.

*Berekening van den zuurstofdruk der dissociatie-evenwichten.*

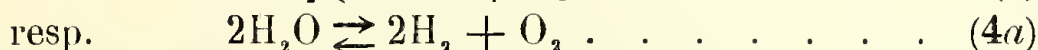
Wanneer men de evenwichts-konstante van een evenwicht als


$$M + CO_2 \rightleftarrows MO + CO \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$


resp. $$M + H_2O \rightleftarrows MO + H_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

kent, en eveneens de evenwichts-konstante van het evenwicht


$$2CO_2 \rightleftarrows 2CO + O_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$


resp. $$2H_2O \rightleftarrows 2H_2 + O_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

bij dezelfde temperatuur, dan volgt uit deze gegevens onmiddellijk de zuurstofdruk.

Want uit (3) volgt

$$K = \frac{P_{CO}}{P_{CO_2}}$$

en uit (4)

$$K_{P_{CO_2}} = \frac{P^2_{CO} P_{O_2}}{P^2_{CO_2}}$$

zoodat

$$K_{P_{CO_2}} = K^2 P_{O_2}$$

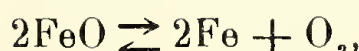
of

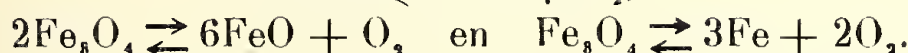
$$P_{O_2} = \frac{K_{P_{CO_2}}}{K^2}$$

dus

$$\log P_{O_2} = \log K_{P_{CO_2}} - 2 \log K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Op deze wijze zijn door ons tusschen 400° C. en 1000° C. de zuurstof-spanningen berekend voor de dissociatie-evenwichten


$$2FeO \rightleftarrows 2Fe + O_2,$$


$$2Fe_3O_4 \rightleftarrows 6FeO + O_2 \quad \text{en} \quad Fe_3O_4 \rightleftarrows 3Fe + 2O_2.$$

Hierbij moest worden gebruikt een verg. van $\log K_P$ voor het $CO_2$-dissociatie-evenwicht. Daar wij wenschten deze vergelijking toe te passen voor temperaturen tusschen ± 500° en ± 1000°, hebben wij in de vergelijking

$$\frac{d\ln K_c}{dT} = -\frac{E}{RT^2}.$$

voor E gesubstitueerd het warmte-effect overeenkomstig de temperatuur van ongeveer 800°, n.l. — 133000 cal. en

$\Sigma rc_v = 0$ gesteld, zoodat bij integratie ontstond

$$\log K_c = -\frac{133000}{4,571\,T} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

of

$$\log K_p = -\frac{133000}{4,571\,T} + \log T + C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Vervolgens is C′ zoo gekozen, dat overeenstemming wordt verkregen met de experimenteele gegevens. [1]) Zoo is b.v. gevonden

$$\log K_{p_{(T=1300°)}} = -13{,}45.$$

Substitueeren wij deze waarde in onze verg. voor log $K_p$, dan vinden wij

$$C' = 5{,}8$$

en dan wordt verg. (7)

$$\log K_p = -\frac{133000}{4{,}571\,T} + \log T + 5{,}8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

of

$$\log K_p = -\frac{29100}{T} + \log T + 5{,}8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Berekenen wij nu door middel van deze verg. voor temperaturen tusschen 400° C. en 1000° C. log $K_p$, dan vinden wij het volgende:

| t | log $K_{p_{CO_2}}$ |
|---|---|
| 400 | — 34.6 |
| 450 | — 31.5 |
| 500 | — 28.9 |
| 550 | — 26.7 |
| 600 | — 24.6 |
| 650 | — 22.8 |
| 700 | — 21.1 |
| 750 | — 19.6 |
| 800 | — 18.3 |
| 850 | — 17.1 |
| 900 | — 15.9 |

Wanneer wij nu bij dezelfde temperaturen en druk ook kennen de waarden van log K voor het evenwicht in de gasphase van de verschillende driephasen-evenwichten in het stelsel Fe — CO — $CO_2$, dan volgen uit de verg. (5) de waarden voor de zuurstof-spanningen bij de verschillende temperaturen.

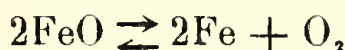
De waarden van log K voor de evenwichten Fe + $CO_2 \rightleftarrows$ Fe O + + CO, 3 FeO + $CO_2 \rightleftarrows Fe_3O_4$ + CO en 3Fe + 4 $CO_2 \rightleftarrows Fe_3O_4$ + 4CO,

[1]) Abegg, Handbuch III, 2. 183.

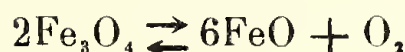
zijn ontnomen aan de verhandeling van REINDERS over „de evenwichten van ijzer en ijzeroxyden met waterdamp en waterstof".

De uitkomsten van deze berekeningen der zuurstof-spanningen zijn in de volgende tabel weergegeven.

In deze tabel vinden wij dus de zuurstof-dissociatie-spanningen van de evenwichten;

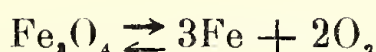


$$2FeO \rightleftarrows 2Fe + O_2$$



$$2Fe_3O_4 \rightleftarrows 6FeO + O_2$$

en



$$Fe_3O_4 \rightleftarrows 3Fe + 2O_2$$

en wij zien daaruit, dat deze drukkingen, zooals te verwachten was, zéér klein zijn.

Aan de absolute waarden dezer drukkingen, waaruit, als wij met de gewone gaswetten blijven rekenen, tot de aanwezigheid van één gasmolecule in vele liters besloten zou moeten worden, is natuurlijk geen beteekenis te hechten, aangezien aan de formules, welke wij bij onze berekening gebruikten, de onderstelling ten grondslag ligt, dat wij met een groot aantal mol. te doen hebben. Toch zullen bij de lagere T de bij deze rekengrootheden behoorende werkelijke zuurstofdrukken zóó uiterst klein zijn, dat zich de vraag voordoet, of daarbij de met vrij groote snelheid verloopende oxydatie van het reduceerende gas, nog wel opgevat kan worden als een homogene gasreactie [1]).

## *P, T-projectie van het stelsel O—Fe.*

Door middel van deze gegevens zijn wij nu in staat een deel der P, T-projectie van het stelsel O—Fe aan te geven, indien wij den gevonden zuurstof-druk gelijkstellen aan den totaaldruk.

Geven wij in deze projectie tevens aan de punten $p$ en $q$ die uit de waarnemingen van SOSMAN en HOSTETTER zouden volgen, voor den dampdruk van het evenwicht $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$, overeenkomstig de temperaturen 1100° en 1200°, uitgaande van de onderstelling, dat het bijna horizontale deel van de door hen gevonden dissociatie-isothermen inderdaad betrekking heeft op dit driephasen-evenwicht, dan krijgen wij de P, T figuur (12).

[1]) Geheel analoge vragen doen zich voor bij beschouwing van het mechanisme der reacties tusschen b.v. oplossingen en zouten, of tusschen metalen met zeer klein oplosbaarheids-product en electrolyten. Vooral in het laatste geval kunnen de rekengrootheden, welke de electronen-concentratie in oplossing aangeven, uiterst gering zijn, zooals een van ons reeds aantoonde. *)

*) Zeitschr. für physik. Chemie 92, 1 (1916).

| | $\log K_{p_{CO_2}}$ | $Fe + CO_2 \rightleftarrows FeO + CO$ | | $3\,FeO + CO_2 \rightleftarrows Fe_3O_4 + CO$ | | $3\,Fe + 4\,CO_2 \rightleftarrows Fe_3O_4 + 4\,CO$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\log K_3$ | $\log K_{p_{CO_2}} - 2\log K_3 = P_{O_2}$ | $\log K_2$ | $\log K_{p_{CO_2}} - 2\log K_2 = P_{O_2}$ | $\log K'_3$ | $\log K_{p_{CO_2}} - 2\log K_3 = P_{O_2}$ |
| 400 | − 34.6 | | | | | − 0.16 | − 34.3 |
| 450 | − 31.5 | | | | | − 0.10 | − 31.3 |
| 500 | − 28.9 | | | | | − 0.05 | − 28.8 |
| 550 | − 26.7 | − 0.01 | − 26.7 | − 0.22 | − 26.5 | | |
| 600 | − 24.6 | + 0.06 | − 24.7 | − 0.34 | − 24.3 | | |
| 650 | − 22.8 | + 0.12 | − 23.0 | − 0.46 | − 22.3 | | |
| 700 | − 21.1 | + 0.18 | − 21.5 | − 0.58 | − 20.5 | | |
| 750 | − 19.6 | + 0.22 | − 20.0 | − 0.68 | − 18.9 | | |
| 800 | − 18.3 | + 0.27 | − 18.8 | − 0.78 | − 17.5 | | |
| 850 | − 17.1 | + 0.31 | − 17.7 | − 0.88 | − 16.2 | | |
| 900 | − 15.9 | + 0.34 | − 16.6 | − 0.98 | − 14.9 | | |
| | | | $P_{Fe + FeO + O_2}$ | | $P_{FeO + Fe_3O_4 + O_2}$ | | $P_{Fe + Fe_3O_4 + O_2}$ |

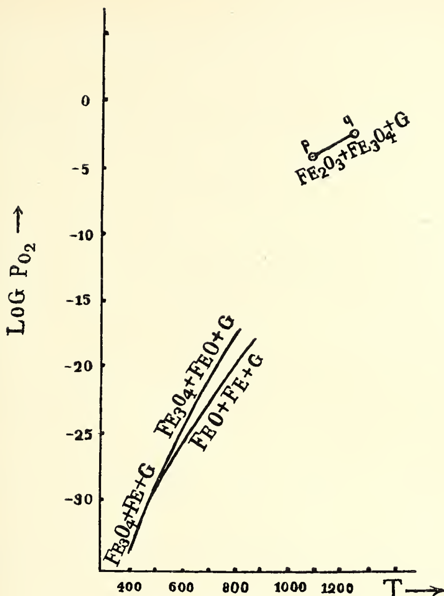



Fig. 12.

Natuurlijk zijn deze twee laatst genoemde isothermen geheel onvoldoende om de richting van de driephasenlijn voor $Fe_2O_3 + Fe_3O_4 + G$ met zekerheid aan te geven, wij willen dan ook alleen dit opmerken, dat de ligging van deze driephasenlijn, zooals zij uit deze twee gegevens zou volgen, t. o. v. de andere driephasenlijnen met de verwachting in fig. 10 of fig. 11 schematisch aangegeven, zou overeenstemmen.

*Algemeen- en anorganisch chemisch Laboratorium der Universiteit.*

*Amsterdam*, 28 Juni 1918.

**Wiskunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer H. B. A. BOCKWINKEL: „*Opmerkingen over de ontwikkeling van een funksie in een fakulteitreeks.* I".

(Mede aangeboden door den Heer KLUYVER).

1. In zijn boek „Theorie der Gammafunktion" komt NIELSEN tot de opstelling van de noodzakelike en voldoende voorwaarden voor de ontwikkeling van een funksie in een fakulteitreeks. Volgens hem geldt de stelling:

De noodzakelike en voldoende voorwaarde voor een funksie $\Omega(x)$, om in een fakulteitreeks te kunnen worden ontwikkeld, bestaat daarin dat men $\Omega(x)$ kan voorstellen als bepaalde integraal van de vorm

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\,(1-t)^{x-1}\,dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $\varphi(t)$ een funksie is met de volgende eigenschappen:

1°. $\varphi(t)$ is regulier binnen een sirkel met de oorsprong tot middelpunt en een straal die niet kleiner is dan 1, en kan daarbinnen dus in een machtreeks

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

worden ontwikkeld.

2°. Is $\varphi^{(p)}(t)$ de eerste afgeleide van $\varphi(t)$ die voor $t=1$ oneindig groot wordt, dan bestaat er een reëel getal $\lambda$ zodanig dat men heeft

$$\lim_{t=1} \varphi^{(p)}(t) \backsim (1-t)^{-(\lambda+p)}\,[1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

[1] Met deze schrijfwijze wordt bedoeld dat men zal hebben $\lim\limits_{t=1} (1-t)^{\lambda+p+\delta}$ $\varphi^{(p)}(t) = 0$ of $\infty$, al naarmate $\delta > 0$ of $\delta < 0$. We zullen dit uitdrukken door te zeggen $\varphi^{(p)}(t)$ is voor $t=1$ *equivalent* met $(1-t)^{-(\lambda+p)}$. Daar $\varphi^{(p)}(1)$ oneindig ondersteld is, heeft men $\lambda + p \overline{>} 0$. Uit een bekende stelling (DINI, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen Grösse, p. 104) volgt verder dat, indien $\varphi(t)$ zelf eindig is voor $t=1$, en dus $p \overline{>} 1$, men moet hebben $\lambda + p \overline{<} 1$. Immers, was $\lambda + p > 1$, dan zou volgens die stelling $\varphi^{(p-1)}(t)$ voor $t=1$ equivalent zijn met $(1-t)^{-(\lambda+p-1)}$, en dus eveneens $\infty$, in strijd met de onderstelling, dat $\varphi^{(p)}(t)$ de *eerste* afgeleide is, die $\infty$ wordt voor $t=1$. Men heeft dus

$$0 \overline{<} \lambda + p \overline{<} 1, \quad \text{voor} \quad p \overline{>} 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waaruit volgt dat $\lambda$ in dit geval nooit *pozitief* is. Is daarentegen $\varphi(t)$ zelf $\infty$ voor $t=1$, dan is hij volgens (3) equivalent met $(1-t)^{-\lambda}$, en is $\lambda$ dus niet *negatief.*

3°. Er is een reëel getal $\lambda'$ met de eigenschap dat men bij ieder voorgeschreven klein getal $\varepsilon$ een geheel getal $N$ kan kiezen zodanig dat, *uniform* in een interval $0 \overline{<} t \overline{<} \delta$, dat men overigens zo klein kan denken als men wil,

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} \right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > \frac{1}{\varepsilon} \end{matrix} \Bigg\} \text{ voor } n > N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

al naarmate $R(x) > \lambda'$ of $R(x) < \lambda'$ ondersteld wordt.

De fakulteitreeks die aan een integraal van de vorm (1), waarin $\varphi(t)$ de genoemde eigenschappen heeft, beantwoordt is

$$\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x(x+1)} + \frac{2!\,a_2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} + \ldots, \quad (6)$$

waarin $a_0$, $a_1, \ldots$ de koeffisienten zijn van de bovengenoemde machtreeks (2), waaraan $\varphi(t)$ binnen de sirkel (0,1) (d.i. de sirkel met $t = 0$ tot middelpunt en straal 1), of binnen een grotere sirkel, gelijk is.

Deze fakulteitreeks zou nu, volgens NIELSEN, konvergeren voor zodanige waarden van $x$ dat tegelijkertijd aan de beide voorwaarden

$$R(x) > \lambda, \quad \text{en} \quad R(x) > \lambda' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

voldaan is, en indien een van beide karakteristieken $\lambda$ en $\lambda'$ niet negatief is, dan zou de reeks (6) de integraal (1) voor de genoemde waarden van $x$ voorstellen. [1])

Uit de eerste ongelijkheid (5), toegepast voor $t = 0$, valt, als men in aanmerking neemt dat

$$a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gemakkelik af te leiden dat de reeks (6) *absoluut* konvergeert voor

[1]) Indien $\lambda$ en $\lambda'$ beide negatief zijn, en dus volgens de noot op p. 1 $\varphi(t)$ eindig voor $t = 1$, dan heeft de integraal (1) in 't algemeen slechts betekenis voor $R(x) > 0$, en geldt de gegeven uitspraak alleen voor *deze* waarden van $x$. Men kan dan evenwel de integraal

$$\Omega_p(x) = \int_0^1 \frac{\varphi^{(p)}(t)\,(1-t)^{x+p-1}\,dt}{x(x+1)\ldots(x+p-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

beschouwen, die wèl betekenis heeft voor $R(x) > \lambda$. Hieraan beantwoordt een bepaald *restdeel* van de reeks (6), n.l.

$$\frac{p!\,a_p}{x(x+1)\ldots(x+p)} + \frac{(p+1)!\,a_{p+1}}{x(x+1)\ldots(x+p+1)} + \ldots, \quad . \quad . \quad (8')$$

en de integraal (8) zou dan gelijk aan dit restdeel zijn voor de door (7) bepaalde waarden van $x$.

$R(x) > \lambda' + 1$. In verband met (7) trekt NIELSEN daarom de konkluzie dat de karakteristiek $\lambda$ hoogstens gelijk aan $\lambda' + 1$ kan zijn.

Het merkwaardige en ook het eigene van de uitspraak van NIELSEN is evenwel dat, als $\lambda < \lambda' + 1$, er een zekere strook zal zijn links van $R(x) = \lambda' + 1$, waar de reeks (6) *voorwaardelik* konvergeert, en wel, als

$$\lambda' < \lambda < \lambda' + 1$$

in een strook bepaald door

$$\lambda < R(x) \overline{<} \lambda' + 1$$

en indien

$$\lambda \overline{<} \lambda'$$

in een strook ter breedte 1, bepaald door

$$\lambda' < R(x) \overline{<} \lambda' + 1.$$

We noemden dit laatste het eigene in de uitspraak van NIELSEN, omdat PINCHERLE, die óók over fakulteitreeksen geschreven heeft [1]), helemaal niet over het geval van voorwaardelike konvergentie spreekt. En om ons standpunt maar dadelik te kennen te geven, verklaren wij het betoog van NIELSEN, waaruit de voorwaardelike konvergentie binnen het besproken gebied zou moeten volgen, niet te begrijpen; wij menen zelfs, zoals we aanstonds nog nader zullen toelichten, dat uit *zijn* beschouwingen niets anders valt afteleiden, dan de geldigheid van zijn uitspraak voor $R(x) > \lambda' + 1$ en $R(x) > \lambda + 1$. Het voorbeeld dat NIELSEN van ontwikkelbaarheid van een integraal als (1) in een *voorwaardelik* konvergente reeks geeft, is juist, en het is, zooals we zullen zien, gemakkelik met andere te vermeerderen. Maar bij het overdenken van de zaak is twijfel gerezen of de spesiale stelling van NIELSEN wel algemeen geldig is. In ieder geval zouden o. i. voor het strenge bewijs daarvan dieper gaande beschouwingen nodig zijn.

2. De manier waarop NIELSEN tot de ontwikkeling (6) komt, bestaat in partiele integratie van de integraal (1): deze levert onmiddellik

$$\int_0^1 \varphi(t)\,(1-t)^{x-1}\,dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x(x+1)} + \cdots + \frac{(n-1)!\,a_{n-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + R_n \quad (10)$$

waarin

$$R_n = \Gamma(x) \int_0^1 \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{x+n-1}}{\Gamma(x+n)}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

[1]) Rendic. d. R. Acc. d. Lincei (1903, 2e Sem.).

Nielsen leidt nu uit de voorwaarde onder 2° af dat de bovenste van de ongelijkheden (5) voor een interval $\delta < t < 1$ zal gelden, indien $R(x) > \lambda$. Hierbij kan $\delta$ willekeurig klein gedacht worden; natuurlik moet men zich voorstellen dat de keuze van het gehele getal $N$ daardoor beïnvloed wordt, en dat dit wel onbepaald zal toenemen met $1/\delta$. Om die reden moet Nielsen in een nieuwe voorwaarde 3° nog weer apart uitspreken dat de ongelijkheid (5) ook voor een interval $0 \leqq t \leqq \delta$ geldig is, indien $R(x) > \lambda'$. Maar uit het zo even genoemde betoog volgt nu dat de restintegraal (11) zeker tot nul nadert, bij onbepaalde toename van $n$, als zowel

$$R(x) > \lambda' + 1, \quad \text{en} \quad R(x) > \lambda + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Immers, men kan schrijven

$$R_n = \Gamma(x) \int_0^1 \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{x-1+n}}{\Gamma(x-1+n+1)}\,dt,$$

en daar $R(x—1)$ zowel groter dan $\lambda'$ als groter dan $\lambda$ is, is dus de integrand in het interval $0 \leqq t \leqq 1$ uniform gelijk aan nul voor $n = \infty$. Meer kan men o.i. uit de beschouwingen van Nielsen niet afleiden.

Het is eigenaardig dat de schrijver in zijn leerboek de gelijkheid (10) foutief geeft, en wel zó dat onder het integraalteken een afgeleide van $\varphi(t)$ voorkomt waarvan de orde een eenheid te hoog is; daardoor zou men tot het besluit komen dat de ontwikkeling geldig is onder de door hem genoemde voorwaarden (7). Men zou dus kunnen menen dat hier de reden te zoeken is van de ongerechtigde konkluzie. Maar in een verhandeling die Nielsen in de Ann. de l'École Normale (1902) gepubliseerd heeft staat de formule (10) wél juist, en trekt hij toch zonder meer zijn konkluzie. Het zou van belang geweest zijn, als Nielsen hier wat uitvoeriger uiteengezet had hoe hij daartoe komt. Het is niet onmogelik dat hij, door zijn voorbeeld (en misschien meerdere) daartoe gebracht, bij vergissing gemeend heeft, zijn gevolgtrekking zo maar te kunnen maken.

3. Is het teorema van Nielsen niettemin juist, dan is er natuurlik alle reden om, naast de karakteristiek $\lambda'$, ook nog de karakteristíek $\lambda$ in te voeren. Maar toch lijkt het ons niet ondienstig om te tonen dat men de ontwikkelbaarheid van de integraal (1) in een *absoluut* konvergente fakulteitreeks reeds bewijzen kan enkel op grond van de voorwaarden onder 1° en 3°, en dan voor $R(x) > \lambda' + 1$. We zullen de voorwaarde 3° zelfs iets beperken: niet aannemen dat de daarin voorkomende ongelijkheid voor een zeker klein *interval* $(0,\delta)$ van $t$ bevredigd is, maar enkel dat dit voor het beginpunt $t = 0$

het geval is. Daar de waarden van de verschillende afgeleiden van $\varphi(t)$ in $t=0$ met de koeffisienten van de reeksontwikkeling van die funksie samenhangen door de formule

$$a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

zo komt deze onderstelling neer op de volgende omtrent die koeffisienten:

$3a^0$. De koeffisienten $a_n$ van de machtreeksontwikkeling van $\varphi(t)$ voldoen aan de voorwaarde

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{a_n}{n^{\lambda'+\delta}} = \begin{matrix} 0 \text{ voor } \delta > 0 \\ \infty \text{ voor } \delta < 0 \end{matrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wat we zullen aanduiden door te schrijven

$$\overline{\lim_{n=\infty}} a_n \sim n^{\lambda'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14')$$

en te zeggen dat de bovenste limiet van $a_n$ voor $n=\infty$ equivalent is met $n^{\lambda'}$.

We schrijven ekspres het bovenste-limietteken, omdat we voor ons doel daaraan genoeg hebben; het is niet nodig te onderstellen dat de koeffisienten $a_n$ een „croissance régulière" hebben.

Uit de onderstelling $3a^0$ alleen kan nu reeds worden afgeleid dat het deel van de voorwaarde $3^0$ beantwoordende aan de eerste van de ongelijkheden (5) in het hele interval (0,1) van $t$ *uniform* vervuld is, mits men nog een faktor $1-t$ toevoegt. Om dit aan te tonen, vergelijken we voor grote waarden van $n$ de $n^e$ afgeleide van $\varphi(t)$,

$$\varphi^{(n)}(t) = \Gamma(n+1)\, a_n + \frac{\Gamma(n+2)}{1!} a_{n+1}\, t + \ldots + \frac{\Gamma(n+s+1)}{s!} a_{n+s} t^s + \ldots (15)$$

met de $n^e$ afgeleide van de funksie

$$f(t) = \frac{\Gamma(\lambda'+\delta+1)}{(1-t)^{\lambda'+\delta+1}}$$

dat is

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\lambda'+\delta+n+1)}{(1-t)^{\lambda'+\delta+n+1}} =$$

$$= \Gamma(\lambda'+\delta+n+1) + \frac{\Gamma(\lambda'+\delta+n+2)}{1!} t + \ldots + \frac{\Gamma(\lambda'+\delta+n+1+s)}{s!} t^s + \ldots (16)$$

Hierin is $\delta$ een zeker pozitief getal. Hoe klein we dit ook kiezen, steeds is er, blijkens onze voorwaarde $3a^0$, bij ieder voorgeschreven willekeurig klein getal $\varepsilon$ een geheel getal $N$ zodanig dat *voor alle* $s \geqq 0$

$$|a_{n+s}| < \varepsilon \frac{\Gamma(\lambda'+\delta+n+s+1)}{\Gamma(n+s+1)}$$

Dus heeft men *uniform* in het interval $0 \overline{<} t < 1$

$$\frac{(1-t)^{\lambda'+\delta+n+1}\,\overline{\varphi}^{(n)}(t)}{\Gamma(\lambda'+\delta+n+1)} < \varepsilon, \text{ voor } n > N \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

hierin is $\overline{\varphi}(t)$ de natuurlike majorant van $\varphi(t)$ bepaald door

$$\overline{\varphi}(t) = |a_0| + |a_1|\,t + \ldots + |a_n|\,t^n + \ldots$$

Dezelfde ongelijkheid geldt a fortiori voor $\varphi(t)$ zelf, en daar $\delta$ willekeurig klein te denken was, zo volgt hieruit dat de restintegraal (11) voor $n = \infty$ nul tot limiet heeft, indien $R(x) > \lambda' + 1$, en dat dus voor deze waarden van $x$ ontwikkeling van de integraal (1) in een fakulteitreeks mogelik is. Dat die reeks voor deze waarden van $x$ absoluut konvergeert, is, zoals we al eerder hebben opgemerkt, eveneens onmiddellik uit $3a^0$ af te leiden.

4. We maken de volgende opmerkingen. 1°. We kunnen de stelling die we zo even bewezen hebben vergelijken met een uitkomst van CESARÒ [1]). Volgens deze volgt uit de voorwaarde $3a^0$ dat de ongelijkheid (17) *voor limiet* $t = 1$ reeds geldt van $n = 0$ af.

2°. In onze uitkomst, en trouwens in die van CESARÒ, ligt opgesloten dat het door NIELSEN ingevoerde getal $\lambda$ voor de natuurlike majorantfunksie van $\varphi$ juist gelijk is aan $\lambda' + 1$ [2]), terwijl het voor de funksie zelf in ieder geval niet groter is; d. w. z. men heeft

$$\lambda \overline{<} \lambda' + 1, \text{ en } \overline{\lambda} = \lambda' + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

als $\overline{\lambda}$ het bedoelde getal voor $\overline{\varphi}(t)$ is. Deze uitkomst, die door NIELSEN *uit zijn teorema* wordt afgeleid, kan dus, indien onze mening omtrent het niet-aangetoond-zijn van dat teorema juist is, evenmin als door NIELSEN bewezen aangemerkt worden.

3°. We kunnen ook gemakkelik de *noodzakelikheid* van de door ons uitgesproken voorwaarde aantonen. Immers heeft men een reeks van de gedaante (6), die voor zekere waarde van $x = \alpha + i\beta$ konvergeert, dan moet de limiet van de termen nul zijn. Daar nu in dit geval, zooals bekend is,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$$

zo moet men dus hebben dat

---

[1]) Acc. d. Scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1893. Zie ook: BOREL, Leçons sur les séries à termes positifs.

[2]) Tenminste bij „croissance régulière" van $a_n$; anders kan het ook kleiner dan $\lambda' + 1$ zijn.

$$\lim_{n=\infty} a_n \sim n^{\lambda'},$$

waarin $\lambda'$ een reëel getal is hoogstens gelijk aan $\alpha$, maar eventueel ook aan $-\infty$. Vormt men nu met de gegeven koeffisienten $a_n$ een funksie $\varphi(t)$ als in (2), dan heeft deze de eigenschappen onder 1° en $3a$°, en dan is, zoals we in 't voorgaande bewezen hebben, de reeks gelijk aan de integraal (1) voor $x > \lambda' + 1$; altijd, indien $\lambda' + 1 \gtreqless 0$, anders moet men zeggen dat een zeker *restdeel* van de reeks voor $x > \lambda' + 1$ gelijk is aan een integraal als (8) in de noot op pag. 183.

4°. Als de koeffisienten $a_n$ in de machtreeks voor $\varphi(t)$ reëel zijn, kan men één bepaald geval aangeven, waarin de reeks voorwaardelik konvergeert voor $x > \lambda'$, nl. dan, als alle afgeleiden van zeker rangnummer af de eigenschap hebben dat ze over het hele interval $0 \overline{<} t < 1$ hetzelfde teken houden, en tevens dat het teken voor twee *opvolgende* afgeleiden *verschillend* is. Dit kan uit de gelijkheid

$$R_n - R_{n+1} = \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

worden afgeleid, waarin $R_n$ de betekenis (11) heeft. Stel nl. vooreerst dat $x$ reëel is $= \alpha$. Dan hebben $R_n$ en $-R_{n+1}$ blijkbaar hetzelfde teken, en is dus ieder in absolute waarde kleiner dan de reeksterm in 't rechterlid van (19). Heeft deze dus nul tot limiet, dan $R_n$ eveneens, en dit is het geval voor $\alpha > \lambda'$, daar $\lim a_n \sim n^{\lambda'}$.

Is $x$ kompleks $= \alpha + i\beta$ en $\alpha > \lambda'$, dan heeft men

$$|R_n| < \int_0^1 \left| \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{x+n-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \right| dt$$

$$< \left| \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+i\beta)\ldots(\alpha+i\beta+n-1)} \right| \int_0^1 \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{\alpha+n-1}}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}\, dt.$$

De laatste integraal is gelijk aan $R_n$ voor $x = \alpha$, en heeft dus, zoals zo even is aangetoond, nul tot limiet; de faktor waarmee de integraal vermenigvuldigd wordt heeft klaarblijkelik een modulus kleiner dan 1; $R_n$ nadert dus tot nul.

Als toelichting nemen we het voorbeeld van NIELSEN

$$a(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{x-1}}{1+t}\, dt,$$

waarin

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t} \quad , \quad \lambda = -\infty \quad , \quad \lambda' = 0.$$

De funksie $\varphi(t)$ voldoet aan de zo even genoemde spesiale voorwaarde, en om die reden mag men werkelik tot de ontwikkelbaarheid van $a(x)$ in een fakulteitreeks besluiten, indien $R(x) > \lambda'$. Is $R(x)$ tevens $< \lambda' + 1$, dan heeft slechts voorwaardelike konvergentie plaats. Een ander voorbeeld van zijn stelling, dus een dat niet aan de bedoelde biezondere voorwaarde voldoet, wordt door NIELSEN niet gegeven. Maar dezulke zijn gemakkelik te bedenken.

5°. Ten slotte een opmerking over een andere manier, om uit de reeks (2) de ontwikkeling (6) af te leiden; een manier die zowel door PINCHERLE als door NIELSEN wordt toegepast. Men kan n.l. schrijven

$$\varphi(t)(1-t)^{x-1} = a_0(1-t)^{x-1} + a_1 t(1-t)^{x-1} + \ldots + a_n t^n (1-t)^{x-1} + \ldots,$$

en dus

$$\int_0^1 \varphi(t)(1-t)^{x-1}\,dt = \int_0^1 [a_0(1-t)^{x-1} + \ldots + a_n t^n (1-t)^{x-1} + \ldots]\,dt.$$

Integreert men de reeks term voor term tussen 0 en 1, dan komt er de reeks (6). Als deze konvergeert, dan leidt NIELSEN (p. 239 Handbuch) daaruit af dat hij gelijk is aan de integraal in het linkerlid van de vorige vergelijking, en wel door zich te beroepen op een stelling van DINI (Grundlagen, p. 523). Was dit juist, dan zou men, behalve het door ons genoemde *spesiale* geval, nog een zeer *algemeen* geval hebben, waarin de integraal (1) in een voorwaardelik konvergente fakulteitreeks kan worden ontwikkeld: n.l. altijd dan, wanneer de fakulteitreeks waartoe die integraal, hetzij door partiele integratie, hetzij op de zo even vermelde manier aanleiding geeft, *konvergeert*.

Maar o. i. is de bedoelde stelling van DINI door NIELSEN verkeerd toegepast. Het is er bij die stelling om te doen dat men *eerst* in het interval $0 \leq t < u$, waarin $u < 1$, integreert. Nu is gemakkelik in te zien dat men *in zo'n interval* term voor term kan integreren (wegens *uniforme* konvergentie van de reeks in $(0,u)$). M. a. w. men zal hebben

$$\int_0^u \varphi(t)(1-t)^{x-1}\,dt =$$

$$= a_0 \int_0^u (1-t)^{x-1}\,dt + a_1 \int_0^u t(1-t)^{x-1}\,dt + \ldots + a_n \int_0^u t^n(1-t)^{x-1}dt + \ldots, \quad (20)$$

en wel, hoe dicht $u$ ook bij 1 ligt. Nu is het linkerlid van deze vergelijking voor *lim* $u = 1$ *kràchtens definitie* gelijk aan de integraal (1). Maar het rechterlid is *alleen dan* gelijk aan de reeks van de limietintegralen, indien het een links-kontinue funksie van $u$ is in het punt $u = 1$. Deze voorwaarde wordt er door DINI uitdrukkelik bijgevoegd, maar schijnt door NIELSEN uit het oog verloren te zijn. Er is geen enkele gemakkelike aanwijzing dat hij altoos vervuld zou zijn. Alleen in het geval van *absolute* konvergentie van de reeks van integralen, voor $u = 1$, dus $R(x) > \lambda' + 1$, komt dit uit, en wel *omdat de reeks* (20) *dan, zoals dadelik te zien is, als uniform in het gesloten interval* $0 \leqq u \leqq 1$ *konvergeert en dus volgens een bekende stelling een in dat interval kontinue funksie van* $u$ *voorstelt* [1]).

---

[1]) Het betoog van PINCHERLE, die overigens zoals gezegd is alleen over absolute konvergentie spreekt, schijnt ons onjuist toe. Het berust daarop dat hij voor de afzonderlike integralen van de reeks (20) schrijft (als men $u = 1 - \varepsilon$ stelt)

$$\int_0^{1-\varepsilon} t^n(1-t)^{x-1}\,dt = \frac{(1-\varepsilon^{n+x})\,n!}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

en dit is fout. Kon men dit werkelik doen, dan zou de limiet van de reeks (20) voor $u = 1$ inderdaad de reeks van de limieten zijn, zo deze laatste konvergeerde, *ook als dit slechts voorwaardelik plaats vond.* Het is dus niet overbodig dat wij er hier, in de slotzin van deze paragraaf, nog eens de aandacht op gevestigd hebben, hoe men het idee van de integratie term voor term op *strenge* manier kan gebruiken, om de ontwikkeling van de integraal (1) in een *absoluut* konvergente fakulteitreeks te bewijzen.

**Natuurkunde**. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens den Heer Prof. Dr. W. H. KEESOM aan: Mededeeling N°. 1 uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: A. J. BIJL en N. H. KOLKMEIJER: „*Onderzoek met behulp van* RÖNTGEN-*stralen naar de kristalstructuur van wit en grauw tin*". (Eerste Mededeeling).

(Mede aangeboden door den heer JULIUS).

Voor het onderzoek door middel van Röntgen-stralen naar den inwendigen bouw van kristallen zijn tot nu toe drie methoden aangewend. Die van FRIEDRICH, KNIPPING en LAUE [1]) en die van de BRAGG's [2]) kan men alleen toepassen, als men de beschikking heeft over betrekkelijk groote, goed gevormde kristallen, waarvan men het kristal-systeem kent. Het toepassen der methode van DEBIJE en SCHERRER [3]) vereischt daarentegen juist een groot aantal in verschillende orienteeringen liggende kleine kristallen [4]). Daarom is deze laatste methode de meest geschikte voor het onderzoek van de kristalstructuur van die stoffen, die niet of moeilijk in grootere kristallen te verkrijgen zijn, b.v. van die metalen — eventueel van die modificaties dezer metalen — die slechts in microkristallijnen toestand bekend zijn. Een ander voorbeeld, waarbij de methode van DEBIJE en SCHERRER wellicht toegepast zal kunnen worden, vindt men bij de in den vasten toestand gebrachte gassen, bij welke het vooralsnog moeilijkheden oplevert, voldoend groote kristallen in nauwkeurig bepaalde orienteering te verkrijgen.

Zeer interessant is het onderzoek van verschillende modificaties van eenzelfde stof, bijv. allotropische toestanden van een element. Dit onderzoek is reeds aangevat door OLIE en BIJL, die in deze Verslagen onlangs interferentie-foto's van grafiet en diamant publiceerden [5]). Intusschen zijn door DEBIJE en SCHERRER [6]) dezelfde stoffen

[1]) W. FRIEDRICH, P. KNIPPING en M. LAUE, Sitz.-Ber. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Phys. Kl. 1912, p. 303.

[2]) W. H. en W. L. BRAGG, X-Rays and Crystal-Structure. London, 1916.

[3]) P. DEBIJE en P. SCHERRER, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1916, p. 1.

[4]) A. W. HULL, Phys. Rev. (2) 10 (1917), p. 661, is, blijkbaar onafhankelijk van DEBIJE en SCHERRER, tot vrijwel dezelfde methode gekomen.

[5]) J. OLIE en A. J. BIJL, Versl. Kon. Acad. Amsterdam XXV (1917), p. 990.

[6]) P. DEBIJE en P. SCHERRER, Physik. ZS. 18 (1917), p. 291.

en ook z.g. amorphe kool onderzocht en is het hun daarbij gelukt, de structuur dezer modificaties van koolstof vast te stellen.

Aansluitende aan de onderzoekingen, die reeds verricht zijn bij silicium, lood en de modificaties van koolstof, hebben wij in dit onderzoek ons tot taak gesteld, nog van een ander element uit deze groep van het natuurlijke systeem, het tin n.l. in zijn beide modificaties, die bij lage temperatuur bestaanbaar zijn, de structuur te bepalen.

De Röntgen-stralen werden voor het meerendeel onzer opnamen geleverd door een Röntgen-buis, die vervaardigd is naar een ons door Prof. Debije en Dr. Scherrer welwillend verstrekte teekening, en die als eene wijziging van de door Rausch von Traubenberg [1]) geconstrueerde buis is te beschouwen. De antikathode was van koper, de parallel-vonkenlengte (spits-plaat) werd ingesteld op 6 cm. De Röntgen-stralen traden uit door een aluminium-venster ter dikte van 0,02 mm., passeerden daarna een looden diafragma, dik 34 mm. met een opening van 2 mm. diameter en traden dan in een cilindrische camera met straal van 27,3 mm. In de as van de camera werd de te onderzoeken stof geplaatst in den vorm van een staafje van 2 mm. diameter. Het staafje van wit tin was gevijld uit een dikker staafje, dat ter verkleining der kristallen en om onregelmatige orienteering daarvan te verkrijgen, vooraf eenigen tijd met den hamer geklopt was. Het grauwe tin was tot een staafje geperst. Wij verkregen dit materiaal door de welwillendheid van Prof. Cohen, wien wij daarvoor onzen dank brengen. Langs den wand van de camera was, door veeren aangedrukt, een fotografische film (dikte 0,2 mm.) uitgespannen. De expositietijd was 4 uur.

Bij de voorloopige proeven deden wij de ervaring op, dat er, behalve de interferentiestrepen van het tin, nog andere verkregen werden van twee verschillende soorten. De eerste geleken op hyperbolen, waarvan het middelpunt samenviel met de plaats, waar de bundel karakteristieke stralen, na het onderzochte preparaat aan weerszijden voorbijgegaan te zijn, het film trof. Zij zijn toe te schrijven aan interferentie van door het zilverbromide van het film afgebogen stralen. De tweede soort had wel dezelfde krommingsrichting als de van het preparaat in de as van de camera afkomstige lijnen, zij sneden echter deze laatste op sommige plaatsen, wat er op wees, dat ook hier de oorsprong niet te zoeken was in het preparaat. Nader bleek, dat de oorsprong ervan samenviel met de achterste

[1]) H. Rausch von Traubenberg, Physik. ZS. 18 (1917), p. 241.

opening in het looddiafragma, welke opening in den cilinderwand van de camera lag. De eerste soort ongewenschte lijnen raakten wij kwijt door een cirkelvormige opening te maken in het film op de plaats, waar de bundel het film trof, zooals trouwens ook reeds door DEBIJE en SCHERRER gedaan is. Het ontstaan van de tweede soort ongewenschte lijnen werd vermeden door het looddiafragma in de omhullende geelkoperen buis een weinig naar voren te trekken, zoodat de van het lood uitgaande stralen door den overgebleven geelkoperen wand van de camera werden afgeschermd, of door het naar het film toegekeerde einde van het diafragma zoover uit te boren, dat de stralen, uitgaande van den achtersten rand van het niet uitgeboorde deel van het diafragma, door het uitgeboorde deel werden tegengehouden. [1])

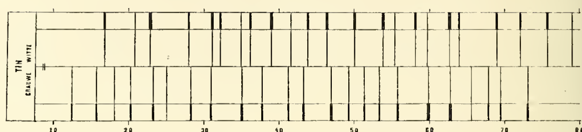
Zoowel op de door ons verkregen foto's van het witte als van het grauwe tin komen op de lijnen stippen voor, zooals die ook door DEBIJE en SCHERRER op hun foto van silicium waargenomen werden. Zij zijn toe te schrijven aan grootere kristalstukjes [2]).

Om de uitkomsten voor wit en grauw tin gemakkelijk te kunnen vergelijken, hebben wij in onderstaande teekening onder elkaar voor beide stoffen door verticale lijnen aangegeven de plaatsen, waar de interferentiekegels het film in een vlak loodrecht op de as van het preparaat treffen. De getallen onderaan geven de afstanden der lijnen

[1]) Het is wellicht de moeite waard, vast te stellen, dat de door TAYLOR, Physik. ZS. 17 (1916) p. 316, op artikelen van LAUB, Physik. ZS. 15 (1914) p. 732, 844, uitgeoefende kritiek ongegrond schijnt, nu ook wij vonden, dat karakteristieke RÖNTGEN-stralen, gaande door een looden diafragma, interferentielijnen, afkomstig van de randen van het diafragma, kunnen geven.

[2]) De lengterichting dezer langwerpige stippen valt samen met de richting der interferentielijnen Dit is aldus te verklaren. Op een enkel punt van een vlak uit het atoomnet van zoo'n kristalstukje valt, wegens de niet volkomen evenwijdigheid van den door het diafragma doorgelaten bundel, een convergente kegelvormige stralenbundel. (Kegel 1). Heeft het bedoelde netvlak een zoodanigen stand, dat voor een straalrichting volgens de as van dezen laatsten bundel voldaan is aan de voorwaarde voor gunstige interferentie, dan zijn er in dezen bundel nog andere straalrichtingen, waarvoor ook aan die voorwaarde voldaan is. Men vindt de verzameling dezer richtingen door een kegel te beschrijven, met de normaal op het beschouwde vlak als as en den as van kegel 1 als een der beschrijvende lijnen. (Kegel 2). Alle beschrijvende lijnen van kegel 2, die binnen kegel 1 liggen, voldoen aan de voorwaarde voor gunstige interferentie. Na terugkaatsing vormen al deze stralen tezamen een diametraal tegenoverliggend stuk van den kegelmantel 2. Juist daar ter plaatse raakt echter kegel 2 aan kegel 3, gevormd door de teruggekaatste stralen, verkregen door het reflecteerende vlak alle mogelijke voor interferentie gunstige oriënteeringen te laten innemen. Waar nu het film de beide kegels snijdt, moeten de snijlijnen elkander raken. De eene snijlijn is een interferentielijn op het film, de andere zoo'n langwerpig stipje.

tot het snijpunt van de as van den doorgeganen bundel met het film in mm. Door grootere of kleinere dikte der lijnen boven-, resp.




onderaan is de intensiteit der lijnen aangegeven, zooals die door ons in vijf trappen geschat werd, n.l.: zeer zwak, zwak, matig, sterk en zeer sterk. Op de as der teekening is door den afstand van twee lijntjes (links) aangegeven de grootste fout, die mogelijkerwijze bij de aflezingen gemaakt is.

Uit de foto van het grauwe tin volgt in de eerste plaats, dat deze stof kristallijn is, wat, zoover wij konden nagaan, tot nu toe niet bekend was. Ook verschilt de kristalstructuur van grauw blijkbaar van die van wit tin. Wij stellen ons voor over de samenstelling der beide atoomnetten spoedig nadere mededeelingen te doen.

Tot slot willen wij Prof. Keesom ten zeerste danken voor de welwillendheid, waarmede hij alle benoodigdheden voor de proeven tot onze beschikking stelde en voor zijn belangstelling en medewerking.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: „*Over den vorm van kleine vloeistofdruppels en gasbellen*" (Supplement N°. 42*c* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer J. P. KUENEN).

1. De meridiaandoorsnede van een vloeistofdruppel of gasbel (we onderstellen dat de druppel of bel een omwentelingslichaam is) kan, zooals men weet, niet met behulp van bekende functiën door een eindige vergelijking worden voorgesteld. Van de differentiaalvergelijking van die doorsnede:

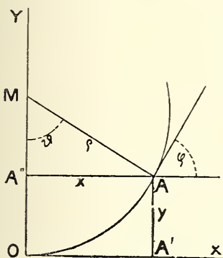


Fig. 1.

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=k(h+y)^{1)} \quad (1)$$

kan wel een eerste integraal geschreven worden in den vorm:

$$x \sin \varphi = \tfrac{1}{2} khx^2 + \frac{k}{2\pi} u, \quad . \quad (2)$$

waarbij $\varphi$ de hoek is dien de raaklijn vormt met de $x$-as (zie fig. 1; $OY$ is de omwentelingsas) en $u = 2\pi \int_0^x xy\,dx$ [2]), maar de berekening

---

[1]) Hierin stelt $k$ de uitdrukking $\frac{(\mu_1-\mu_2)g}{\sigma}$ voor, $\sigma$ zijnde de oppervlaktespanning, $\mu_1-\mu_2$ het verschil van de dichtheden der media beneden en boven den top, $g$ de intensiteit van het zwaarteveld; $k$ is dus positief of negatief, naar gelang de vloeistof zich beneden den top van het oppervlak bevindt (zooals bij een rustenden druppel) of daarboven (hangende druppel) $y$ is de hoogte van een punt van het oppervlak boven het raakvlak in den top. $h$ wordt bepaald door $kh=\frac{2}{R_0}$, $R_0$ zijnde de kromtestraal in den top; $R_0$ rekenen we positief wanneer het oppervlak naar boven toe hol is, negatief in het tegenovergestelde geval.

[2]) $u$ is klaarblijkelijk de inhoud van het lichaam, dat ontstaat door wenteling van het oppervlak $OAA'O$ (fig. 1) om de $y$-as. Uit verg. (2) volgt

$$2\pi x\sigma \sin \varphi = (\mu_1-\mu_2)g\,(\pi x^2 h + u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

van $u$ en dientengevolge de verdere integratie der differentiaalvergelijking kunnen slechts door achtereenvolgende benaderingen (of reeksontwikkeling) geschieden.

In het geval, dat de druppel, of de bel, weinig van den bolvorm afwijkt, is $y$ klein t.o.v. $h$ [1]). In eerste benadering kan dus $y$ tegenover $h$ verwaarloosd worden, d.w.z. $y = 0$ worden gesteld; men vindt dan inderdaad (tweede benadering) een cirkelvormige meridiaandoorsnede; wordt de daaruit afgeleide uitdrukking voor $y$ als functie van $x$ in $u$ gesubstitueerd, dan vindt men, als derde benadering, een eerste afwijking van den bolvorm, enz. [2]).

---

wat men ook onmiddellijk vindt, wanneer men bv. door toepassing van de zoogenaamde „gewichtsmethode" de stijghoogte berekent in een capillaire buis. De door A. Ferguson (Phil. Mag., (6), 28, 128, 1914) gevonden tegenstrijdigheid tusschen de uitkomsten van de integratie der differentiaalvergelijking en van de toepassing der gewichtsmethode is enkel het gevolg van een rekenfout bij het benaderen der verg. (2), waardoor Ferguson's formule (7) onjuist is.

De vergelijking (2) kan ook nog geschreven worden:

$$x \sin \varphi = \tfrac{1}{2} kx^2 (h + y) - \frac{k}{2\pi} v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

wanneer $v = \pi x^2 y - u$ het volume voorstelt, dat ontstaat door wenteling van het oppervlak $OAA''O$. Daaruit volgt:

$$2\pi x \sigma \sin \varphi = \pi (\mu_1 - \mu_2) g x^2 (h + y) - (\mu_1 - \mu_2) g v, \quad . \quad . \quad (3')$$

wat bv. uitdrukt, dat de resultante der krachten, welke langs den rand van een doorsnede van een hangenden druppel werken, evenwicht maakt met den hydrostatischen druk op de doorsnede en het gewicht van het afgesneden stuk, zoodat de oppervlaktespanning niet enkel evenwicht maakt met het gewicht van een hangenden druppel, zooals trouwens ook uit een eenvoudige evenwichtsbeschouwing volgt. (Zie daaromtrent Th. Lohnstein, Ann. d. Phys., 20, 238, 1906).

[1]) Dus is $R_0$ ook klein t. o. v. $h$ of $\frac{2}{kR_0}$; d. w. z. dat $kR_0^2$ een klein getal is.

[2]) Zie o.a. A. Winkelmann, Handb. der Physik, 2e Aufl. I (2), 1143 – 1144, 1908.

Stelt men $y = R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2} + z$, waarbij $z$ als oneindig klein wordt beschouwd t. o. v. $y$, dan kan, zoolang $z'$ ook oneindig klein is t. o. v. $y'$, $\sin \varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ in een reeks worden ontwikkeld, en men vindt, als $z_1$ de eerste benadering van $z$ voorstelt,

$$z_1 = \tfrac{1}{6} k \frac{R_0^4}{\sqrt{R_0^2 - x^2}} - \tfrac{1}{6} kR_0^3 + \tfrac{1}{3} kR_0^3 \log \frac{R_0 + \sqrt{R_0^2 - x^2}}{2R_0},$$

zooals ook, maar op eenigszins omslachtige wijze, door Ferguson (loc. cit.) werd gevonden. Deze uitdrukking geldt echter niet meer in de nabijheid van $x = R_0$, omdat $z'_1$ daar niet meer oneindig klein is t. o. v. $y'$, maar van dezelfde orde wordt (nl. van de orde $(kR_0^2)^{-\frac{1}{2}}$); dit werd door Ferguson (loc. cit.) over het hoofd gezien.

2. Het invoeren van poolcoordinaten, waarbij als oorsprong wordt gekozen het krommingsmiddelpunt $M$ in den top (fig. 1), biedt het voordeel, dat bij $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ geen discontinuiteit optreedt; dan is

$$x = \varrho \sin \vartheta \quad \text{en} \quad y = R_0 - \varrho \cos \vartheta \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en de vergelijking (1) wordt

$$\frac{\varrho \sin \vartheta - \varrho' \cos \vartheta}{\varrho \sin \vartheta \, (\varrho^2 + \varrho'^2)^{1/2}} + \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}} = \frac{2}{R_0} + k(R_0 - \varrho \cos \vartheta). \quad . \quad (5)$$

Stelt men nu

$$\varrho = R_0 (1 - \tau) \quad \text{en} \quad \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

$\tau_1$, $\tau_2$ enz. de achtereenvolgende benaderingen voorstellende van het oneindig kleine getal $\tau$, dan is, zoolang $\tau$ en $\tau'$ oneindig klein zijn, de verg. (5) te splitsen in een reeks andere, waarvan de eerste is

$$\tau''_1 \sin \vartheta + \tau'_1 \cos \vartheta + 2\tau_1 \sin \vartheta = kR_0^2 (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta \, ; \quad . \quad . \quad (5')$$

daaruit volgt: [1])

$$\tau_1 = \tfrac{1}{6} kR_0^2 \left[ (1 - \cos \vartheta) + 2 \cos \vartheta \log \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right) \right], \quad . \quad . \quad (6)$$

welke uitdrukking nu geldig blijft van $\vartheta = 0$ tot bij $\vartheta = \pi$.

3. In derde benadering wordt gevonden:

$$u = \tfrac{1}{3}\pi R_0^3 (1 - \cos \vartheta)^2 (1 + 2 \cos \vartheta) + \tfrac{1}{3}\pi k R_0^5 (1 - \cos \vartheta)^2 \cos^2 \vartheta +$$
$$+ \tfrac{1}{3}\pi k R_0^5 \sin^2 \vartheta \, (1 - 2 \cos \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta) \log \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right) \quad . \quad . \quad (7)$$

en

$$v = \tfrac{1}{3}\pi R_0^3 (1 - \cos \vartheta)^2 (2 + \cos \vartheta) - \tfrac{1}{6} \pi k R_0^5 (1 - \cos \vartheta)^3 (2 + \cos \vartheta) -$$
$$- \tfrac{1}{3}\pi k R_0^5 \sin^4 \vartheta \log \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

4. Tusschen de hoeken $\vartheta$ en $\varphi$ bestaat de betrekking:

$$\sin \varphi = \frac{\varrho \sin \vartheta - \varrho' \cos \vartheta}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} = \sin \vartheta + \tau' \cos \vartheta + \ldots;$$

[1]) Om deze vergelijkingen te integreeren bedenke men, dat

$$\cos \vartheta \, (\tau'' \sin \vartheta + \tau' \cos \vartheta + 2\tau \sin \vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \left[ \sin \vartheta \, (\tau \sin \vartheta + \tau' \cos \vartheta) \right]$$

en

$$\tau \sin \vartheta + \tau' \cos \vartheta = \cos^2 \vartheta \, \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{\tau}{\cos \vartheta} \right)$$

De integratie vertoont geen bijzondere moeilijkheden, maar de berekeningen zijn lang, en reeds die van $\tau_2$ is zeer tijdroovend; daarom is hier alleen $\tau_1$ berekend. Men ziet gemakkelijk in, dat $R_0 \tau_1 = z_1 \cos \vartheta$.

stelt men dus

$$\varphi = \vartheta + \psi , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dan komt, in eerste benadering (voor $\vartheta < \pi$)

$$\psi = \tau'_1 = \tfrac{1}{6} k R_0^2 \sin \vartheta \left[ \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} - 2 \log \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right) \right] \quad . \quad (8')$$

De verg. (2) geeft dus, in verband met (7), zoolang $\varphi$ niet zeer weinig van $\pi$ verschilt,

$$x = R_0 \sin \varphi - \tfrac{1}{6} k R_0^3 \sin \varphi \frac{(1 - \cos \varphi)(1 + 2 \cos \varphi)}{1 + \cos \varphi} -$$

$$- \tfrac{1}{36} k^2 R_0^5 \sin \varphi \frac{1 - \cos \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} (1 - 3 \cos \varphi + 6 \cos^2 \varphi + 8 \cos^3 \varphi) -$$

$$- \tfrac{1}{6} k^2 R^5_0 \sin \varphi \log \left( \frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^{1)} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

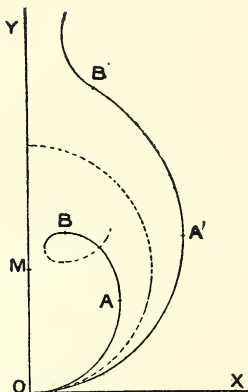


Fig. 2.

5. In fig. 2 stelt $OAB$ voor de meridiaandoorsnede van het capillair oppervlak in het geval $k > 0$, $OA'B'$ die doorsnede in het geval $k < 0$; beide zijn geteekend voor een positieven $R_0$ (voor negatieven $R_0$ moet de figuur om de $x$-as omgeslagen worden); tusschen de twee is geteekend (gestippeld) de cirkel met straal $R_0$ (overeenkomende met $k = 0$). In beide gevallen bereikt $x$ een maximum (in $A$ of $A'$), maar, terwijl in het eerste geval de lijn steeds in dezelfde richting gekromd blijft, en $y$ een maximum bereikt (in $B$), vervolgens $x$ een minimum enz. (zie § 7), vertoont de lijn in het tweede geval een buigpunt (in $B'$), waarna $x$ minimum wordt enz.

De maximumwaarde van $x$ verkrijgt men, door in (9) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ te stellen; men vindt aldus:

$$x_A (x_{A'}) = R_0 - \tfrac{1}{6} k R_0^3 + \tfrac{1}{36} k^2 R_0^5 (6 \log 2 - 1) , \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

---

[1]) Deze graad van benadering (4e) is één hooger dan die, welken men bereikt, door eenvoudig gebruik te maken van de betrekking (4).

waarbij behoort

$$\vartheta_A(\vartheta_{A'}) = \frac{\pi}{2} - \psi_A = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{6}\, kR_0^{\,2}\,(2\,log\,2 + 1)\,^{1}) \quad . \quad . \quad (10')$$

en

$$y_A\,(y_{A'}) = R_0 - R_0\,\psi_A = R_0 - \tfrac{1}{6}\, kR_0^{\,3}\,(2\,log\,2 + 1) \quad . \quad . \quad (10'')$$

6. Uit de formules (6) en (8′) volgt, dat in de nabijheid van $\vartheta = \pi$, wanneer men $\vartheta = \pi - \varepsilon$ stelt,

$$\tau_1 = -\tfrac{1}{3}\, kR_0^{\,2}\left(log\,\frac{\varepsilon^2}{4} - 1\right) \quad \text{en} \quad \tau'_1 = \tfrac{2}{3}\, kR_0^{\,2}\,\frac{1}{\varepsilon}; \quad . \quad . \quad (11)$$

zullen die formules dus in die nabijheid nog geldig zijn, dan moet, aangezien $\tau'_1$ een klein getal moet zijn, $\varepsilon$ steeds groot blijven t. o. v. $kR_0^{\,2}$. Dit is nog het geval in het punt $B$, waar $y$ maximum wordt, want (verg. 4, 6 en 11)

$$y = 2\,R_0 - \tfrac{1}{2} R_0 \varepsilon^2 + \tfrac{1}{3} kR_0^{\,3}\left(log\,\frac{\varepsilon^2}{4} - 1\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

zoodat uit $\dfrac{dy}{d\varepsilon} = 0$ volgt

$$\varepsilon_B = \sqrt{\tfrac{2}{3} kR_0^{\,2}},\; y_B = 2R_0\,[1 + \tfrac{1}{6}\, kR_0\, log\,(\tfrac{1}{6}\, kR_0^{\,2}) - \tfrac{1}{3}\, kR_0^{\,2}] \quad . \quad (12)$$

en, eveneens in 3<sup></sup>e benadering,

$$x_B = R_0 \varepsilon_B = R_0 \sqrt{\tfrac{2}{3} kR_0^{\,2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

Deze coördinaten zijn alleen dan reëel, wanneer $k$ positief is.

Is $k$ negatief, dan bereikt $\varphi$ in $B'$ (fig. 1) een maximum, behoorende bij een waarde van $\varepsilon$, welke bepaald wordt door $0 = \dfrac{d\varphi}{d\vartheta} = 1 + \dfrac{d\psi}{d\vartheta}$ (zie form. 8); men vindt aldus

$$\varepsilon_{B'} = \sqrt{-\tfrac{2}{3} kR_0^{\,2}}\;^{2}) \text{ waaruit } y_{B'} = 2R_0\,[1 + \tfrac{1}{6}\, kR_0^{\,2}\, log\,(-\tfrac{1}{6}\, kR_0^{\,2})] \quad . \quad (13)$$

$$x_{B'} = R_0 \sqrt{-\tfrac{2}{3} kR_0^{\,2}} \quad \text{en} \quad \varphi_B = \pi - 2\sqrt{-\tfrac{2}{3} kR_0^{\,2}} \quad . \quad . \quad (13')$$

7. Men kan nog verder gaan in het onderzoek van de meridiaandoorsnede van het capillair oppervlak. Dicht bij $\vartheta = \pi$ maakt die

---

[1]) Deze uitdrukking vindt men natuurlijk ook door $\dfrac{dx}{d\vartheta} = 0$ te stellen.

[2]) De waarde van $\varepsilon_B$' vindt men ook door te stellen $0 = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{R_0^{\,2}}\dfrac{d^2y}{d\varepsilon^2}$, (zie form. 11′).

lijn een scherpe bocht (fig. 3): $BCD$, met een dubbelpunt $E$, in het geval $k > 0$, $B'C'D'$, met twee buigpunten $B'$ en $D'$, in het geval $k < 0$; de gestippelde lijn (twee cirkelbogen) stelt den overgang voor bij $k = 0$.

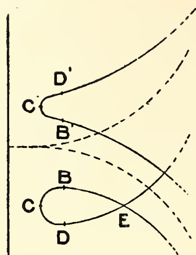



Fig. 3.

In die nabijheid kan de vergelijking van het oppervlak worden geschreven:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = k(h_C + \eta) \quad . \quad . \quad (7')$$

wanneer $h_C = h + y_C$, $y_C$ zijnde de ordinaat van het punt $C$ (of $C'$), en $\eta = y - y_C$. Nu is echter in het beschouwde gebied $\eta$ klein t.o.v. van $R_0$, zoodat $\eta$ tot in tweede benadering t.o.v. $h_C$ verwaarloosd kan worden, en met denzelfden graad van nauwkeurigheid, waarmede tot nu toe de afwijking van den cirkelvorm werd berekend, in het nu beschouwde gebied gesteld mag worden:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = kh_C = \text{constante} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

In derde benadering is dus $BCD$ een stuk van die lijn, welke door Plateau nodoïde werd genoemd, $B'C'D'$ een stuk van een onduloïde.

De vergelijkingen van die lijnen zijn bekend [1]; in ons geval kunnen ze echter sterk worden vereenvoudigd. Stellen we $kh_C = \frac{2}{r_0}$ [2]), dan is de eerste integraal van (14), in het geval der nodoïde ($\sin\varphi = 0$ voor $x = x_B$)

$$r_0 x \sin\varphi = x^2 - x_B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zijn $x_1$ en $x_2$ ($= x_C$) de maximum- en minimumwaarden van $x$, overeenkomende met $\sin\varphi = 1$ en $\sin\varphi = -1$, dan is bij benadering, omdat $x_B$ zeer klein is t.o.v. $r_0$ (zie form. 12'),

$$x_1 = r_0 = R_0 \text{ [3]}) \qquad x_2 \text{ of } x_C = \frac{x_B^2}{r_0} = \frac{2}{3} kR_0^3 \quad . \quad . \quad (16)$$

---

[1]) Zie b.v. Winkelmann, loc. cit., p 1150.

[2]) In eerste benadering is $r_0 = R_0$; in tweede benadering is $kh_C = k(h + 2R_0) = \frac{2}{R_0} + 2kR_0 = \frac{2}{R_0}(1 + kR_0^2)$, dus $r_0 = R_0(1 - kR_0^2)$.

[3]) $x_1$ behoort hier bij de nodoïde, en heeft dus niet dezelfde beteekenis als $x_A$ in § 5.

Uit (15) volgt nu verder, zoolang $x$ klein is t.o.v. $r_0$ [1]),

$$\pm \eta = x_2 \log \frac{x + \sqrt{x^2 - x_2^2}}{x_2} - \frac{1}{2R_0} x \sqrt{x^2 - x_2^2}. \quad . \quad . \quad (17)$$

Voor $x = x_B$ geeft dat

$$\eta_B = -\tfrac{1}{3} kR_0^3 \log(\tfrac{1}{6} kR_0^2) - \tfrac{1}{3} kR_0^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

waaruit

$$y_C = y_B - \eta_B = 2R_0 + \tfrac{2}{3} kR_0^3 \log(\tfrac{1}{6} kR_0^2) - \tfrac{1}{3} kR_0^3 \text{ [2]}), \quad . \quad (16')$$

en zoo ook, als $x_D$, $y_D$ de coördinaten zijn van het punt $D$,

$$x_D = x_B = R_0 \sqrt{\tfrac{2}{3} kR_0^2} \qquad y_D = y_C - \eta_B = 2R_0 + kR_0^3 \log(\tfrac{1}{6} kR_0^2) \quad (19)$$

8. In 't geval van de onduloïde, waar $\sin\varphi$ in $B'$ een minimum bereikt, is

$$r_0\, x \sin\varphi = x^2 + x_{B'}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

De maximum- en minimumwaarde van $x\,(\sin\varphi = 1)$ zijn nu bij benadering

$$x_1 = R_0 \qquad x_2 = x_{C'} = \frac{x_{B'}^2}{R_0} = -\tfrac{2}{3} kR_0^3 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Verder is in dat geval

$$\pm \eta = x_2 \log \frac{x + \sqrt{x^2 - x_2^2}}{x_2} + \frac{1}{2R_0} x\sqrt{x^2 - x_2^2}. \quad . \quad . \quad (22)$$

zoodat

$$\eta_B = -\tfrac{1}{3} kR_0^3 \log(-\tfrac{1}{6} kR_0^2) + \tfrac{1}{3} kR_0^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$y_{C'} = y_{B'} - \eta_{B'} = 2R_0 + \tfrac{2}{3} kR_0^3 \log(-\tfrac{1}{6} kR_0^2) - \tfrac{1}{3} kR_0^3 \quad . \quad (21')$$

$$x_{D'} = R_0 \sqrt{-\tfrac{2}{3} kR_0^2} \quad , \quad y_{D'} = 2R_0 + kR_0^3 \log(-\tfrac{1}{6} kR_0^2) - \tfrac{2}{3} kR_0^3 \quad (24)$$

---

[1]) Dan is nl.

$$\pm \frac{d\eta}{dx} = \frac{x_B^2 - x^2}{\sqrt{r_0^2 x^2 - (x_B^2 - x^2)^2}} = \frac{x_B^2 - x^2}{\sqrt{r_0^2 x^2 - x_B^4}} = \frac{R_0 x_2 - x^2}{R_0 \sqrt{x^2 - x_2^2}}.$$

[2]) Is $x$ groot t. o. v. $x_2$, dan is:

$$\pm \eta = x_2 \log \frac{2x}{x_2} - \frac{x^2}{2R_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17'')$$

zoodat de vergelijking van den tak $CBE$ (fig. 3) is:

$$y = y_c + \eta_+ = 2R_0 - \tfrac{1}{3} kR_0^3 + \tfrac{1}{3} kR_0^3 \log \frac{x^2}{4R_0^2} - \frac{x^2}{2R_0}$$

in overeenstemming met (11′) $\left(\text{immers } \varepsilon = \dfrac{x}{R_0}\right)$.

Voor de abscis van het knooppunt $E\,(y_E = y_C)$ vindt men daaruit:

$$x_E^2 = -\tfrac{2}{3} kR_0^4 \log kR_0^2.$$

9. Uit form. (7′) volgt, dat het volume van een druppel, tot aan het horizontale vlak gaande door $B$ of $B'$ ($\vartheta = \pi - \varepsilon$), in $2^e$ benadering gelijk is aan

$$v = \tfrac{4}{3}\,\pi R_0^3\,(1 - kR_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

Dit is ook, met denzelfden graad van nauwkeurigheid, in het geval van een hangenden druppel het volume tot aan den halscirkel; men vindt nl., dat het volume tusschen de vlakken gaande door buigpunt en halscirkel slechts een te verwaarloozen bijdrage oplevert.

In verband hiermede volgt uit form. (2′) in $4^{de}$ benadering:

$$x_B = \sqrt{\tfrac{2}{3} kR_0^3}\,(1 - kR_0^2), \quad \text{en} \quad x^{C'}{}_C = \pm\,\tfrac{2}{3}\,kR_0^3\,(1 - \tfrac{5}{3}\,kR_0^2) \quad , \qquad (19')$$

het bovenste teeken behoorende bij den bovensten index.

10. Van uit de punten $D$ en $D'$ (fig. 3) kan het onderzoek nog verder worden voortgezet, en wel op een soortgelijke wijze als hierboven. De meridiaankromme van het volledige capillaire oppervlak bestaat nl. bij benadering uit een reeks van bijna halfcirkelvormige bogen, telkens verbonden door stukken van een onduloïde of een nodoïde.[1]) De middelpunten dier bogen liggen achtereenvolgens op de hoogten $R_0$, $3\,R_0$, $5\,R_0$ enz.; voor elken ($n^{den}$) boog plaatsen we dus den oorsprong in het bijbehoorende ($n^{de}$) middelpunt, en schrijven als in § 2:

$$x = \varrho \sin\vartheta \quad , \quad y = (2n-1)\,R_0 - \varrho\cos\vartheta \quad , \quad \varrho = R_0\,(1 - \tau) \;. \quad (26)$$

Nu wordt $\tau$ bepaald door:

$$\tau'' \sin\vartheta + \tau' \cos\vartheta + 2\tau \sin\vartheta = kR_0^2\,(2n - 1 - \cos\vartheta)\sin\vartheta, \qquad (26')$$

waaruit volgt, als men de voorwaarde invoert, dat de bogen en tusschenstukken aan elkander sluiten:

$$\tau = [\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}(n-1) - \{\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\log 2 + \tfrac{1}{3}\,n\,(n-1) - \Sigma\,\frac{4\,(n-1)}{3}\log(n-1) -$$
$$- \tfrac{2}{3}\,n\,(n-1)\log(\pm\tfrac{1}{6}\,kR_0^2)\}\cos\vartheta + \frac{n}{3}\cos\vartheta\log(1 + \cos\vartheta) -$$
$$- \frac{2\,(n-1)}{3}\cos\vartheta\log(1 - \cos\vartheta)]\,kR_0^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

Voor de tusschenstukken gelden overigens steeds de vergel. (17), (22) en $x_2 = x_C = \dfrac{x^2{}_B}{R_0}$.

11. De achtereenvolgende bogen en hun verbindingsstukken zijn

[1]) Zie Winkelmann, loc. cit., p. 1141, fig. 404.

slechts stuksgewijze te verwezenlijken, b.v. tusschen twee horizontale platen of tusschen twee verticale coaxiale cylinders. Niet ieder aldus verkregen oppervlak echter is een gedeelte van datgene, waarvan we de meridiaandoorsnede bij benadering hebben onderzocht. Wordt het oppervlak b.v. gevormd tusschen twee cylinders, die door de vloeistof bevochtigd worden, dan stelt de verhouding $\frac{(x_C)_{n-1}}{(x_A)_n}$ de verhouding voor van de stralen van die cylinders, en die verhouding kan in § 10 niet iedere willekeurige (kleine) waarde aannemen, zoolang $n$ een geheel getal voorstelt. Stelt men echter $2(n-1)=\alpha$, en laat men nu toe, dat $\alpha$ een willekeurige (positieve of negatieve) waarde aanneemt, dan blijven de vergelijkingen (26) en (26′) nog geldig, en

$$\tau = kR_0^2 \left[a + \tfrac{1}{2}\alpha + b \cos\vartheta + \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{6} - a)\cos\vartheta \log(1+\cos\vartheta) - \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6} - a)\cos\vartheta \log(1-\cos\vartheta)\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

waarin $a$ en $b$ integratieconstanten zijn. $R_0$ is nog onbepaald, evenals $h$, dat nog steeds met $R_0$ verbonden blijft door de betrekking $kh = \frac{2}{R_0}$; wat de waarde van $\alpha$ betreft, deze kan willekeurig worden gekozen. [1])

Bij kleine $\vartheta$ vertoont de lijn een minimum van $y$ of een buigpunt, [2]) naar gelang $(\frac{1}{6} - a)k \gtrless 0$; voor een waarde van $\vartheta$ weinig verschillend van $\pi$ vertoont de lijn een maximum van $y$ in het geval $(\frac{5}{6} - a)k > 0$ of een buigpunt in het geval $(\frac{5}{6} - a)k < 0$. [2])

12. Ook hier bestaat de meridiaandoorsnede uit een reeks van bogen, welke zich nu evenwel zoowel naar beneden als naar boven onbepaald uitstrekt. Is $k > 0$ dan vertoonen de hoogste bogen in de reeks maxima en minima van $y$, de onderste buigpunten, zooals dat in fig. 4 schematisch is voorgesteld. In 't geval $k < 0$ zijn

---

[1]) Wordt b.v. de meniscus gevormd tusschen twee coaxiale cylinders, die door de vloeistof worden bevochtigd, en zijn de stralen van die cylinders $R$ en $r$ (waarbij $r$ klein moet zijn t. o. v. $R$), dan worden $a$ en $R_0$ bepaald door de voorwaarden $x_C = r$ en $x_A = R$; $\alpha$ en $b$ blijven daarbij willekeurig te kiezen: men kan b.v. $\alpha = 0$ stellen, terwijl men $b$ bepalen kan door b.v. $y_D = 0$ te stellen.

[2]) In 't algemeen is hier dus niet, zooals in §§ 6 en volg., het bestaan van een minimum en maximum van $y$ gebonden aan $k > 0$, en het bestaan van een buigpunt aan $k < 0$.

het de bovenste bogen, die buigpunten vertoonen, en de onderste maxima en minima van $y$, zooals men verkrijgt door fig. 4 onderst boven te keeren. Stelt men $\frac{1}{6} - a = \beta$, dan beantwoorden de achtereenvolgende minima en maxima van $x$ aan:

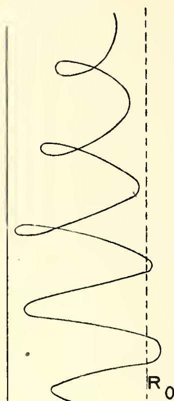



Fig. 4.

$$x_{min.} = \pm \left(\beta + \frac{2n}{3}\right) kR_0^3$$

$$x_{max.} = R_0 - \left[\frac{1}{2} a - \beta + \frac{2n+1}{6}\right] kR_0^3 \quad . \quad (29)$$

Daar waar $\beta + \frac{2n}{3}$ van teeken verandert (kleinste waarde van $x_{min}$) geschiedt de overgang tusschen de twee soorten van lijnen. Is toevallig $\beta = \frac{2m}{3}$, $m$ een geheel getal zijnde, dan wordt de kleinste waarde van $x_{min}$ nul, en men komt terug tot de in § 10 beschouwde meridiaandoorsneden.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: *„Over het meten van oppervlaktespanningen met behulp van kleine druppels of bellen"*. (Supplement N°. 42*d* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer J. P. KUENEN).

1. De meest gebruikelijke methodes ter bepaling van oppervlaktespanningen met behulp van kleine vloeistofdruppels of gasbellen, methodes waartoe eigenlijk ook die der capillaire stijghoogten behoort, berusten op de meting van het hydrostatische drukverschil tusschen de media binnen en buiten den druppel of de bel; de oppervlaktespanning wordt nl. gegeven door de formule

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\, g h R_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin $\mu_1 - \mu_2$ het verschil is van de dichtheden der twee aangrenzende media, $g$ de intensiteit van het zwaarteveld, $R_0$ de kromtestraal in den top van den meniscus en $h$ het verschil der drukkingen aan de twee kanten van het oppervlak, gemeten als een kolom der vloeistof, omgeven door het omringende medium. Is de druppel (of de bel) zóó klein, dat hij als bolvormig kan worden beschouwd, dan kan voor $R_0$ de halve breedte $r$ van dien druppel (of bel) worden genomen (de straal van de capillaire buis, waarin de vloeistof opstijgt, ten minste wanneer er geen randhoek is); zal echter de daarbij verkregen benadering groot genoeg zijn [1]), dan moet de straal zóó klein worden genomen, dat meestal de relatieve nauwkeurigheid der meting van dien straal ver ten achteren staat bij die, welke bij de meting van $h$ kan worden bereikt, terwijl het natuurlijk wenschelijk is, $R_0$ en $h$ met dezelfde relatieve nauwkeurigheid te kennen. Daarvoor is het noodig de waarnemingen aan niet al te kleine druppels of bellen te verrichten, waardoor dan tevens het aanbrengen van een correctie, wegens afwijking der bolvormigheid, noodzakelijk is [2]).

---

[1]) De relatieve fout is van de orde $kR_0^2$, waarin $k = \dfrac{(\mu_1 - \mu_2)\, g}{\sigma}$ (zie form. 2).

[2]) $R_0$ kan ook rechtstreeks door een optische meting worden bepaald (zie H. SIEDENTOPF, Diss. Göttingen, 1897). Ook kan men $R_0$ door metingen op photographieen bepalen (zie b.v. A. FERGUSON, Phil. Mag., (6), 23, 417, 1912). Een hooge nauwkeurigheid wordt daarbij echter niet bereikt.

2. Stelt men in form. (10) van de vorige meded. (Suppl. N$^0$. 42$c$) $x_A = r$, dan komt

$$R_0 = r + \tfrac{1}{6} kr^3 - \tfrac{1}{18} k^2 r^5 (3 \log 2 - 2), \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

waaruit $R_0$ te berekenen is, wanneer $r$ gegeven is en $k$ bij benadering bekend is. Gesubstitueerd in (1) geeft dit:

$$h = \frac{2}{kr} - \tfrac{1}{3} r + \tfrac{1}{6} kr^3 (2 \log 2 - 1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

of

$$\sigma = \tfrac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2)\, ghr \left[1 + \tfrac{1}{3} \frac{r}{h} - \tfrac{1}{3} \frac{r^2}{h^2} (2 \log 2 - 1)\right] . \; . \; . \quad (4)$$

reeds bekende formules [1]), waarmede de oppervlaktespanning tot in 3$^e$ benadering te berekenen is uit de capillaire stijghoogte $h$ in een buis met straal $r$, welke door de vloeistof volkomen wordt bevochtigd [2]).

Dezelfde formules zijn, met inachtneming van de teekens der grootheden, van toepassing in ieder geval, waar de breedte van een druppel of bel gemeten kan worden alsmede de druk, noodig om den druppel of de bel te vormen. Zoo kan, in 't geval dat de vloeistof den wand niet bevochtigt (kwik), de vloeistof door overdruk uit een zeer wijde in een nauwe communiceerende buis worden opgeperst, tot ze als een druppel boven de nauwe buis uitsteekt; $h$ is dan de hoogte van den vloeistofspiegel in de wijde buis boven den top van den meniscus op de capillair [3]). Zoo kan ook, in 't geval de capillaire buis wel door de vloeistof wordt bevochtigd, de meniscus door druk van een gas naar beneden worden gedrukt, tot zich een bel vormt onderaan de capillair [4]).

---

[1]) Zie b. v. A. Winkelmann, Handbuch der Physik, 2e Aufl., I, (2), 1144 en 1159, 1908.

[2]) In 't geval, dat er een randhoek $i$ is, vindt men, door in form. (9) van de vorige meded. (Suppl. N$^0$. 42$c$) $x = r$ en $\varphi = \frac{\pi}{2} - i$ te stellen,

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\, ghr \sec i \left[1 + \tfrac{1}{3} \frac{r}{h} \sec^3 i\, (1 - \sin i)^2 (1 + 2 \sin i) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3} \frac{r^2}{h^2} \sec^6 i\, (1 - \sin i)^3 (1 + \sin i + 2 \sin^2 i) + \tfrac{2}{3} \frac{r^2}{h^2} \sec^2 i \log \frac{1 + \sin i}{2}\right] \quad (5)$$

[3]) In dit geval blijven form. (3) en (4) zonder wijziging geldig, omdat $h$ en $R_0$, dus ook $r$, beide van teeken veranderen (zie vorige meded.). Deze eenvoudige methode, welke van den randhoek onafhankelijk is, en welke toelaat door verwijderen van den druppel het capillaire oppervlak te ververschen, schijnt nooit op kwik toegepast te zijn.

[4]) Zie A. Winkelmann, l.c., p. 1162. Zie ook verder § 9. Op deze wijze bepaalt men evenwel niet de oppervlaktespanning van de zuivere vloeistof in aanraking met haar damp, maar die van het binaire stelsel vloeistof-gas.

3. Heeft men met een hangenden druppel te maken, dan veranderen $\mu_1 - \mu_2$ en $h$ van teeken (zie vorige meded.), en de formule (4) wordt:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)\, g\, h\, r\, [1 - \tfrac{1}{3}\frac{r}{h} - \tfrac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}(2 \log 2 - 1)] \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

De praktische toepassing van deze formule is echter niet zoo eenvoudig als die van form. (3), omdat een hangende druppel, gevormd aan het uiteinde van een capillair, welke met een wijde buis communiceert, niet in stabiel evenwicht is [1]). Maar men kan het evenwicht stabiel maken door de met de capillair communiceerende buis eveneens nauw te nemen, b.v. den druppel te laten hangen aan een enkele capillair, zooals bij de methode van SENTIS [2]); dan moet evenwel rekening gehouden worden met de kromming van den meniscus in de nauwe buis. Is $h_1$ de afstand der toppen der twee menisci en $h_2$ de stijghoogte van de vloeistof in de nauwe buis (welke stijghoogte afzonderlijk kan worden bepaald), dan is klaarblijkelijk in de form. (4′) te substitueeren:

$$h = h_1 - h_2.$$

4. Beschouwen we nog eens het geval van een druppel, b.v. een kwikdruppel, die zich boven een capillair vormt onder den overdruk van de vloeistof in een zeer wijde communiceerende buis (§ 2). Wanneer het kwik, door het opvoeren van de vloeistof in de wijde buis, den rand van de capillair heeft bereikt, begint zich de menisus, die er boven uitsteekt, bij verder opvoeren der vloeistof hoe langer hoe sterker te krommen, zoodat het hoogteverschil $h$ tusschen de twee buizen, dat aanvankelijk constant was gebleven, thans toeneemt. Weldra is de meniscus ten sterkste gekromd, en meteen bereikt het hoogteverschil $h$ een maximum.

Dit maximum van $h$ wordt bereikt wanneer $R_0$ een minimum is, [3]) wat gebeurt wanneer $R_0$ ten naasten bij gelijk is aan $r$, den straal van de capillair ($R_0$ wordt hier gemakshalve positief gerekend). Stellen we $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \omega$, $\vartheta$ de beteekenis hebbende, die in de vorige meded. § 2 is aangegeven, en $\omega$ een oneindig kleinen hoek voorstellende,

---

[1]) Een onmerkbare daling van het niveau in de wijde buis is voldoende om den straal van den hangenden druppel merkbaar te laten toenemen, waardoor $h$ grooter wordt, terwijl de capillaire tegendruk kleiner wordt; daardoor stroomt de vloeistof verder uit. Bij een liggenden druppel daarentegen wordt $h$ kleiner en is het evenwicht binnen bepaalde grenzen standvastig (zie verder §§ 4 en 7).

[2]) SENTIS, Journ. de Physique, 6, 571, 1887.

[3]) Tusschen $h$ en $R_0$ bestaat immers de betrekking $kh = \frac{2}{R_0}$ (zie vorige meded. in dit Verslag).

dan wordt form. (9) derzelfde mededeeling, omdat (zie form. 8 en 8′ derzelfde med.)

$$\varphi = \vartheta + \psi = \frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{6}\, kR_0^{2}\, (2 \log 2 + 1) + \omega,$$

$$r = R_0 - \tfrac{1}{2}\, R_0\, [\omega + \tfrac{1}{6}\, kR_0^{2}\, (2 \log 2 + 1)]^{2} - \tfrac{1}{6}\, kR_0^{3} + \tfrac{1}{36}\, k^{2} R_0^{5}\, (6 \log 2 - 1)\,. \quad (6)$$

Daaruit volgt, dat het minimum van $R_0$ wordt bereikt bij

$$\omega_1 = -\tfrac{1}{6}\, kR_0^{2}\, (2 \log 2 + 1), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

dus bij $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d.w.z. juist wanneer $x_A = r$. De oppervlaktespanning wordt dus gegeven door de form (4), waarin $r$ nu voorstelt de straal van de capillair en $h$ het grootste niveauverschil van het kwik in de wijde buis en boven de capillair; omgekeerd wordt bij gegeven $r$ en $k$ dat grootste niveauverschil gegeven door form (3).

5. Het kwik kan in beide buizen nog hooger worden opgevoerd. Dan wordt de kromtestraal $R_0$ in den top van den druppel weer grooter, zoodat $h$ kleiner wordt. Niettemin stijgt het kwik nog een poos in de wijde buis, d.w.z. de hoogte $H = h + y$ van den vloeistofspiegel in de wijde buis boven den top van de capillair ($y$ stelt de hoogte voor van den druppel, en wordt hier dus positief gerekend) neemt nog toe. Maar ook deze hoogte bereikt weldra een maximum.

Stelt men weer $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \omega$, dan is (form. 4 der vorige meded.)

$$H = h + y = \frac{2}{kR_0} + R_0 + R_0\omega, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

en nu volgt hieruit en uit (5) dat $H$ maximum wordt wanneer

$$\omega_2 = \tfrac{1}{3}\, kR_0^{2}\, (1 - \log 2),\; (R_0)_2 = r + \tfrac{1}{6}\, kr^{3} - \tfrac{1}{72}\, k^{2} r^{5}\, (12 \log 2 - 17), \quad (9)$$

zoodat

$$H_m = \frac{2}{kr} + \tfrac{2}{3} r + \tfrac{1}{12} kr^{3}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

waaruit

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\, g H_m r \left(1 \quad \tfrac{2}{3}\, \frac{r}{H_m} - \tfrac{1}{6}\, \frac{r^{2}}{H_m^{2}}\right) \quad . \; . \quad (11)$$

6. Om de bruikbaarheid der in §§ 4 en 5 geschetste methode te toetsen, werden eenige proeven genomen met kwik in aanraking met lucht. De wijde buis was wijd genoeg (± 2 c.M. straal), om daarin den meniscus als vlak te mogen beschouwen; de straal van de nauwe buis was, aan den glad afgebroken top, 1,090 m.M.

Langs een caoutchoucbuis stond de wijde buis in verband met een met kwik gevulden, verstelbaren trechter; door dezen trechter langzaam naar boven te schuiven, neemt men zeer gemakkelijk de oogenblikken waar, waarop eerst $h$, daarna $H$ een maximum bereikt [1]).

De maximumwaarden van $h$ en $H$ bleken in hooge mate afhankelijk te zijn van de langzaamheid met welke de druppel gevormd werd. Uit deze proeven volgt dus geen bepaalde waarde voor de oppervlaktespanning kwik-lucht. Zoo werd gevonden, voor een druppel die zeer lang aan de lucht was blootgesteld geweest, $h_m = 0{,}490$ (bij $t = 17°{,}3$), waaruit volgt, met behulp van form. (4) ($\mu_1 - \mu_2 = 13{,}55$, $g = 981$)

$$\sigma = 0{,}355\,(1 + 0{,}074 - 0{,}006) = 379,$$

terwijl dadelijk na vorming van een nieuwen druppel werd waargenomen $h_m = 0{,}592$, dus $\sigma = 454$.

Zoo werd ook gevonden, bij een proef waarbij het overstroomen van het kwik 1 min. ongeveer na verversching van het oppervlak geschiedde, $H_m = 0{,}708$ (bij 18°,2 C.), zoodat (form. 11)

$$\sigma = 513\,(1 - 0{,}102 - 0{,}004) = 459,$$

terwijl voor een druppel, die pas na een half uur overstroomde, $H_m = 0{,}659$ was, dus $\sigma = 423$; na een paar uren werd zelfs waargenomen $H_m = 0{,}619$, $\sigma = 393$. [2])

[1]) Het maximum van $h$ neemt men gemakkelijk waar, door gebruik te maken van een micrometer met verschuifbaren draad; de vaste horizontale draad I van het draadnet wordt dan op den meniscus in de wijde buis, de beweegbare (horizontaal gestelde) draad II op den meniscus in de nauwe buis ingesteld. Bij langzaam opschroeven van den trechter (dien men eerst zoover naar boven heeft geschoven, dat het kwik als een bijna halfvormige meniscus boven de nauwe buis uitsteekt), of door druppelsgewijze bijgieten van kwik, ziet men, terwijl I en II langzaam stijgen, den afstand I—II langzaam toenemen en een grootste waarde bereiken. Daarna stijgen I en II nog, maar de afstand I—II neemt weer af. Meteen ziet men den druppel boven de nauwe buis hoe langer hoe meer uitpuilen, den halven bol duidelijk overschrijden en dan vrij plotseling snel aanzwellen en over den rand der buis heenstorten; tegelijkertijd daalt dan het niveau I zeer snel, zoodat $H$ een maximum heeft bereikt.

[2]) Dit verminderen van de oppervlaktespanning van aan lucht blootgesteld kwik werd reeds door QUINCKE waargenomen (Pogg. Ann., 105, 1, 1858). Ook GRÜNMACH (Ann. d. Phys., 28, 247, 1909; methode der capillaire golven) vond een veel hoogere waarde van $\sigma$ bij versche oppervlakken ($\sigma = 491{,}2$ bij 18° ong.) dan bij oppervlakken, die een half uur aan de lucht waren blootgesteld geweest ($\sigma = 405{,}0$). Zie overigens WINKELMANN, loc. cit., p. 1168.

Vluchtige dampen in de lucht blijken de oppervlaktespanning van het kwik ook sterk te verlagen; het was b.v. voldoende bij de proeven van § 6 een met benzine of alcohol gedrenkt vloeitje in de nabijheid van den vrijwel halfbolvormigen druppel te brengen, om dezen dadelijk te laten overvloeien.

In ieder geval blijkt hieruit de bruikbaarheid der methode. Overigens kunnen de proeven gemakkelijk zóó worden ingericht, dat de oppervlaktespanning in het luchtledige wordt bepaald, waarbij zich dan wel geen veranderlijkheid van $\sigma$ met den tijd zou voordoen [1]).

7. Inplaats van den kwikdruppel te vormen aan het boveneinde van een capillair, kan men dien ook aan het ondereinde laten ontstaan. Men kan nl. een wijde buis van onderen afsluiten met een vlak plaatje, waarin een cirkelvormige opening is gemaakt; giet men dan kwik in de buis, dan vormt zich aan de opening een kleine hangende druppel, die valt bij een bepaalde maximale hoogte van het kwik in de buis, waarna het kwik verder uitstroomt. Ook uit de kennis van die maximumhoogte en van den straal der opening is de oppervlaktespanning van het kwik af te leiden.

Stelt $H$ de hoogte voor van den vloeistofspiegel in de wijde buis boven de opening, dan is $H = h' - y$, $h'$ zijnde de hoogte van het kwik in de wijde buis boven den top van den hangenden druppel, en $y$ nogmaals de hoogte van den druppel voorstellende. Hierbij is nu echter $k$ negatief (zie vorige meded.), zoodat $h = \frac{2}{kR_0} = -h'$ en $H = -(h + y)$. Het zoeken van het maximum van $H$ bij onveranderlijke $x = r$ voert dus tot dezelfde formules als in § 5, behalve dat $k$ en $H$ het negatieve teeken moeten krijgen.

Daaruit volgt in de eerste plaats dat $\omega_2$ (form. 9) negatief is; d. w. z. de druppel valt nog vóór dat $\varphi$ de waarde $\frac{\pi}{2}$ heeft bereikt (zie § 3), zoodat in dit geval $h$ zijn maximumwaarde (§ 4) niet bereiken kan. In de tweede plaats is nu, volgens form. (11), als $H_m$ positief wordt gerekend,

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\mu_2 - \mu_2) g \, H_m r \left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{r}{H_m} - \tfrac{1}{6}\frac{r^2}{H_m^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

8. Ook op deze wijze werd een bepaling gedaan van de waarde van $\sigma$ voor kwik. Daartoe werd een buis van $\pm 1^1/_2$ c.M.-straal van onderen afgesloten door een plaatje waarin een kort eindje van een glazen capillair ($r = 0{,}522$ m.M.) was gestoken. Werd het kwik druppelsgewijze in die buis gebracht, zoo vormde zich aan het ondereinde van den capillair een druppel, die bezweek, nog vóórdat hij den halven bolvorm had bereikt.

---

[1]) In het luchtledige vond FÜRTH (Wien. Ber., IIa, 126, 329, 1917) $\sigma = 440$ tot 445 bij 18° C; van een veranderlijkheid van $\sigma$ met den tijd werd daarbij niets waargenomen.

Hier ook was de waarde van $H_m$ in hooge mate afhankelijk van den tijd, die bij de vorming van den druppel verliep; de grootste waargenomen waarde was $H_m = 1{,}230$, waaruit volgt

$$\sigma = 427\,(1 + 0{,}028 - 0{,}003) = 438$$

Werd de buis tot geringer hoogte gevuld en verder aan zich zelf overgelaten, dan zag men den druppel toch hoe langer hoe sterker uitpuilen en ten slotte bezwijken, ten gevolge van de vermindering van $\sigma$.

9. Wordt in een capillaire buis, waarin een vloeistof opstijgt, druk uitgeoefend met een samengeperst gas, zoodat de meniscus naar beneden wordt gedrukt, totdat onder aan de capillair een gasbel wordt gevormd, dan blijkt die gasbel te ontwijken bij een bepaalde maximumwaarde van het verschil tusschen den gasdruk en den hydrostatischen druk aan het ondereinde van de capillair. Uit dit maximale drukverschil kan de oppervlaktespanning der vloeistof (in aanraking met het gas) worden afgeleid [1]).

Het verschijnsel is volkomen van denzelfden aard, als het in § 5 beschrevene, en de theorie kan op dezelfde wijze worden ontwikkeld [2]). Stelt $H$ het bedoelde drukverschil voor, terwijl $h = \dfrac{2}{kR_0}$ weer de capillaire druk voorstelt in den top van den meniscus en $y$ de hoogte van de bel, dan is, zooals in § 5, $H = h + y$, en aangezien $k$ en $R_0$ ook positief zijn, vindt men in dit geval dezelfde formules als in § 5 terug [3]).

Ook $h$ bereikt in dit geval een maximum, wat eveneens als grondslag voor een bepaling der oppervlaktespanning gebruikt zou kunnen worden; daarbij zou dan weer form. (4) gelden. De meting van $H$ is echter eenvoudiger dan die van $h$, en dus praktisch boven deze te verkiezen.

10. Verscheidene onderzoekers hebben oppervlaktespanningen afgeleid enkel uit metingen, aan druppels verricht, dus zonder drukwaarneming. [4]) In 't geval van kleine druppels wordt dan de oppervlaktespanning dus afgeleid uit de afwijking van den bolvorm; daarbij

[1]) Deze methode werd het eerst toegepast door SIMON (Ann. d. ch. et d. phys., (3), 32, 5, 1851), die zonder voldoende bewijs aannam, dat het maximale drukverschil de capillaire stijghoogte bepaalt, wat slechts voor zeer nauwe buizen juist is. De methode van SIMON werd later door verscheidene andere onderzoekers gebruikt (zie WINKELMANN, l.c., p. 1162).

[2]) Zie ook E. SCHRÖDINGER, Ann. d. Phys., (4), 46, 413, 1915.

[3]) In overeenstemming met de door SCHRÖDINGER, l c., gevondene.

[4]) Zie WINKELMANN, loc. cit., p. 1160. Zie ook J. E. VERSCHAFFELT et Ch. NICAISE, Bull, Acad. de Belg., 1912, p. 192.

komen dan hoofdzakelijk in aanmerking de formules (10) en (10'') der vorige meded. (of (2) dezer meded.), waaruit volgt:

$$\sigma = \tfrac{1}{6} \frac{r^3}{R_0 - r} (\mu_1 - \mu_2) g \left[ 1 - 2 \frac{R_0 - r}{r} (3 \log 2 - 2) \right], \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\sigma = \tfrac{1}{3} (\mu_1 - \mu_2) g \frac{r^3}{r - y} \log 2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$r$ zijnde de grootste straal van den druppel (halve breedte) en $y$ de afstand van den top tot het vlak van de doorsnede met straal $r$.

Aangezien hierbij de bepaling van $\sigma$ berust op de juiste kennis der numerieke waarde van termen, die bij de methode der drukwaarneming slechts als correctietermen dienst deden, kan deze methode slechts veel minder nauwkeurige uitkomsten opleveren dan de vorige. Zij schijnt echter wel aangewezen voor vloeistoffen, die slechts in zeer kleine hoeveelheden te verkrijgen zijn.

11. Een derde manier om met behulp van kleine druppels oppervlaktespanningen te bepalen bestaat in het meten van het gewicht van kleine afvallende druppels.

Uit de formules (25) en (19') der vorige meded. volgt, dat het volume van een kleinen, ingesnoerden, hangenden druppel, is

$$v = \frac{2\pi r' \sigma}{(\mu_2 - \mu_1) g} \left( 1 - \frac{r'}{R_0} \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$r'$ zijnde de straal van den halscirkel. Valt nu de druppel van een zeer dun staafje af, in het geval dat de vloeistof den wand bevochtigt, of uit een zeer nauw buisje, in het tegenovergestelde geval, [1]) dan is $r'$ niet gelijk aan den straal $r$ van de staaf of buis; het verschil is evenwel zeer klein. De druppel valt nl. niet af op het oogenblik dat $r' = r$; vóór het vallen snoert de druppel nog iets verder in, terwijl daarbij het volume nog iets toeneemt, totdat het een maximum bereikt. Want, volgens form. (17) van de vorige meded. is, wanneer $x = r$ zeer weinig van $x_2 = r'$ verschilt, het volume begrepen

[1]) De formule (14) geldt natuurlijk alleen voor een druppel die in evenwicht hangt, en niet voor een druppel, die door strooming uit een buis ontstaat (zie WINKELMANN, loc. cit. p. 1162). Nu blijkt uit § 7. dat aan de opening van een buis geen ingesnoerde druppel in evenwicht kan hangen, wanneer die druppel vrij in verbinding staat met vloeistof in een wijde buis. Een sterk ingesnoerde druppel kan alleen dan bestaan, wanneer het verband met het vrije oppervlak in de wijde buis verbroken is, b.v. door tusschenkomst van een kraan; door deze zeer weinig te openen, kan men den druppel zich zeer langzaam laten vormen, totdat hij valt: op ieder oogenblik kan dan de druppel als in evenwicht zijnde worden beschouwd, en zijn verdere vervorming door sluiten der kraan worden tegengehouden Zoo kan zich ook een sterk ingesnoerde druppel vormen aan het uiteinde van een lange capillair, waar de vloeistof slechts langzaam doorstroomt (zie ook § 3).

tusschen de cirkels met stralen $r$ en $r'$ gelijk aan $\pi r'^2 \sqrt{2r'(r-r')}$, zoo dat het volume van den druppel tot aan het ophangvlak gelijk is aan

$$v' = \frac{2\pi r'\sigma}{(\mu_2-\mu_1)\,g} + \ldots + \pi r'^2 \sqrt{2r'(r-r')},$$

en dit volume is een maximum, wanneer

$$r' = r\,(1-\tfrac{1}{8}k^2 r^4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Het maximumvolume wordt dus nog met voldoende nauwkeurigheid voorgesteld door form. (14), wanneer daarin $r'$ door $r$ wordt vervangen.

Is eenmaal dit maximum bereikt, dan heeft de geringste toevoer van vloeistof noodzakelijk het afbreken van den druppel ten gevolge. Is $G$ het gewicht van den druppel, [1]) dan volgt uit form. (14) (met $r' = r$), dat

$$\sigma = \frac{G}{2\pi r}\left(1+\frac{r}{R_0}\right) = \frac{G}{2\pi r}\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}kr^2}\right) = \frac{G}{2\pi r}\left(1+\sqrt[3]{\tfrac{4}{3}\frac{\pi r^3}{v}}\right)^{2} \quad (16)$$

[2])

Dit is dus de formule, die in 't geval van een zeer kleinen druppel in de plaats gesteld moet worden van de eenvoudige formule van Quincke. [3])

---

[1]) $G = (\mu_2-\mu_1)\,gv$; $G$ is dus het schijnbare, niet tot luchtledig gereduceerde gewicht.

[2]) Het is misschien niet zonder belang er even op te wijzen, dat de formule (16) gemakkelijk te vinden is op de volgende manier. De moleculaire krachten (oppervlaktespanning) langs den halscirkel maken evenwicht met het gewicht van den druppel en den hydrostatischen druk op het vlak van den halscirkel; men heeft dus (zie ook vorige meded., form. 3′):

$$2\pi r\sigma = G + \frac{2\sigma}{R_0}\,.\,\pi r^2,$$

waarbij de term $-\pi r^2(\mu_2-\mu_1)\,gy$ verwaarloosd is. Deze vergelijking komt overeen met diegene, welke bij het berekenen der capillaire stijghoogte door de zoogenaamde gewichtsmethode wordt gevonden (zie vorige meded.); in zeker opzicht echter is ze een tegenhanger daarvan: steeds maakt de oppervlaktespanning evenwicht met een hydrostatischen druk en een gewicht, maar, terwijl bij de capillaire stijghoogte het gewicht slechts als correctie wordt ingevoerd, is dit hier met den hydrostatischen druk het geval.

Bedenkt men, dat voor kwik $k = 30$ ongeveer en voor water $k = 13$, dan ziet men dat $r$ slechts 0,07 tot 0,11 m.M. zou mogen bedragen, opdat de correctieterm $\frac{r}{R_0} = 0{,}1$ zou zijn. Zal deze correctieterm nog veel kleiner wezen, wat toch voor de nauwkeurigheid der methode noodzakelijk is, met het oog op de nog onbekende, verwaarloosde termen, dan is het noodig nog veel nauwere capillairen te gebruiken, wat voor de nauwkeurigheid der meting van $r$ nadeelig is. Daaruit blijkt, dat de methode der weging van afvallende druppels voor de bepaling van oppervlaktespanningen weinig geschikt is.

[3]) Pogg. Ann., 134, 365, 1868. Zie ook Winkelmann, loc. cit., p. 1147 en 1161, en Th. Lohnstein, Ann. d. Phys., 20, 238, 1906.

**Wiskunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. SCHOUTEN: „*Over het ontstaan eener praecessiebeweging tengevolge van het niet euklidisch zijn der ruimte in de nabijheid van de zon*".

(Mede aangeboden door den Heer CARDINAAL).

Is $k$ een kromme in een $n$-dimensionale ruimte $X_n$ van willekeurigen vorm, dan bestaat er in de euklidische ruimte van $\frac{n(n+1)}{2}$ afmetingen, waarin $X_n$ altijd met behoud van zijn lijnelement kan worden ondergebracht, een euklidische, d.i. een op een vlakke ruimte afwikkelbare, ruimte $Y_n$, die $X_n$ langs $k$ raakt. Wordt in de euklidische ruimte $Y_n$ een stelsel van $n$ onderling $\perp$ richtingen met zijn oorsprong langs $k$ evenwijdig aan zich zelf bewogen, dan bepalen deze richtingen in $X_n$ een „geodetisch meebewegend assenstelsel". [1]) Raken twee willekeurige ruimten elkaar volgens een kromme $k$, dan volgt uit deze definitie, dat een assenstelsel, dat zich langs $k$ voor de eene ruimte geodetisch meebeweegt, dit ook voor de andere ruimte doet. Een met massa belegd volumeelement kan zich in $X_n$ op oneindig kleinen van hoogere orde na als een vast lichaam bewegen. Wordt zulk een element, dat we een kompaslichaampje noemen, door krachten, die alleen op het zwaartepunt werken, in $X_n$ langs $k$ voortbewogen, dan blijft het t.o.v. een geodetisch meebewegend assenstelsel in rust. Het kompaslichaampje realiseert dus mechanisch het geodetisch meebewegende assenstelsel.

Is $k$ een gesloten kromme, dan zal, voor het geval dat $X_n$ niet euklidisch is, de beginstand in het algemeen niet met den eindstand samenvallen. Bij iederen omloop ondergaat dus het kompaslichaampje een verandering van stand. Volgens de berekeningen van K. SCHWARZSCHILD [2]) is nu de ruimte in de omgeving van de zon niet euklidisch doch zeer zwak gekromd. Het lijnelement is van den vorm

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta \, d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

L. FLAMM [3]) heeft aangegeven hoe een ruimte met dat lijnelement

[1]) Zie voor nadere uiteenzettingen betreffende het geodetisch meebewegende assenstelsel „Die direkte Analysis der neueren Relativitätstheorie" Verh. der Kon. Akad. v. Wet. 1e Sectie Dl. XII, No. 6 en „Over het aantal graden van vrijheid van het geodetisch meebewegende assenstelsel en de omvattende euklidische ruimte met het geringste aantal afmetingen", Verslag der Kon. Akad. v. Wet. Mei 1918, p. 16.

[2]) Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie, Berl. Sitzungsber. 1916, bldz. 189—196.

[3]) Beiträge zur Einstein'schen Gravitationstheorie 17 (16) 448—454.

verwezenlijkt kan worden. De in het $xz$ vlak gelegen parabool:

$$z^2 = 4a(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

heeft het lijnelement:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wordt deze parabool in de $xyz$ ruimte om de $z$ as gewenteld, dan ontstaat een omwentelingsoppervlak met het lijnelement:

$$ds^2 = \frac{dR^2}{1-\frac{a}{R}} + R^2\, d\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wanneer $\varphi$ de hoek van wenteling is, gemeten vanaf het $yz$ vlak (zie fig. 1).

Fig. 1.

Een waaier van richtingen in het middelpunt der zon bepaalt een stelsel van $\infty^1$ geodetische lijnen, die tezamen een „diametraalvlak" vormen. Een dergelijk diametraalvlak kan, wat de deelen buiten het oppervlak der zon betreft, zonder scheuren op het omwentelingsoppervlak (4) worden gelegd, zoo dat beide oppervlakken punt voor punt overeenkomen. Daarbij kan $R$ bij benadering aan den natuurlijk gemeten afstand tot het zonsmiddelpunt gelijkgesteld worden, terwijl $a = 2{,}945 \,.\, 10^{15}$ cM. De door een bepaald punt $P$ beschreven cirkel

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 2\sqrt{a(R-a)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

stelt dus een cirkel in het diametraalvlak voor, die hetzelfde middelpunt heeft als de zon. Wordt de zon beschouwd als een bol, gevuld met een onsamendrukbare vloeistof, dan heeft een diametraalvlak binnen de zon hetzelfde lijnelement als het boloppervlak, dat aan het beschreven omwentelingsoppervlak raakt in een parallelcirkel met een straal $R_a$, die bij benadering aan den astronomisch gemeten straal van de zon gelijk gesteld kan worden.

Wordt het beschreven omwentelingsoppervlak (4) in de vierdimensionale $xyzu$ ruimte gewenteld om het $yz$ vlak, dan ontstaat een gekromde driedimensionale ruimte met het lijnelement (1), wanneer $\theta$ de hoek van wenteling is, gemeten vanaf de $yzu$ ruimte.

We willen nu de beweging nagaan van een kompaslichaampje dat in den cirkel (5) om de zon beweegt. Daartoe is het voldoende een ruimte te vinden, die aan (1) volgens (5) raakt, en waarin de geodetische meebeweging gemakkelijk kan worden aangegeven. We laten nu de raaklijn $PQ$ aan de parabool meewentelen. Die raaklijn beschrijft een kegel met het lijnelement:

$$ds^2 = \frac{dR^2}{\cos^2\chi} + R^2 d\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

in welke vergelijking $\chi$ alleen van het bepaald gekozen punt $P$ afhangt, en dus een constante is. Bij de tweede wenteling ontstaat uit dezen kegel een ruimte met een lijnelement

$$ds^2 = \frac{dR^2}{\cos^2\chi} + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarin $\chi$ weer constant is. Het lijnelement eener euklidische ruimte kan (in poolcoördinaten) $R'$, $\varphi'$, $\theta'$, geschreven worden:

$$ds^2 = dR'^2 + R'^2 \, d\theta'^2 + R'^2 \sin^2\theta' \, d\varphi'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

en door de substitutie

$$\left.\begin{array}{l} R = R' \cos\chi \\ \varphi = \dfrac{\varphi'}{\cos\chi} \\ \theta = \dfrac{\theta'}{\cos\chi} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gaat (7) over in:

$$ds^2 = dR'^2 + R'^2 \, d\theta'^2 + R'^2 \sin^2 \frac{\theta'}{\cos\chi} \, d\varphi'^2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Op de kromme (5) is nu $\cos\theta = 0$. De raakruimte (7) gedraagt zich dus op grootheden van de orde $\chi^4$ na langs de kromme (5) als de euklidische ruimte (8). We behoeven dus slechts de beweging

van het geodetisch meebewegend assenstelsel in (8) langs de met (5) correspondeerende kromme na te gaan. Daar de koördinaten $\varphi$ en $\theta$ volgens (9) een faktor $\cos\chi$ gekregen hebben, kan (8) gerealiseerd worden door het deel der euklidische $xyu$ ruimte, dat overblijft, wanneer een omwentelingskegel met de $y$-as tot as en met een tophoek groot $2\pi(1 - \cos\chi)$ wordt afgetrokken (zie fig. 2).

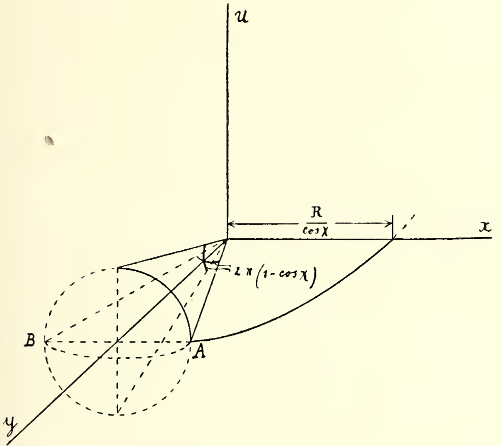



Fig. 2.

Het binnen deze ruimte gelegen deel van den cirkel

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{\cos^2\chi} \\ u = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

het deel dus, dat zich in fig. 2 van $A$ via een punt in het negatieve deel der $y$-as tot $B$ uitstrekt, correspondeert dan met de geheele kromme (5).

Men kan dit resultaat ook verkrijgen door den kegel (6) te vervangen door zijn uitgeslagen en in het $xy$ vlak symmetrisch t. o. v. de $y$-as neergelegden mantel, zijnde een sector met een hoek $2\pi\cos\chi$. De kromme (5) valt dan al direct met (11) samen. Bij de wenteling om het $yz$ vlak beschrijft de cirkelsector het beschreven ruimtedeel. Bij deze methode is niet direct in te zien, dat nu inderdaad de verkregen euklidische ruimte de oorspronkelijk voorhanden niet-euklidische raakruimte langs (5) mag vervangen.

De beweging van het kompaslichaampje is nu gemakkelijk na te

gaan. In de euklidische ruimte $xyu$ beweegt zich het kompaslichaampje steeds evenwijdig aan zichzelf. Heeft dus een in dit lichaampje vaste richting in $A$ de richting van den straal, dan maakt die richting in $B$ een hoek $2\pi(1 - \cos\chi)$ gelegen in een vlak // aan het $xy$-vlak met den straal. Nu is $\frac{a}{R}$ zeer klein, derhalve is:

$$\cos\chi = 1 - \frac{a}{2R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

zoodat de totale afwijking $\delta$ bij één omgang bedraagt:

$$\delta = \pi \frac{a}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Een om de zon als middelpunt in een cirkel met een straal gelijk aan den gemiddelden afstand van de aarde tot de zon wentelend kompaslichaampje vertoont volgens deze formule na één omgang een afwijking van 0.013 boogseconde. Is de straal gelijk aan den gemiddelden afstand van Mercurius tot de zon, dan bedraagt de afwijking 0.0328 boogseconden. Is de straal gelijk aan den straal van de zon, dan bedraagt de afwijking 2.73 boogseconden. Heeft het lichaampje uit anderen hoofde reeds een wenteling om een as, die scheef staat t. o. van het vlak van de loopbaan, dan ontstaat, alleen tengevolge van de beschreven afwijking een praecessiebeweging, die in het eerste der genoemde gevallen een volledigen omloop der nachteveningen na ± 100.000.000 jaren tengevolge zou hebben. Het verdient de aandacht, dat het beschreven effect van dezelfde orde van grootte is als de afwijking van een lichtstraal, die de zon op een afstand $R$ van het middelpunt passeert. Inderdaad bedraagt die afwijking volgens EINSTEIN bij benadering $\frac{2a}{R}$. Tusschen deze beide effecten en het effect der perihelinmafwijking bestaat een verband, waarop schrijver nog hoopt terug te komen.

Of nu inderdaad de berekende afwijking der praecessiebeweging voor de aarde zal optreden, hangt samen met de vraag, in hoeverre en met welke benadering een massa van de grootte en de samenstelling der aarde mag worden opgevat als een kompaslichaampje. Voor de beantwoording van deze vraag is het echter noodig bepaalde onderstellingen te maken ten aanzien van de physische hoedanigheden der aarde, met name van de onderlinge aantrekking harer deelen, en, van deze onderstellingen uitgaande, de vierdimensionale dynamische bewegingsvergelijkingen te integreeren.

---

## ADDENDUM.

De Heer DE SITTER te Leiden, wien ik het bovenstaande ter inzage zond, schrijft mij:

Een precessie van 0".013 per jaar ligt natuurlijk ruim binnen het bereik van de waarnemingen, daar de waargenomen precessie-constante vertrouwbaar is tot op 0"0010. Het is dus maar de vraag hoe nauwkeurig de theoretische waarde kan berekend worden. Nu is de lunisolaire precessie (de planetaire kan als volkomen bekend beschouwd worden) gegeven door een formule van den vorm

$$p_1 = (P + Q\mu) . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waar $P$ en $Q$ praktisch volkomen bekende getallen zijn, terwijl $\mu$ de massa van de maan voorstelt (in die van aarde + maan als eenheid) en $H = \frac{C-A}{C}$ van de traagheidsmomenten der aarde afhangt. De onzekerheid van $\mu$ veroorzaakt in $p_1$ een onzekerheid van ongeveer $^1/_{2000}$ van het bedrag, d. i., als $H$ volkomen bekend was, ongeveer $\pm$ 0",025, of tweemaal de nieuwe precessie. Een betere bepaling van $\mu$ is te verwachten uit de oppositie van EROS van 1931 [1]). Evenwel is de onzekerheid van $H$ veel belangrijker. In 1915 heb ik [2]) met behulp van de hypothese der isostasie de afplatting der aarde $\varepsilon$ bepaald uit $H$, terwijl $H$ uit $p_1$ was afgeleid volgens (1). Om de omgekeerde weg te kunnen gaan, zou men, om een w. f. van $\pm$ 0"005 in $p_1$ te krijgen, naar mijn schatting $\varepsilon$ tot op ongeveer $^1/_{20000}$ van zijn bedrag moeten kennen. De direct bepaalde waarden van $\varepsilon$ zijn tegenwoordig niet verder dan tot op ongeveer $^1/_{800}$ betrouwbaar, en om deze nauwkeurigheid tot het zeventigvoud op te drijven gaat m. i. de krachten van de geodetische wetenschap, ten minste in afzienbare toekomst, te boven.

Men kan $H$ met grootere nauwkeurigheid bepalen uit de nutatie-constante. Men heeft n.l.

$$N = R . \mu . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waar weer $R$ een praktisch geheel bekend getal is. Uit (1) en (2) leidt men af:

$$p_1 = \left(S + \frac{T}{\mu}\right) . H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin $S$ en $T$ ook geheel bekend zijn. De onzekerheid van den

---

1) The figure of the earth and some related astronomical constants. The Observatory Aug. 1915, page 322.

2) Over isostasie, de traagheidsmomenten en de afplatting van de aarde, deze Verslagen, April 1915, Deel XXIII, p. 1342.

factor tengevolge van de onzerheid van $\mu$ is nu ongeveer $^1/_{4000}$ of $^1/_{5000}$, en zal door de nieuwe bepaling van $\mu$ in 1931 waarschijnlijk wel tot $^1/_{10000}$ kunnen opgevoerd worden.

Het resultaat van NEWCOMB's discussie in 1891 van alle bepalingen der nutatie-constante heeft haar waarde vastgelegd tot op ongeveer $^1/_{1100}$ van haar bedrag. Om deze nauwkeurigheid 9 à 10 maal zoo groot te maken, wat noodig zou zijn om in $p_1$ een w. f. van $\pm$ 0''.005 te krijgen, zal zeker verre van gemakkelijk zijn, maar dat het de krachten der astronomie zou te boven gaan, zou ik niet gaarne willen beweren. Echter zou het zeer verfijnde en langdurige waarnemingen en discussies eischen.

Overigens zou nog na te gaan zijn of de nieuwe precessie het eenige effect van de nieuwe gravitatie-theorie is, en of niet ook de vergelijkingen (1) en (2) veranderen, m. a. w. of de theorie van EINSTEIN voor de beweging van de rotatie-as der aarde ten opzichte van het geodetisch meegevoerd coördinaten-stelsel geheel dezelfde vergelijkingen geeft als de theorie van NEWTON ten opzichte van een „vast" stelsel. Dit is zonder een speciaal onderzoek, dat voorzoover ik weet nog niet is uitgevoerd, niet te zeggen en het is misschien zelfs à priori niet uitgesloten dat de precessie van het geodetisch meegevoerd coördinaten-stelsel weer gecompenseerd werd door een kleine verandering in de precessie van de aarde ten opzichte van dat stelsel.

---

**Natuurkunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer TH. DE DONDER: „*Sur le teneur gravifique*".

**Natuurkunde.** — De Heer H. KAMERLINGH ONNES biedt, mede namens de Heeren C. A. CROMMELIN en J. PALACIOS MARTINEZ, eene mededeeling aan over: „*Isothermen van één-atomige stoffen en hun binaire mengsels. XX. Isothermen van neon van* 20° *C. tot* —217° *C.*".

**Natuurkunde.** — De Heer H. KAMERLINGH ONNES biedt, mede namens den Heer J. PALACIOS MARTINEZ, eene mededeeling aan: „*Over het bepalen van zeer lage temperaturen. XXVIII. De tweede viriaalcoëfficient van waterstof, helium en neon volgens metingen met differentiaal thermometers van constant volume bij verschillenden vriespuntsdruk*".

**Natuurkunde.** — De Heer H. KAMERLINGH ONNES biedt, mede namens den Heer J. PALACIOS MARTINEZ, eene mededeeling aan: „*Over het bepalen van zeer lage temperaturen. XXIX. Dampspanningen van zuurstof en waterstof*".

(Deze mededeelingen zullen in het volgende Zittingsverslag worden opgenomen).

Voor de Bibliotheek worden ten geschenke aangeboden:

1. Door den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF een exemplaar van het 2e Deel van zijn werk over de Timor-expeditie (opgenomen in het Jaarboek van het Mijnwezen in Ned. Oost-Indië. Jaarg. 45 (1916)).

2. Door den Heer H. HAGA een exemplaar van de dissertatie van den Heer S. B. ELINGS: „Over het THOMSON-effect in nikkel".

3. Door den Heer G. VAN ITERSON JR. een exemplaar van de dissertatie van den Heer A. L. VAN SCHERPENBERG: „Onderzoekingen naar de constitutie van het euxanthogeen, de moederstof van het Indisch geel".

De vergadering wordt gesloten.

---

**14 September 1918.**

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

### VAN ZATERDAG 29 SEPTEMBER 1918.

DEEL XXVII.

**N°. 3.**

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.


## INHOUD.

---

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1. Bericht van den Heer L. E. J. BROUWER dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2. Missive van Zijne Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 12 Juli 1918 ter begeleiding van een afschrift van het Kon. Besluit van 20 Juni 1918 n°. 67, inhoudende goedkeuring van de gevraagde wijziging der eerste alinea van Art. 5 van het Reglement voor de Kon. Akademie van Wetenschappen, welke alinea in 't vervolg zal luiden: ,,Elke dezer Afdeelingen telt ten hoogste vijftig gewone of binnenlandsche leden, *vijf-en-twintig* buitenlandsche leden en *vijftien* correspondenten".

Aangenomen voor kennisgeving.

3. Missive van denzelfden Minister d.d. 16 September 1918 met

bericht dat bij Zijner Exc's beschikking van dien datum n°. 2034[1] Afd. K. W., aan Mej. H. C. C. LA RIVIÈRE te Leiden, die, op voordracht der Afdeeling en met subsidie van het Buitenzorg-fonds, in 1916 door de Regeering werd aangewezen voor uitzending naar het botanisch Station te Buitenzorg, ook over het jaar 1918 een Rijkstoelage van *f* 700.— is verleend, nu de Afdeeling had voorgesteld om bij het haar toegekende subsidie uit de renten van het fonds over twee jaren nog een jaar rente te voegen, omdat het gewone subsidie, onder de tegenwoordige omstandigheden, onvoldoende is voor een reis naar Indië en terug en een verblijf aan het botanisch station van minstens vier maanden.

Van Mej. LA RIVIÈRE, aan wie van deze beslissing werd kennis gegeven, is intusschen een dankzeggend schrijven ontvangen.

4. Missive van Zijne Exc. den Minister van Waterstaat d.d. 9 September 1918, kennisgevende dat, met ingang van 1 Juli 1918, benoemd is tot Directeur van den geologischen dienst, tot welks instelling het op de Staatsbegrooting voor dit jaar beschikbaar gestelde bedrag gelegenheid gaf, Dr. P. TESCH, thans te Nijmegen en dat, tengevolge van het instellen van dien dienst en in verband met de omstandigheid dat de verantwoording der Geologische Commissie uit de Afdeeling in de laatste tijden een niet onbelangrijk batig saldo aanwijst, zoodat het voor de Commissie beschikbare Rijkssubsidie in de kosten van hare onderzoekingen niet behoefde te worden uitbetaald, wellicht ook voortaan het subsidie zou kunnen achterwege blijven.

Daar de Minister hierover de meening der Afdeeling wenscht te kennen, is zijne missive gesteld in handen van de leden der Geologische Commissie uit de Afdeeling met verzoek om prae-advies.

5. Bericht van H.H. Administrateuren van het P. W. Korthals-fonds, dat zij kennis genomen hebben van het advies der Afdeeling om de beschikbaar gestelde *f* 600.— uit het fonds ditmaal te bestemmen als toelage voor den proeftuin van Prof. HUGO DE VRIES te Lunteren en, in overeenstemming met dat advies, die som aan de Afdeeling overmaken.

Het bedrag werd reeds gezonden aan Prof. DE VRIES, die, bij schrijven van 11 Juli j.l. met dankzegging de ontvangst ervan bevestigd heeft.

6. Kennisgeving van den Rector en het Consistorium der Universiteit van Lund, dat deze instelling van Hooger Onderwijs den 27 September j.l. haar 250-jarig bestaan hoopte te herdenken.

Naar aanleiding van deze kennisgeving, waarvan ook mededeeling gedaan is in de jongste vergadering der letterkundige Afdeeling, verzocht de Voorzitter dier Afdeeling haar lid, den Heer J. J. Hartman, en het lid onzer Afdeeling, den Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen, om een gelukwensch aan de feestvierende Universiteit in de Latijnsche taal op te stellen, aan welk verzoek door deze Heeren bereidwillig is voldaan, zoodat de gelukwensch tijdig verzonden is kunnen worden.

Alvorens tot de wetenschappelijke werkzaamheden over te gaan, herinnert de Voorzitter er aan dat het op den 1sten September j.l. veertig jaren geleden was, dat de 1ste custos, de Heer F. H. Lemstra, bij de Akademie in functie trad. Uit naam der Afdeeling wenscht hij hem van harte geluk, daarbij met veel waardeering denkende aan den grooten ijver en de nauwgezetheid, waarmede de heer Lemstra zich van zijne taak heeft gekweten. Ook wijst de Voorzitter op de hulpvaardigheid, die de heer Lemstra steeds getoond heeft, niet alleen aan de leden der Akademie, maar ook aan vele andere beoefenaars der natuurwetenschap, die hem allen veel verplicht zijn.

De vergadering geeft door toejuiching hare instemming met deze hulde te kennen.

**Scheikunde.** — De Heer Ernst Cohen doet eene mededeeling over: „Baco-Boyle-Boerhaave".

(Deze mededeeling zal niet worden opgenomen in het Zittingsverslag).

**Physiologie.** — De Heer HAMBURGER doet, mede namens den Heer R. BRINKMAN, een mededeeling over: „*Het gedrag der Nieren tegenover eenige isomere Suikers (Glucose, Fructose, Galactose, Mannose en Saccharose, Maltose, Lactose).*"

Uit vroegere onderzoekingen [1]) is gebleken, dat het glomerulusepithelium van de kikvorschnier in staat is glucose tegen te houden, indien namelijk de vloeistof, welke men door het vaatstelsel laat stroomen, een doelmatige samenstelling bezit. Voert men door de arteria renalis bij den kikvorsch een Ringer-vloeistof van de volgende samenstelling: NaCl 0,7 %, KCl 0,01 %, $CaCl_2$ 0,0075 %, $NaHCO_3$ 0,02 %, in welke vloeistof 0,1 % glucose is opgelost, dan wordt een kunstmatige urine afgescheiden met een glucosegehalte van 0,07 %. Er is dus 0,03 % glucose door het glomerulusepithelium tegengehouden. Bevat echter de Ringer-vloeistof in plaats van 0,02 % $NaHCO_3$, 0,285 %, een hoeveelheid, die beantwoordt aan de titratiealkaliciteit van het kikvorschserum, dan wordt veel meer suiker dan 0,03 % tegengehouden; zelfs gebeurt het niet zelden, dat de urine geheel suikervrij is. Dit verschijnsel toont dus aan, dat de glomerulusmembraan, die, gelijk men weet, voor zouten permeabel is, onder physiologische omstandigheden *voor de eveneens krystalloide glucose ondoordringbaar is.*

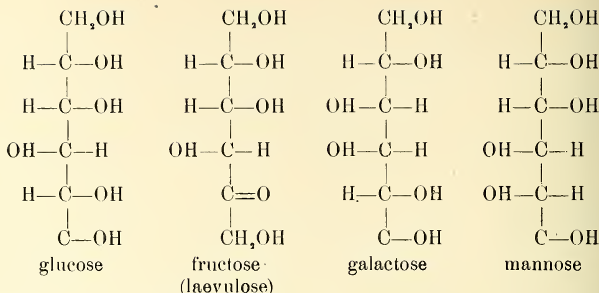
Ten einde den weg voor te bereiden voor een verklaring van deze merkwaardige en tevens doelmatige tegenstelling, scheen het interessant te onderzoeken, hoe de glomerulusmembraan zich zou gedragen tegenover de met glucose isomere laevulose, galactose en mannose, en ook tegenover de onderling isomere saccharose, lactose en mannose.

Beginnen wij met de vier eerstgenoemde.

Gelijk bekend, laten zich de structuurformules van deze monosacchariden ($C_6H_{12}O_6$) aldus voorstellen:

---

[1]) HAMBURGER en BRINKMAN: Verslagen der Kon. Akad. v. Wetensch., Zitting van 27 Jan. en 29 Sept. 1917. Verder: Biochem. Zeitschr. **88**, 97, 1918.




Er werd op volkomen gelijke wijze geëxperimenteerd als vroeger werd beschreven in de zooeven geciteerde artikelen. De doorstroomingsvloeistof had de samenstelling: NaCl 0,5 %, $NaHCO_3$ 0,285 %, KCl 0,01 %, $CaCl_2$ 0,02 %. Die vloeistof werd vervaardigd door

50 ccm. NaCl 10 %,
50 ccm. $NaHCO_3$ 5,7 %,
10 ccm. KCl 1 % en
40 ccm. $CaCl_2$ 5 %

te vermengen en tot 1 Liter aan te vullen met uitgekookt gedistilleerd water. In die vloeistof werden bekende hoeveelheden van de suikers opgelost,[1]) maar steeds werd voor iedere proef toch nog het reduceerend vermogen bepaald. Dit met het oog op mogelijke fouten in de afweging of onbekende verschillen in het watergehalte der suikers. Zoowel voor het reduceerend vermogen der doorstroomingsvloeistof als voor de uitgescheiden urine werd weder de methode van Bang gebruikt. Het reduceerend vermogen der verschillende suikers werd *uitgedrukt in het procentisch glucosegehalte.*

Gelijk men weet, is de eindtitratie een bepaling van Jodium met behulp van amylum; uit de benoodigde hoeveelheid Jodium wordt het glucosegehalte berekend door middel van de formule $(a—12):4$, waarin $a$ het gebruikte aantal ccm. Jodiumoplossing is.

## A. Laevulose (Fructose).

**Proef 1** (11 Juli 1918).

De doorstroomingsvloeistof bevat 0,1 % laevulose.

De reductie, in glucose uitgedrukt, bedraagt 0,21 %.

0,1 ccm. urine uit de rechter nier eischt 0,87 ccm. Jodiumoplossing, wat overeenkomt met $\frac{0{,}87-0{,}12}{4} = 0.0875\%$ glucose.

---

[1]) Eenige der suikersoorten danken wij aan de groote welwillendheid van Jhr. W. Alberda van Ekenstein, Directeur van het Laboratorium van het Ministerie van Financiën. en van Prof. H. J. Backer.

0,1 ccm. urine der linker nier eischt 0,88 ccm. Jodiumoplossing, wat overeenkomt met $\frac{0,88-0,12}{4} = 0,19\%$ glucose.

Tegengehouden door rechter nier 0,21—0,1875 = 0,0225 %.

Tegengehouden door linker nier 0,21—0,19 = 0,02 %.

Dit zijn hoeveelheden zoo klein, dat men mag zeggen, dat practisch alle laevulose door het glomerulusepithelium wordt doorgelaten. De volgende proeven geven hiervan een bevestiging.

**Proef 2** (12 Juli).

Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 1.

Reductie (0,1 ccm.) urine rechter nier 0,2125 %.

Reductie 0,1 ccm. urine linker nier 0,215 %.

Tegengehouden door rechter nier 0,21—0,2125 = 0.

Tegengehouden door linker nier 0,21—0,215 = 0.

Resultaat: *Geen* laevulose door het glomerulusepithelium tegen gehouden.

**Proef 3** (13 Juli).

Herhaling van proef 1 en 2 met nieuwe doorstroomingsvloeistof.

Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,18 %.

Reductie 0,1 ccm. urine rechter nier 0,18 %.

Reductie 0,1 ccm. urine linker nier 0,18 %,

Resultaat: *Geen* laevulose tegengehouden.

**Proef 4** (13 Juli).

Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 3.

Reductie 0,1 ccm urine rechter nier 0,1825 %.

Reductie 0,1 ccm. urine linker nier 0,1825 %.

Resultaat: *geen* laevulose tegengehouden.

Het zal den lezer getroffen hebben, dat de hierboven gebruikte leavuloseoplossing een ongeveer tweemaal zoo groote reductie geeft als een glucoseoplossing van 0,1 %, namelijk gemiddeld 0,18 %. Aangezien het zou kunnen zijn, dat een vloeistof met een zooveel grooter reduceerend vermogen juist in verband daarmede door het glomerulusepithelium geheel werd doorgelaten, werden proeven verricht met een doorstroomingsvloeistof, waarin zich 0,05 % laevulose bevond in plaats van 0,1 %.

**Proef 5** (15 Juli).

Ringervloeistof, waarin 0,05 % laevulose is opgelost.

Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,095 %.

0,1 ccm. urine rechter nier: 0,5 ccm Jod.opl.; reductie 0,095 %.

0,1 ccm. urine linker nier: 0,52 ccm. Jod.opl.; reductie 0,1 %.

0,1 ccm. urine rechter nier: 0,52 ccm. Jod.opl.; reductie 0,1 %.

Tegengehouden door rechter nier 0,095—0,095 = 0.

Tegengehouden door linker nier 0,095—0,1 = 0.

Tegengehouden door rechter nier 0,095—0,1 = 0.

Resultaat: ook de *verdunde* laevuloseoplossing treedt geheel door het glomerulusepithelium.

Uit deze experimenten mag men dus besluiten, dat *het glomerulus-epithelium der kikvorschnier volkomen permeabel is voor laevulose* en wel onder dezelfde omstandigheden, als waaronder blijkens vroegere proeven de glucose in aanzienlijke mate werd tegengehouden.

Het scheen interessant na te gaan, of laevulose invloed kon uitoefenen op het tegenhouden van glucose.

Ten einde zekerheid te hebben of de omstandigheden, ten opzichte van de wijze, waarop vroeger met glucose werd gewerkt, inderdaad onveranderd waren gebleven, werden ook nog enkele proeven met glucose alleen verricht.

## B. Glucose en een mengsel van Glucose en Laevulose.

**Proef 6.** (18 Juli).

Doorstroomingsvloeistof, waarin 0,1°/₀ glucose.
0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof, reductie 0,0975°/₀.
0 1 ccm. urine rechter nier: 0.3 ccm. Jod.opl.; reductie 0,045°/₀.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,31 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0475°/₀.
Tegengehouden door rechter nier: 0,0975—0,045 = **0,0525°/₀**.
Tegengehouden door linker nier: 0 0975—0,0475 = **0,05°/₀**.

**Proef 7** (18 Juli).

Doorstroomingsvlocistof is dezelfde als bij proef 6.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,26 ccm. Jod.opl.; reductie 0,035°/₀.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,29 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0425°/₀.
Tegengehouden door rechter nier: 0,0975—0,035 = **0,0625°/₀**.
Tegengehouden door linker nier: 0,0975—0,0425 = **0,0550°/₀**.

**Proef 8** (20 Juli).

Doorstroomingsvloeistof bevat 0,07°/₀ glucose.
Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,065°/₀
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,22 ccm. Jod.opl.; reductie 0,025°/₀.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,22 ccm. Jod.opl.; reductie 0,025°/₀.
Tegengehouden door beide nieren: 0,065—0,025 = **0,04°/₀**.

**Proef 9** (20 Sept.).

Daarnaast werd een proef verricht met een doorstroomingsvloeistof, waarin 0,2°/₀ glucose was opgelost.
Reductie 0,1 ccm. dezer doorstroomingsvloeistof 0,22°/₀.
Reductie 0,1 ccm. urine rechter nier 0,095°/₀.
Reductie 0,1 ccm. urine linker nier 0,1125°/₀.
Tegengehouden door rechter nier: 0,22—0,095 = **0,1250°/₀**.
Tegengehouden door linker nier: 0,22—0,1125 = **0,1075°/₀**.

Uit deze proeven volgt, dat nu, evenals vroeger, minstens een hoeveelheid glucose wordt tegengehouden, die physiologisch in

kikvorschbloed voorkomt. Er bestaat dus inderdaad een frappante tegenstelling tusschen het doorlatingsvermogen der nier tegenover glucose en tegenover fructose.

*Bij dit uitgesproken verschil scheen het niet van belang ontbloot, na te gaan, of laevulose wellicht in staat zou zijn, de permeabiliteit voor glucose te wijzigen.*

Daarom werden beide stoffen in de doorstroomingsvloeistof opgelost.

**Proef 10** (20 Sept ).
De doorstroomingsvloeistof bevat 0,1%, glucose en 0,05% laevulose.
Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,205%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,58 ccm. J.opl.; reductie 0,1175%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,60 ccm. J.opl.: reductie 0,12%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,205 – 0,1175 = **0,0875%**.
Tegengehouden door linker nier: 0,205 – 0,12 = **0,085%**.

**Proef 11** (20 Sept.).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 9.
Reductie 0,1 ccm. urine rechter nier 0,155%.
Reductie 0.1 ccm. urine linker nier 0,1575%
Tegengehouden door rechter nier: 0,205 – 0,155 = **0,05%**.
Tegengehouden door linker nier: 0,205 – 0,1575 = **0,0475%**.

**Proef 12** (20 Sept.).
De doorstroomingsvloeistof bevat een mengsel van glucose en laevulose
Reductie doorstroomingsvloeistof 0,205%.
Reductie 0,1 ccm. urine rechter nier 0,115%.
Reductie 0,1 ccm. urine linker nier 0,12%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,205 – 0,115 = **0,09%**.
Tegengehouden door linker nier: 0,205 – 0,12 = **0,085%**.

**Proef 13** (21 Sept.).
De doorstroomingsvloeistof bevat 0,07% glucose en 0,05% laevulose.
Reductie 0,1 ccm. dezer doorstroomingsvloeistof 0,175% (gemiddelde van 3 gelijkluidende proeven).
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,63 ccm. J.opl.; reductie 0,1275%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,62 ccm. J.opl.; reductie 0,125%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,65 ccm. J.opl.; reductie 0,1325%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,175 – 0,1275 = **0.0475%**.
Tegengehouden door rechter nier: 0,175 – 0,125 = **0,05%**.
Tegengehouden door linker nier: 0,175 – 0,1325 = **0,0425%**.

**Proef 14** (21 Sept.)
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 13.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,64 ccm. J opl.; reductie 0,13%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,64 ccm. J.opl.; reductie 0,1275%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,175 – 0,13 = **0,045%**.
Tegengehouden door linker nier: 0,175 – 0,1275 = **0,0475%**.

Uit deze proeven volgt, dat het glomerulusepithelium, dat, gelijk wij gezien hebben, voor laevulose geheel permeabel is, een hoeveelheid glucose heeft doorgelaten, die ook geretineerd wordt, wanneer

de doorstroomingsvloeistof alleen glucose bevat. *De laevulose, hoewel zelf doorgaande, heeft dus geen of nauwelijks invloed op de retentie der glucose.* Met een weinig overdrijving zou men dus kunnen zeggen, dat de nier door filtratie de glucose van de laevulose scheidt.

### C. Galactose.

**Proef 15** (18 Juli).
De doorstroomingsvloeistof bevat 0,09% galactose.
Reductie (0.1 ccm.) doorstroomingsvloeistof 0,07%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,35 ccm. J.opl.; reductie 0,055%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,33 ccm. J.opl ; reductie 0,052%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,07 – 0,055 = **0,015**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,07— 0,052 = **0,018**%.

**Proef 16** (22 Aug.).
De doorstroomingsvloeistof bevat 0,1% galactose.
Reductie 0.1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,07%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,3 ccm. Jod.opl.: reductie 0,045%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,28 ccm. Jod.opl ; reductie 0,04%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,07—0,045 = **0,025**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,07 – 0,04 = **0,03**%.

**Proef 17** (23 Aug.).
Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,055%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0.25 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0325%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,25 ccm Jod opl.; reductie 0,0325%.
Tegengehouden door beide nieren 0,055—0,0325 = **0,0225**%.

**Proef 18** (23 Aug.).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als bij proef 17.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,25 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0325%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,25 ccm. Jod opl.; reductie 0,0325%.
Tegengehouden door beide nieren: 0,055 – 0,0325 = **0,0225**%.

*Al deze proeven leeren, dat de nier een geringe hoeveelheid galactose tegenhoudt.*

Vermelden wij thans nog een paar proeven met een doorstroomingsvloeistof, waarvan de reductie ongeveer overeenkomt met die van 0,1 % glucose.

**Proef 19** (23 Aug.).
De doorstroomingsvloeistof bevat 0,15% galactose.
Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,0975%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0.4 ccm. J.opl.; reductie 0,07%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,4 ccm. J.opl.; reductie 0,07%.
Tegengehouden door beide nieren: 0,0975 – 0,07 = **0,0275**%.

**Proef 20** (23 Aug.).
Doorstroomingsvloeistof dezelfde als voor proef 19.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,33 ccm. J.opl.; reductie 0,0525%.
0,1 ccm. urime linker nier: 0,32 ccm. J.opl.; reductie 0,05%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,0975—0,0525 = **0,045**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,0975—0,05 = **0,0475**%.

Ook uit deze proeven blijkt, dat eenige galactose tegengehouden wordt. Bepaaldelijk in de laatste proef (20) is de hoeveelheid betrekkelijk aanzienlijk.

Dat galactose wordt tegengehouden, is in denzelfden zin doelmatig als waarin dit voor glucose het geval is. Immers, is glucose een bron van arbeidsvermogen voor de spiercontractie, *galactose helpt mede aan den opbouw der Cerebrosiden.*

Gelijk vroeger reeds werd opgemerkt, vertoonen de kikvorschen ten aanzien van hun vermogen om glucose tegen te houden, niet zelden groote verschillen. Ook is het jaargetijde niet zonder invloed. Daarom werden ten overvloede nog eens proeven verricht bij kikvorschen, die onder dezelfde levensomstandigheden verkeerden als die van de boven beschreven proeven.

**Proef 21** (24 Aug.).

De doorstroomingsvloeistof bevat 0,1°/₀ *glucose.*
Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0.10°/₀.
0,1 ccm urine rechter nier: 0,24 ccm. J.opl.; reductie 0,03°/₀.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,22 ccm. J opl.; reductie 0,025°/₀.
Tegengehouden door rechter nier: 0,10—0,03 = **0,07**°/₀.
Tegengehouden door linker nier: 0,10—0 025 = **0,075**°/₀.

**Proef 22** (24 Aug.).

Dezelfde doorstroomingsvloeistof als bij proef 21.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,25 ccm. J.opl.; reductie 0,0325°/₀
0,1 ccm. urine linker nier: 0,22 ccm. J.opl ; reductie 0,025°/₀.
Tegengehouden door rechter nier: 0,10—0,0325 = **0,0675**°/₀.
Tegengehouden door linker nier: 0,10—0,025 = **0,075**°/₀.

Het blijkt dus, dat de kikvorschen, die onder dezelfde omstandigheden verkeerden als die van proef 16—20, *een veel grootere hoeveelheid glucose dan galactose hebben tegengehouden.*

Het scheen nu gewenscht te onderzoeken, of het tegenhouden van galactose, al had dit ook in mindere mate plaats dan bij glucose, aan dezelfde voorwaarden ten aanzien van de samenstelling der Ringer-vloeistof gebonden was als vroeger gevonden werd voor de glucose. Daarom werd de volgende Ringer-vloeistof gebruikt: NaCl 0,7°/₀, **$NaHCO_3$ 0,02**°/₀, KCl 0,01 °/₀, $CaCl_2$ 0,0075 °/₀. Bij aanwending van deze vloeistof werd indertijd *in maximo* 0,03 °/₀ glucose tegengehouden. Eerst toen het $NaHCO_3$-gehalte boven 0,09 °/₀ werd opgevoerd, waardoor de urine niet meer zuur was, kon veel meer suiker tegengehouden worden; ja zelfs kon de urine dan suikervrij zijn.

*Wat zou nu het resultaat zijn bij galactose, indien de Ringervloeistof ook daar slechts 0,02 °/₀ $NaHCO_3$ bevatte?*

**Proef 23** (14 Sept.).
De doorstroomingsvloeistof met slechts 0,02% $NaHCO_3$ bevat 0,1% galactose.
Reductie 0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof 0,08%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,42 ccm. Jod.opl.; reductie 0,075%.
0,1 ccm. urine linker nier 0,43 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0775%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,08—0,075 = **0,005**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,08—0,0775 = **0,0025**%.

**Proef 24** (14 Sept.).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als bij proef 23.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,43 ccm. Jod opl.; reductie 0,0775%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,44 ccm. Jod.opl.; reductie 0,08%.
Tegengehouden door rechter nier: 0 08—0,0775 = **0,0025**%
Tegengehouden door linker nier: 0,08—0,08 = **0**.

Men ziet dus, dat evenals bij glucose, bij de galactose het $NaHCO_3$-gehalte der doorstroomingsvloeistof van groot belang is voor de permeabiliteit van het glomerulusepithelium: *een doorstroomingsvloeistof met gering $NaHCO_3$-gehalte bewerkt algeheelen doorgang der galactose* door het glomerulusepithelium; bevat de doorstroomingsvloeistof een physiologische hoeveelheid $NaHCO_3$, dan wordt gemiddeld 0,025 % galactose tegengehouden. Wij zeggen „gemiddeld", immers de kikvorschen vertoonen individueele verschillen.

Wij laten hier een tabel volgen, die een samenvatting geeft van

Retentievermogen der nier voor galactose.

| Reductie doorstroomingsvloeistof, waarin ± 0.1 % galactose | Reductie urine uit rechter nier | Tegengehouden door rechter nier | Reductie urine uit linker nier | Tegengehouden door linker nier |
|---|---|---|---|---|
| 0.0825 % | A 0.05 / 0.0475 } 0.049 | **0.033** % | A 0.0525 / 0.0475 } 0.050 | **0.0325** % |
| | B 0.0775 / 0.08 } 0.078 | **0.038** „ | B 0.0825 / 0.0825 } 0.0825 | **0** „ |
| | C 0.0675 / 0.065 } 0.0663 | **0.0163** „ | C 0.0675 / 0.0675 } 0.0675 | **0.015** „ |
| 0.0725 „ | D 0.05 | **0.0225** „ | D 0.0525 | **0.02** „ |
| | E 0.045 | **0.0275** „ | E 0.048 | **0.0245** „ |
| | F 0.047 | **0.0250** „ | F 0.045 | **0.0275** „ |

een reeks van andere proeven met galactose genomen, doch waarbij door toevallige omstandigheden het $NaHCO_3$-gehalte in plaats 0,285 % is geworden 0,2 %. Zooals vroeger bij de glucose werd gevonden, is zulk een wijziging in casu van zeer weinig belang.

Bestudeert men deze tabel, dan blijkt:

1°. dat bij de verschillende kikvorschen A, B, C, D, E, F het retentievermogen voor galactose verschillend is.

2°. dat de individueele verschillen wisselen tusschen 0 en 0,033 %.

3°. dat de rechter en linker nier van een en denzelfden kikvorsch een vrijwel gelijk retentievermogen vertoont.

Ook hier blijkt dus, evenals uit de vorige experimenten, dat galactose niet zooals laevulose steeds geheel door de nieren heengaat, maar meestal, doch dan slechts in geringe mate er door wordt teruggehouden.

In ieder geval wijst dit er op, dat de galactose in het lichaam gebruikt wordt. Wij weten trouwens, dat de melksuiker uit dextrose en galactose wordt opgebouwd en verder is zoo juist een artikel van ELSE HIRSCHBERG[1]) uit WINTERSTEIN's laboratorium verschenen, waaruit ten opzichte van het ruggemerg een zekere verwantschap tusschen glucose en galactose blijkt en die bij laevulose ontbreekt.

## D. Mannose.

**Proef 25** (20 Aug.).

In de doelmatige doorstroomingsvloeistof, bestaande uit: NaCl 0,5%, $NaHCO_3$ 0,285%, KCl 0,01% en $CaCl_2$ 0,02%, wordt 0,1% mannose opgelost.

0 1 ccm. doorstroomingsvloeistof: 0,45 ccm. J.opl.; reductie 0,0825%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,48 ccm. J.opl.; reductie 0,09%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,46 ccm. J.opl.; reductie 0,085%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,0825—0,09 = **0**.
Tegengehouden door linker nier: 0,0825—0,085 = **0**.

**Proef 26** (20 Aug ).

Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 25.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,45 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0825%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,44 ccm. Jod.opl.; reductie 0,08%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,0825—0,0825 = **0**.
Tegengehouden door linker nier: 0,0825—0,08 = **0,0025**%.

Dus ook in deze proef is *geen* mannose tegengehouden.

**Proef 27** (21 Aug.).

0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof: 0,35 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0575%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,37 ccm. Jod.opl.; reductie 0.0625%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0.35 ccm. Jod.opl.; reductie 0,0575%.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,35 ccm. Jod opl.; reductie 0,0575%.

Ook in deze proef is *geen* mannose tegengehouden.

---

[1]) ELSE HIRSCHBERG: Zeitschr. f. physiol. Chemie, **100**, (1918).

**Proef 28** (21 Aug.).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 27.
0,1 ccm. urine rechter nier: 0,36 ccm. Jod.opl.; reductie 0,06%.
0,1 ccm. urine linker nier: 0,36 ccm. Jod.opl; reductie 0,06%.
Tegengehouden door beide nieren 0,0575—0,06 = **0**.

Ook in deze proef hebben dus de nieren alle mannose doorgelaten. *We mogen uit deze proeven besluiten, dat het glomerulusepithelium geheel permeabel is voor mannose.*

Vermelden wij thans eenige proeven met onderling isomere disaccharidem: *saccharose, maltose* en *lactose.*

Deze proeven schenen o.a. daarom van belang, omdat de moleculen grooter zijn dan van de besproken monosacchariden. Hield de permeabiliteit met deze grootte verband, dan zou wellicht blijken, dat het glomerulusepithelium voor disacchariden impermeabel was.

## E. Saccharose.

Ten einde de hoeveelheid saccharose in doorstroomingsvloeistof en urine te bepalen, werd steeds 0,1 ccm. der vloeistof gedurende $1^1/_2$ uur bij 37° C. verwarmd met 0,15 ccm. zoutzuur 1 : 1 en van de aldus verkregen vloeistoffen de reductie vastgesteld.

**Proef 29** (17 Juli).
De doorstroomingsvloeistof bevat 0,1% rietsuiker.
Zij geeft na inversie een reductie van 0.1275%.
0,1 ccm. urine rechter nier geeft na inversie een reductie van 0,13%.
0,1 ccm. urine linker nier geeft na inversie een reductie van 0,1325%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,1275—0 13 = **0**.
Tegengehouden door linker nier: 0.1275—0,1325 = **0**.

Resultaat: Alle rietsuiker is doorgegaan.

**Proef 30** (17 Juli).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 29.
Reductie 0,1 ccm. urine rechter nier na inversie 0,1125%.
Reductie 0,1 ccm urine linker nier na inversie 0,095%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,2275—0,1125 = **0,015**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,1275—0,095 = **0,032**%.

Wij laten een tabel volgen, waarin nog eenige proeven zijn saamgevat.

*Er valt niet aan te twijfelen of het glomerulusepithelium heeft saccharose tegengehouden*, hetzij als zoodanig, hetzij in den vorm van glucose, welke dan zou moeten ontstaan door splitsing van saccharose in het glomerulusepithelium, waarbij de laevulose in de urine zou moeten overgegaan zijn. Dit tweede alternatief bezit geen groote mate van waarschijnlijkheid.

Retentievermogen der nier voor saccharose.
Proeven 17—23 September 1918.

| Reductie doorstr. vl., waarin ± 0.1 % saccharose | | Reductie urine uit rechter nier | | Tegengehouden door rechter nier | Reductie urine uit linker nier | | Tegengehouden door linker nier |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| voor inversie | na inversie | voor inversie | na inversie | | voor inversie | na inversie | |
| kv. A 0.01 % | 0.13 % | 0.0325 % | 0.09 % | **0.043 %** | 0.025 % | 0.0825 % | **0.0475 %** |
| „ B „ | | | 0.08 | **0.05** | | 0.0775 | **0.0525** |
| kv. A 0.015 | 0.125 | 0.02 | 0.0925 | **0.0325** | 0.02 | 0.0925 | **0.0325** |
| „ B „ | | 0.04 | 0.0925 | **0.0325** | 0.03 | 0.0925 | **0.0325** |
| kv. A 0.025 | 0.14 | 0.03 | 0.1025 | **0.0325** | 0.03 | 0.10 | **0.04** |
| „ B „ | „ | | 0.0875 | **0.0525** | | 0.0825 | **0.0575** |
| „ C „ | „ | | 0.09 | **0.05** | | — | — |

## F. Maltose.

**Proef 35** (16 Juli).

In de doelmatige doorstroomingsvloeistof met 0.285% $NaHCO_3$ wordt 0,15% maltose opgelost.

0 1 ccm. doorstroomingsvloeistof: reductie 0,0825%.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,07%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,07%.
Tegengehouden door beide nieren: 0,0825—0,07 = **0,0125** %, dus nauwelijks iets.

**Proef 36** (16 Juli).

Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 35.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,0875%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,0625%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,0825—0,0675 = **0,015**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,0825—0,0625 = **0,02** %.

**Proef 37** (26 Sept.).

De doorstroomingsvloeistof bevat 0,15% maltose.
0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof: reductie 0,095%.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,105%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,11%.
Tegengehouden door beide nieren: *niets.*

**Proef 38** (26 Sept).

Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 37.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,1%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,105%
Tegengehouden door beide nieren: *niets.*

**Proef 39** (26 Sept.).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proeven 37 en 38.
0,1 ccm. urine rechter nier. reductie 0,0625%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,0625%.
Tegengehouden door beide nieren: 0,095—0,0625 = **0,0325**%.

**Proef 40** (27 Sept.).
0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof: reductie 0,08%.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,065%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,0625%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,08—0,065 = **0,015**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,08—0,0625 = **0,0175**%.

*Uit al deze proeven blijkt, dat de hoeveelheid maltose, die tegengehouden wordt, in elk geval uiterst gering is, hoewel deze stof is opgebouwd uit twee moleculen glucose, en het glomerulusepithelium voor glucose in zeer geringe mate permeabel is.*

## G. Lactose en een mengsel van glucose en lactose.

**Proef 41** (3 Juli).
In de doorstroomingsvloeistof wordt 0,2% lactose opgelost.
0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof: reductie 0,14%.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,1375%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,14%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,14—0,1375 = **0,0025**%.
Tegengehouden door linker nier: 0,14—0,14 = **0**.

**Proef 42** (3 Juli).
0,1 ccm. doorstroomingsvloeistof: reductie 0,11%.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,11%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,1075%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,11—0,11 = **0**.
Tegengehouden door linker nier: 0,11—0,1075 = **0,0025**%.

Ook hier heeft de nier geen of uiterst weinig melksuiker tegengehouden.

**Proef 43** (3 Juli).
Dezelfde doorstroomingsvloeistof als voor proef 42.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,1075%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,1075%.
Tegengehouden door beide nieren: 0,11—0,1075 = **0,0025**%.

Ook hier heeft dus geen van de beide nieren lactose tegengehouden.

**Proef 44** (4 Juli).
0.1 ccm. doorstroomingsvloeistof: reductie 0,14%.
0,1 ccm. urine rechter nier: reductie 0,1450%.
0,1 ccm. urine linker nier: reductie 0,1325%.
Tegengehouden door rechter nier: 0,14—0,1450 = **0**.
Tegengehouden door linker nier: 0,14—0,1325 = **0,0075**%.

Door geen van de beide nieren is dus melksuiker tegengehouden.

Men mag hieruit besluiten, dat *het glomeruluseepithelium de melksuiker geheel doorlaat,* hoewel zij opgebouwd is uit glucose en galactose, van welke stoffen de eerste verbinding in ruime mate en galactose toch ook, ofschoon in geringe mate wordt tegengehouden.

Het scheen nu uit een theoretisch en ook uit een klinisch oogpunt van belang om na te gaan, hoe de nier zich zou gedragen tegenover een *mengsel van lactose en glucose.*

Retentievermogen der nier voor een mengsel van 0.1 % glucose en 0.1 % sacch. lactis (lactose).

Proeven van 24—26 September.

| Reductie door stroomings-vloeistof | Reductie urine rechter nier | Tegenge-houden door rechter nier | Reductie urine linker nier | Tegenge-houden door linker nier |
|---|---|---|---|---|
| Kikv. A 0.1575 / 0.16 | 0.0825 / 0.0825 | **0.0765 %** | 0.0825 / 0.0825 | **0.076 %** |
| Kikv. B „ | 0.09 / 0.095 } 0.0925 | **0.065 „** | 0.095 / 0.095 } 0.095 | **0.065 „** |
| Kikv. C „ | 0.09 | **0.0675 „** | 0.0925 | **0.065 „** |
| Kikv. D „ | 0.1 | **0.06 „** | — | — |
| Kikv. A 0.16 % | 0.096 | **0.064 „** | 0.104 | **0.056 „** |
| Kikv. B „ | 0.10 | **0.06 „** | 0.10 | **0.056 „** |
| Kikv. C „ | 0.104 | **0.056 „** | 0.094 | **0.066 „** |
| Kikv. D „ | 0.096 | **0.064 „** | 0.10 | **0.060 „** |

*Uit de proeven met een mengsel van glucose en melksuiker leert men, dat het retentievermogen der nier voor glucose geen invloed ondervindt van de melksuiker. Deze gaat door, terwijl de glucose in dezelfde mate wordt tegengehouden, alsof geen melksuiker aanwezig was.*

Dit resultaat is geheel in overeenstemming met het gebruik, dat sedert geruimen tijd van klinische zijde van de melksuiker wordt gemaakt om de validiteit der nier te onderzoeken en dat berust op de overweging dat de gezonde nier de melksuiker gemakkelijk doorlaat.

Gaarne danken wij den Heer R. Roelink voor de bekwame hulp bij dit onderzoek verleend.

*Samenvatting en Besluit.*

1. Het nu wederom bevestigde feit, dat wanneer men de nier doorstroomt met een Ringeroplossing van doelmatige samenstelling, waaraan glucose is toegevoegd, deze door de glomerulusmembraan

16

wordt tegengehouden, terwijl zouten, die immers ook krystalloiden zijn, erdoor gaan, heeft de vraag doen rijzen, waaraan deze tegenstelling moet toegeschreven worden.

2. Allereerst kan men denken aan de omstandigheid, dat glucose een zooveel grooter molecuul bezit, wat dan den doorgang zou kunnen bemoeilijken. Is deze hypothese juist, dan moeten disacchariden als saccharose, maltose en lactose, die een nog grooter molecuul ($C_{12}H_{22}O_{11}$) dan glucose ($C_6H_{12}O_6$) bezitten, de membraan zeker niet kunnen passeeren. De proeven leerden echter, dat het glomerulusepithelium voor die suikers, zelfs voor *raffinose* ($C_{18}H_{32}O_{16}$) in ruime mate permeabel is. Voor melksuiker is de permeabiliteit volkomen.

3. Kan de oorzaak der glucoseretentie dus niet aan de grootte van het molecuul worden toegeschreven, dan moet men wel denken aan haar structuur of configuratie. Daartoe bestaat des te meer aanleiding omdat, zooals door het onderhavige onderzoek is gebleken, de met haar isomere laevulose en mannose geheel, en galactose in ruime mate worden doorgelaten.

4. De glucose neemt derhalve onder de isomere monosacchariden ten aanzien van de glomerulusmembraan wel een bijzondere plaats in, of anders gezegd, *het glomerulusepithelium weet uit de monosacchariden de glucose te onderscheiden* op een wijze, die doet denken aan de verhouding van suikers en fermenten, waarvan EMIL FISCHER het bekend beeld van sleutel en slot gebruikte.

Hoe het zij, de onderzoekingen brengen wederom *een nieuwe illustratie voor de leer der stereoisomerie, maar nu niet, zooals tot dusverre door feiten van chemischen, maar van physiologischen aard, liggende in het gebied der permeabiliteit.*

5. Van theoretisch en van klinisch belang niet ontbloot schijnt verder het feit, dat bij gelijktijdige aanwezigheid van laevulose en glucose in de doorstroomingsvloeistof het retentievermogen voor glucose niet gewijzigd wordt. De beide suikers worden eenvoudig als door een filter van elkander gescheiden: de glucose blijft achter, de laevulose gaat door. Wat voor het mengsel van laevulose en glucose geldt, blijkt ook voor een mengsel van lactose en glucose het geval te zijn: de melksuiker gaat geheel in de urine over en de glucose wordt in dezelfde mate door het glomerulusepithelium tegengehouden, als wanneer geen melksuiker voorhanden was.

*Groningen*, Sept. 1918. *Physiologisch Laboratorium.*

**Plantkunde.** — De Heer WENT biedt een mededeeling aan: *„De loop van de vorming van diastase bij Aspergillus niger".*

Reeds geruimen tijd geleden had ik het plan, een onderzoek uit te voeren omtrent den invloed, dien uitwendige omstandigheden op de vorming van enzymen uitoefenen, meer in het bizonder bij *Aspergillus niger*. In zekeren zin zou dit een voortzetting zijn van een vroeger onderzoek, dat intusschen betrekking had op een andere schimmel, *Monilia sitophila*.[1]) Dat ik thans het oog gevestigd had op *Aspergillus niger* vond zijn verklaring in het feit, dat door KATZ omtrent de enzymvorming door deze schimmel meeningen waren geuit, die mij weinig waarschijnlijk leken, maar waaromtrent toch pas na een hernieuwd onderzoek een *zeker* oordeel kon gevormd worden.[2]) Andere werkzaamheden zijn oorzaak geweest, dat ik het bedoelde plan niet heb kunnen uitvoeren en het laat zich voorzien, dat er ook voorloopig niets van komt; bovendien heeft ondertusschen een ander onderzoeker, HARALD KYLIN, het onderzoek van KATZ volgens een betere methode herhaald.[3]) Het zou dus kunnen schijnen, dat er geen enkele reden tot publicatie bestond, wanneer ik niet bij het vooronderzoek tot eenige resultaten gekomen was. die naar het mij voorkomt, van voldoende belang zijn, om ze wereldkundig te maken, ook al is het onderzoek onvolledig.

Dit vooronderzoek had betrekking op de vraag, hoe het gesteld is met de vorming van diastase door *Aspergillus niger* op verschillenden leeftijd. Het komt mij namelijk voor, dat bij alle vergelijkende onderzoekingen niet voldoende gelet is op dit voorname punt, dat geen rekening werd gehouden met den leeftijd van de kulturen. Meestal toch werden kulturen bij verschillende voeding alle na een zelfden tijd van ontwikkeling met elkaar vergeleken, terwijl het toch wel duidelijk is, dat hier een vergelijking van ongelijkwaardige dingen plaats had, omdat de voedingswaarde van de oplossingen

---

1) F. A. F. C. WENT, Ueber den Einflusz der Nahrung auf die Enzymbildung durch Monilia sitophila (Mont.) Sacc. Jahrb. f. wiss. Botanik. 36 1901.

2) J. KATZ, Die regulatorische Bildung von Diastase durch Pilze. Jahrb. f. wiss. Botanik. 31 1898.

3) HARALD KYLIN, Ueber Enzymbildung und Enzymregulation bei einigen Schimmelpilzen. Jahrb. f. wiss. Botanik. 53 1914.

sterk verschilde. Het kwam mij voor, dat het noodig zou zijn het geheele verloop van de enzymvorming op achtereenvolgende tijdstippen bij elke voeding na te gaan.

Tot dit onderzoek ben ik nu in het geheel niet gekomen, maar wel heb ik voor een bepaald geval de vraag trachten te beantwoorden, hoe het verloop van de vorming van de diastase is. Als kultuurvloeistof werd steeds gebruik gemaakt van een oplossing, die bevatte 5 °/₀ glucose, 0,5 °/₀ $NH_4NO_3$, 0,1 °/₀ $K_2HPO_4$ en 0,05 °/₀ $MgSO_4$. Deze oplossing werd gesteriliseerd door verwarming op drie achtereenvolgende dagen telkens gedurende een half uur op 100° C.

De enting geschiedde met behulp van een platina-oog met vloeistof, waarin de conidiën van *Aspergillus* voorkwamen. Het is bekend, dat deze op de oppervlakte van de vloeistof blijven drijven en dat het niet gelukt ze ondergedoken te houden. Men kan nu zorg dragen voor een ongeveer gelijkmatige verdeeling op de oppervlakte van die vloeistof en dan met een entoog steeds dezelfde hoeveelheid vloeistof daarvan afenten. Wel is waar krijgt men zoo geen volkomen gelijkheid van het aantal conidiën in de verschillende kultuurkolven, maar de verschillen zijn zoo klein, dat zij op het eindresultaat geen invloed uitoefenen; hoogstens ziet men gedurende de eerste twee dagen een gering verschil in de ontwikkeling. Het zou wel uitvoerbaar zijn, te zorgen voor een grootere gelijkheid van het entmateriaal maar dit zou met zooveel bezwaren gepaard gaan, dat het de moeite niet zou loonen in verband met het uiterst geringe voordeel, er aan verbonden. Het behoeft wel geen betoog, dat uitzaaiing van een enkele conidië hier geheel ontoelaatbaar zou zijn, omdat men dan juist met groote individueele verschillen te maken zou krijgen. Deze verschillen kan men alleen gecompenseerd krijgen door uit te gaan van een groot aantal conidiën bij de enting.

De schimmel werd gekweekt in glazen kolven (Erlenmeyers) en bij de vergelijkende proeven werd steeds dezelfde hoeveelheid kultuurvloeistof in de gelijke kolven gebracht. De kolven stonden in een lokaal, dat op constante temperatuur van 24° C. werd gehouden met speling van 0. 5° naar boven en naar beneden. De kulturen stonden in het donker; alleen tijdens de enting en de waarneming werd kunstlicht gebezigd.

In het begin werd dagelijks en later na twee, drie en meer dagen bepaald, hoeveel enzym in de kultuurvloeistof en in de schimmelmassa van een van de kolven te vinden was; gewoonlijk werd deze bepaling verricht bij 2 of 3 kolven. Uit een van deze kolven werd dan tevens de gevormde schimmelmassa op een afgewogen filter verzameld en na droging gewogen, zoodat een beeld verkregen

werd van de hoeveelheid droge stof, die gevormd was. De andere schimmelmassa werd in een mortier met behulp van een weinig kiezelguhr fijngewreven, daarna gedurende een uur uitgetrokken met de kultuurvloeistof en vervolgens deze vloeistof afgefiltreerd en op enzym onderzocht; kende men nu de hoeveelheid enzym, die in de kultuurvloeistof aanwezig was — dus, die naar buiten gediffundeerd was — dan behoefde men deze maar van de gevonden hoeveelheid af te trekken, om te weten hoeveel enzym er in het mycelium voorkwam.

De hoeveelheid diastase werd bepaald, door na te gaan, na hoeveel tijd het zetmeel uit een zetmeeloplossing van bepaalde sterkte, die met de enzymoplossing werd vermengd, geheel verdwenen was, waarna dan de hoeveelheid enzym omgekeerd evenredig moest zijn met dien tijd. De al of niet aanwezigheid van zetmeel werd onderzocht met behulp van een Jodiumoplossing van bepaalde sterkte. In theorie is deze methode niet de beste; het zou beter zijn, wanneer men de hoeveelheid suiker, die in een bepaalden korten tijd uit het zetmeel ontstaat, nagaat en dan de hoeveelheid diastase evenredig stelt aan de zoo gevonden cijfers. Maar dit is bij de diastase van *Aspergillus niger* niet uitvoerbaar, omdat het hier dikwijls gaat om zulke bizonder kleine hoeveelheden enzym, dat de gevormde suiker niet te bepalen zou zijn. Daarom werd het beter geacht, de te onderzoeken enzymoplossing te verdeelen in een aantal gelijke deelen, deze elk te vermengen met een zelfde geringe hoeveelheid zeer verdunde zetmeeloplossing en telkens na een bepaald tijdsverloop een van die mengsels te onderzoeken op de al of niet aanwezigheid van zetmeel met behulp van dezelfde zeer verdunde Jodiumoplossing.

Uit voorproeven bleek, dat, wanneer men een oplossing gebruikt, die op 100 gr. water 62,5 mgr. Jodium en 62,5 mgr. Joodkalium bevat, 1 ccm. hiervan in staat is zetmeeloplossing duidelijk blauw te kleuren, wanneer deze 1 mgr. oplosbaar zetmeel in 10 ccm. water bevat, terwijl wanneer die hoeveelheid 0,2 mgr. bedraagt, er nog een duidelijk roodviolette kleur optreedt. Bij de inwerking van het diastatische enzym van *Aspergillus niger* ontstaan uit zetmeel, voordat dit geheel gehydrolyseerd is, erythrodextrine-achtige tusschenproducten, die met Jodium een roode kleur aannemen. Zoolang zulke lichamen aanwezig waren, werd aangenomen, dat de reactie nog niet geëindigd was; pas nadat de kleur na vermenging met de Jodiumoplossing geel bleef, werd geacht, dat het zetmeel volkomen verdwenen was.

Het spreekt wel van zelf, dat alle vloeistoffen onder dezelfde omstandigheden verkeerden. Daarom werd steeds in reageerbuisjes 5 ccm. van de te onderzoeken vloeistof vermengd met 5 ccm. van

een oplossing, die 0,08 °/₀ oplosbaar zetmeel bevatte en met enkele druppels toluol; dit laatste ten einde bij proeven, die langer duurden, elke ontwikkeling van schimmels of bacteriën onmogelijk te maken. Daarna werd even geschud; de buisjes werden vervolgens in het donker bij een constante temperatuur van 24° C. geplaatst. Na een bepaalden tijd werd de vloeistof uit een van de reageerbuisjes afgefiltreerd en daaraan 1 ccm. van de bovengenoemde oplossing van Jodium toegevoegd. Bleek de kleur dan nog blauw of rood te zijn, dan werd deze bewerking eenigen tijd later herhaald, totdat de kleur duidelijk geel was.

Het was de vraag of men op deze wijze, dus eenigszins tastend te werk gaande, tot betrouwbare resultaten kon komen. Ten einde hieromtrent zekerheid te verkrijgen, werden eenige voorproeven genomen. Van een kultuur van *Aspergillus niger*, die 5 dagen oud was, werd de vloeistof afgefiltreerd en deze daarna in twee gelijke deelen gedeeld. De eene helft bleef onveranderd, de andere werd weer in tweeën gedeeld en de eene helft even opgekookt ter vernietiging van het enzym, daarna na afkoeling vermengd met het ongekookte gedeelte, zoodat men twee vloeistoffen kreeg, waarvan de eene de dubbele hoeveelheid enzym moest bevatten van de andere. Van beide vloeistoffen werd telkens 5 ccM. in een reageerbuisje met 5 ccM. zetmeeloplossing vermengd en na bepaalde tijden een buisje op de aanwezigheid van zetmeel onderzocht. Het bleek, dat de niet verdunde oplossing na 95 minuten met Jodium nog iets roodachtig geel werd, terwijl na 100 minuten de kleur zuiver geel was, zoodat de kleursverandering na 97½ minuut had plaats gehad. Bij de tweemaal verdunde oplossing vond die verandering plaats in den tijd tusschen 180 en 190 minuten, dus omtrent 185 minuten. De verhouding van 97,5 : 185 is als 1 : 1,9, terwijl de hoeveelheden enzym tot elkaar stonden als 2 : 1, zoodat de font van de bepaling niet meer dan 5 °/₀ bedroeg.

In een ander geval was het zetmeel door de onverdunde oplossing in 495 minuten gehydrolyseerd, door de tweemaal verdunde in 907 minuten en door de 10 maal verdunde in 4365 minuten. Deze getallen verhouden zich als 1 : 1,8 : 8,8, in plaats van 1 : 2 : 10.

Eindelijk nog een derde geval, waar de enzymoplossing 2, 4, 8, en 16 maal verdund werd. Het resultaat is uit de tabel op de volgende bladzijde te zien.

Wanneer men in aanmerking neemt, hoe tastend deze bepalingen moesten geschieden, dan zal men de overeenstemming tusschen de bepaling en de werkelijkheid niet anders dan zeer bevredigend moeten noemen; het verschil bedraagt hier toch meestal veel minder dan 10 °/₀.

| | Nog roodkleuring met J. | Zetmeel verdwenen | Gemiddeld | Verhouding |
|---|---|---|---|---|
| oplossing niet verdund | na 1 uur 45 min. | na 2 uur | 1 u. 52 min. | 1.— |
| „ 2 maal „ | „ 3 „ 20 „ | „ 4 „ | 3 „ 40 „ | 2.— |
| „ 4 „ „ | „ 7 „ 30 „ | „ 8 „ | 7 „ 45 „ | 4.1 |
| „ 8 „ „ | „ 13 „ 30 „ | „ 16 „ | 14 „ 45 „ | 7.9 |
| „ 16 „ „ | „ 27 „ 00 „ | „ 28 „ | 27 „ 30 „ | 14.7 |

Men kan dus aannemen, dat het op deze wijze gelukt een beeld te krijgen van de hoeveelheden enzym, die in bepaalde vloeistoffen aanwezig zijn. Dat geldt echter alleen onder dit voorbehoud, dat deze vloeistoffen overigens dezelfde samenstelling bezitten. Nu moet ongelukkigerwijze geconstateerd worden, dat de kultuurvloeistof van elke schimmel in den loop van de ontwikkeling veranderingen ondergaat, ten deele een gevolg van het opnemen van bepaalde bestanddeelen van die vloeistof door het zich ontwikkelende mycelium, ten deele ook een gevolg van afscheidingen van die schimmel. In dat opzicht zijn dus de kulturen van *Aspergillus* op verschillenden leeftijd niet volkomen vergelijkbaar. Nu zou men wel de concentratie van de H-ionen gelijk kunnen maken, door toevoeging van zuur of base, maar dat zou toch niet afdoende helpen, omdat er zeker andere stoffen aanwezig kunnen zijn, die de reactie versnellen of vertragen en die men, op het oogenblik ten minste, niet kan bepalen.

Er is nog wel een andere methode denkbaar, die hierin zou bestaan, dat men kultuurvloeistoffen van verschillenden leeftijd met elkaar vermengt en wel ten deele nadat deze gedeeltelijk zijn opgekookt ter vernietiging van het enzym. Daardoor zou men dan kunnen nagaan, of er in een bepaalde oplossing stoffen voorkomen, die de enzymwerking hetzij versnellen of vertragen. Uit eenige voorproeven is gebleken, dat er wellicht iets te bereiken valt met een dergelijke methode. Zoo werd b.v. de schimmel uit een kultuur, die 7 dagen oud was, fijn gewreven, daarna met de eigen kultuurvloeistof uitgetrokken en de oplossing toen verdund met een gelijk volume van: *a.* de eigen kultuurvloeistof, nadat deze opgekookt was, ter vernietiging van het enzym; *b.* een eveneens opgekookte kultuurvloeistof van een kultuur, die 17 dagen oud was en *c.* een dito oplossing van een kultuur, die 3 dagen oud was. Bij onderzoek bleek, dat, toen 5 ccM. van de genoemde oplossingen vermengd

werden met 5 ccM. van een oplossing van oplosbaar zetmeel van 0,08 %, er bij *a* en *b* 1320 minuten verliepen, voordat al het zetmeel verdwenen was, terwijl die tijd bij *c* 900 minuten bedroeg. Er was dus of in *c* een de reactie versnellende stof aanwezig of de oplossingen *a* en *b* bevatten een stof, die vertragend werkte en die in *c* ontbrak. Overigens werd deze methode niet verder uitgewerkt in verband met de omstandigheden in den aanvang van dit opstel vermeld en de verkregen cijfers moeten dus onder een zekere reserve worden aanvaard. Men zal echter zien, dat zij toch wel een zeker beeld geven van het verloop der diastasevorming bij *Aspergillus niger*.

Voordat ik nu de resultaten der onderzoekingen nader meedeel, zal ik eerst met een voorbeeld nauwkeurig aangeven, op welke wijze de cijfers verkregen werden. Drie kolven, die ieder 75 ccm. vloeistof bevatten, werden onderzocht, nadat er gedurende 3 dagen een kultuur van *Aspergillus niger* in was geweest. Van kolf 1 werd de kultuurvloeistof afgefiltreerd, de schimmelmassa in een mortier fijngewreven met kieselguhr en daarna met de kultuurvloeistof uitgetrokken. Vervolgens werd gefiltreerd en het filtraat in reageerbuisjes verdeeld, zoodat elk buisje 5 ccm. vloeistof kreeg, terwijl hieraan toegevoegd werd 5 ccm. van een oplossing van 0,08 % oplosbaar zetmeel. Na 60 minuten werd de vloeistof uit een van de buisjes op de reeds aangegeven wijze met jodium onderzocht; de kleur was blauw. Na 180 minuten werd bij een tweede buisje een licht wijnroode kleur verkregen, na 225 minuten was bij een derde buisje de kleur lichtgeel. Er kon dus aangenomen worden, dat de hydrolyseering van het zetmeel plaats had gehad in ongeveer 200 minuten (1).

Met een tweede kolf werd op dezelfde wijze te werk gegaan; de reacties met de jodiumoplossing blijken uit de volgende tabel:

| | | | |
|---|---|---|---|
| na | 60 | minuten ...... | blauw |
| ,, | 180 | ,, ...... | roodviolet |
| ,, | 220 | ,, ...... | roodviolet |
| ,, | 255 | ,, ...... | licht wijnrood |
| ,, | 295 | ,, ...... | roodgeel |
| ,, | 340 | ,, ...... | geel |

zoodat dus de tijd voor hydrolyseering ongeveer 315 minuten bedroeg (2).

Van een derde kolf werd de schimmelmassa afgefiltreerd en opgevangen op een afgewogen filter, daarna uitgewasschen en gedroogd; bij weging bleek de gevormde droge stof te bedragen 69,5 mgr. De kultuurvloeistof alleen werd op de wijze, voor de andere kolven

aangegeven, op enzym onderzocht. Uit de volgende tabel blijkt welke reacties met de jodiumoplossing werden verkregen:

| | | |
|---|---|---|
| na 175 | minuten | ...... blauw |
| „ 250 | „ | ...... blauw |
| „ 335 | „ | ...... blauwviolet |
| „ 485 | „ | ...... roodviolet |
| „ 1055 | „ | ...... roodgeel |
| „ 1130 | „ | ...... licht roodgeel |
| „ 1190 | „ | ...... geel |

Men mag dus aannemen, dat voor de hydrolyseering van het zetmeel ongeveer 1160 minuten zijn noodig geweest (3).

Wanneer men nu de hoeveelheid enzym, die in staat is het zetmeel in 10 ccm. van een 0,04 °/₀ oplossing van oplosbaar zetmeel in 100 minuten te hydrolyseeren gelijk stelt aan 10, dan wordt die hoeveelheid in geval (1) in het reageerbuisje $\frac{100}{200} \times 10$, bij (2) $\frac{100}{315} \times 10$, bij (3) $\frac{100}{1160} \times 10$, dus de totale hoeveelheid in de 75 ccm. wordt $\frac{75}{5}$, dat is 15 maal grooter. De berekening geeft dus bij (1) een hoeveelheid diastase van 75,0, bij (2) van 47,6 en bij (3) van 12,9. Neemt men aan, dat ook bij kolf 1 en 2 een zelfde hoeveelheid enzym in de kultuurvloeistof aanwezig was als in kolf 3, dan blijft er voor het enzym in het mycelium over bij (1) 62,1 en bij (2) 34,7. Deze cijfers schijnen zeer sterk uiteen te loopen en toch zal zoo dadelijk blijken, dat er een groote regelmaat op te merken valt bij het onderzoek dag voor dag van de hoeveelheden enzym.

De hier uitvoerig beschreven proef was namelijk het begin van een geheele serie van bepalingen. Er werden totaal 42 dergelijke kolven met *Aspergillus* geënt en na een bepaald aantal dagen telkens drie er van op de aangegeven wijze onderzocht. Het resultaat ziet men in de tabel op de volgende bladzijde aangegeven. Men vindt hier in kolom I het aantal dagen, dat de kultuur had geduurd, in kolom II voor de eene kolf de hoeveelheid enzym in mycelium en kultuurvloeistof samen, in kolom III hetzelfde voor de andere kolf, in kolom IV het gemiddelde van II en III, in kolom V de hoeveelheid enzym alleen in de kultuurvloeistof van de derde kolf, in kolom VI het verschil tusschen IV en V, eindelijk in kolom VII het drooggewicht van den oogst aan schimmelmassa in kolf 3. Waar in de tabel het teeken $<$ staat, beteekent dit, dat het laatste reageerbuisje met de jodiumoplossing nog een duidelijke reactie gaf, zoodat het eindpunt

van de hydrolyse van het zetmeel nog niet bereikt was. Waar aangegeven wordt een „spoor", is de hoeveelheid geringer dan 0,5, ofschoon nog duidelijk een verandering van reactie waarneembaar was.

| I | II | III | IV | V | VI | VII |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 75.0 | 47.6 | 61.3 | 12.9 | 48.4 | 69.5 mgr. |
| 5 | 44.1 | 44.6 | 44.1 | 4.2 | 39.9 | 319.0 „ |
| 7 | 66.6 | 41.8 | 54.2 | 3.7 | 50.5 | 398.0 „ |
| 8 | 21.7 | 30.3 | 26.0 | 3.0 | 23.0 | 538.5 „ |
| 10 | < 6.0 | < 6.0 | < 6.0 | 2.3 | < 3.7 | 549.0 „ |
| 12 | 4.1 | 7.5 | 5.8 | 1.8 | 4.0 | 699.0 „ |
| 15 | < 2.8 | < 2.8 | < 2.8 | spoor | < 2.8 | 939.0 „ |
| 17 | 2.3 | 3.3 | 2.8 | spoor | 2.8 | 936.5 „ |
| 19 | < 1.6 | < 1.6 | < 1.6 | 0.5 | < 1.1 | 943.5 „ |
| 23 | 1.0 | 2.6 | 1.8 | 2.0 | 0.0 | 899.0 „ |
| 26 | 6.2 | 10.0 | 8.1 | 2.5 | 5.6 | 709.0 „ |
| 30 | 16.7 | 4.5 | 10.6 | 3.3 | 7.3 | 782.0 „ |
| 33 | 11.1 | 29.3 | 20.2 | 16.7 | 3.5 | 742.5 „ |
| 37 | 16.6 | 50.0 | 33.3 | 11.1 | 22.2 | 734.5 „ |

De cijfers van kolom II en III schijnen op het eerste gezicht wel zeer uiteen te liggen, maar bij nadere beschouwing is er toch een zeker regelmatig verloop merkbaar, waardoor kolom IV gerechtvaardigd wordt. De hoeveelheid enzym in de kultuurvloeistof is meestal zeer gering, zoodat het verloop van kolom VI nauwelijks verschillend is van dat van kolom IV. Er zijn hierop een paar uitzonderingen, maar het komt mij voor, dat het beter is, eerst de waarnemingen volledig te geven en daarna pas een discussie van de gevonden getallen te beginnen.

Een tweede reeks getallen had betrekking op een aantal kulturen, die te gelijker tijd met de reeds genoemde werden gemaakt en die hiervan alleen verschilden doordat niet 75, maar 150 ccM. kultuurvloeistof gebezigd werd. Er werden dan ook grootere kolven genomen, ten gevolge waarvan de oppervlakte van de kultuurvloeistof 47 vierkante cM. bedroeg tegenover 24 in de vorige serie. De mogelijkheid bestond toch, dat hierdoor de ontwikkeling en daarmee ook de enzymvorming van de *Aspergillus* langer voort zou kunnen gaan. Van deze kolven werd de helft direct op enzym onderzocht, de

andere nadat deze met de fijngewreven schimmelmassa een uur gestaan had en daarna was gefiltreerd. Het verkregen resultaat blijkt uit onderstaande tabel:

| | Enzym in schimmel en kultuurvloeistof | Enzym in kultuurvloeistof alleen |
|---|---|---|
| na 3 dagen | 65.2 | 6.7 |
| „ 5 „ | 75.0 | 5.4 |
| „ 7 „ | 75.0 | 3.6 |
| „ 8 „ | 75.0 | < 3.0 |
| „ 10 „ | 30.0 | 2.2 |
| „ 12 „ | 30.0 | < 1.9 |
| „ 15 „ | 13.6 | 1.5 |
| „ 17 „ | 11.0 | 1.2 |
| „ 19 „ | 1.7 | 0.0 |
| „ 23 „ | 4.0 | 0.0 |
| „ 26 „ | 4.2 | 0.0 |
| „ 30 „ | 11.3 | 0.0 |
| „ 33 „ | 44.1 | 0.0 |
| „ 37 „ | 4.5 | 0.0 |

Om nu ook gedurende langeren tijd het verloop van de diastasevorming te kunnen nagaan, werd een nieuwe proef begonnen met 99 kolven, die ieder 300 ccM. voedingsoplossing kregen en die geheel behandeld werden op de wijze van de eerste serie met deze éene uitzondering, dat nu gelet werd op de hoeveelheid vloeistof, die bij het einde van de kultuur nog over was. Ten gevolge van verbruik door de schimmel en door verdamping neemt die hoeveelheid af, iets wat bij de bovengenoemde proef, die 37 dagen duurde, nog niet zoo sterken invloed op de uitkomsten moest hebben als bij deze, waarvan de duur niet minder dan 149 dagen beliep. De berekening was hierdoor iets omslachtiger, maar toch nog eenvoudig genoeg en na hetgeen daarover vroeger vermeld werd, zal het niet noodig zijn, de ietwat gewijzigde berekening hier te vermelden; alleen kan opgemerkt worden, dat dus het cijfer van kolom VI niet juist het verschil is van IV en V. Onder dit voorbehoud hebben in de hier volgende tabel de verschillende kolommen dezelfde beteekenis als in de eerste tabel, hierboven aangegeven.

| I | II | III | IV | V | VI | VII |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.41 | 0.33 | 1 mgr. |
| 3 | 24.19 | 42.25 | 33.22 | 9.71 | 23.56 | 85 „ |
| 4 | 44.37 | 111.11 | 77.74 | 10.98 | 66.64 | 344 „ |
| 5 | 24.40 | 43.48 | 33.94 | 2.11 | 31.90 | 754 „ |
| 6 | 8.00 | 18.76 | 13.38 | 0.76 | 12.64 | 952 „ |
| 7 | 2.40 | 6.34 | 4.37 | 0.29 | 4.09 | 1236 „ |
| 9 | 1.50 | 1.50 | 1.50 | 0.05 | 1.45 | 1577 „ |
| 12 | 1.00 | 0.50 | 0.75 | 0.00 | 0.75 | 1562 „ |
| 16 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.00 | 0.50 | 1259 „ |
| 19 | 1.64 | 1.00 | 1.32 | 0.30 | 1.01 | 1117 „ |
| 23 | 1.11 | 4.45 | 2.78 | 0.76 | 2.04 | 1095 „ |
| 26 | 3.12 | 1.24 | 2.18 | 1.20 | 0.97 | 1080 „ |
| 30 | 4.44 | 8.70 | 6.57 | 4.41 | 2.11 | 1025 „ |
| 33 | 4.17 | 4.17 | 4.17 | 0.82 | 3.46 | 1073 „ |
| 37 | 1.64 | 1.50 | 1.57 | 1.11 | 0.57 | 1087 „ |
| 40 | 6.00 | 4.44 | 5.22 | 4.00 | 1.10 | 1031 „ |
| 44 | 1.26 | 1.12 | 1.19 | 1.37 | 0.00 | 1040 „ |
| 47 | 4.48 | 2.00 | 3.24 | 3.48 | 0.00 | 1034 „ |
| 51 | 1.25 | 3.13 | 2.19 | 7.32 | 0.00 | 1035 „ |
| 58 | 0.94 | 0.94 | 0.94 | 1.90 | 0.00 | 1039 „ |
| 65 | 1.12 | 0.72 | 0.92 | 0.98 | 0.00 | 987 „ |
| 72 | 0.50 | 20.00 | 10.25 | 4.60 | 5.68 | 982 „ |
| 79 | 6.40 | 0.50 | 3.45 | 4.56 | 0.00 | 1039 „ |
| 86 | 0.38 | 7.50 | 3.94 | 1.08 | 2.89 | 1009 „ |
| 93 | 0.04 | 0.42 | 0.23 | 1.71 | 0.00 | 966 „ |
| 100 | 0.30 | 0.42 | 0.36 | 0.20 | 0.16 | 956 „ |
| 107 | 0.10 | 0.36 | 0.23 | 1.56 | 0.00 | 992 „ |
| 114 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.08 | 0.01 | 933 „ |
| 121 | 0.08 | 0.44 | 0.26 | 0.08 | 0.17 | 973 „ |
| 128 | 0.08 | 0.68 | 0.38 | 0.06 | 0.32 | 958 „ |
| 135 | 0.00 | 0.12 | 0.06 | 0.57 | 0.00 | 917 „ |
| 142 | 0.08 | 0.00 | 0.04 | 0.05 | 0.00 | 962 „ |
| 149 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 0.05 | 922 „ |

De getallen van kolom IV zijn in figuur 1 grafisch voorgesteld. In deze figuur is de onderdom van de kultuur (in dagen) afgezet

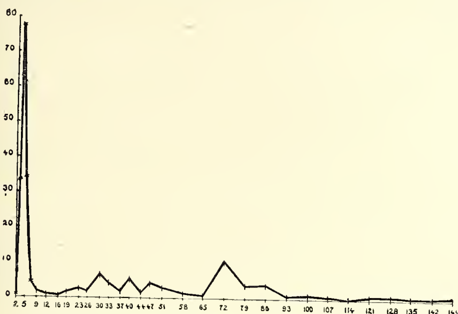



Fig. 1.

op de abscissen-as, terwijl de hoeveelheden diastase als ordinaten zijn gebezigd. In figuur 2 zijn op dezelfde wijze de cijfers van kolom VI grafisch voorgesteld. Nu kan men op deze laatste cijfers wellicht gegronde aanmerkingen maken, omdat hierbij afgetrokken wordt de hoeveelheid enzym, voorkomende in de kultuurvloeistof van een

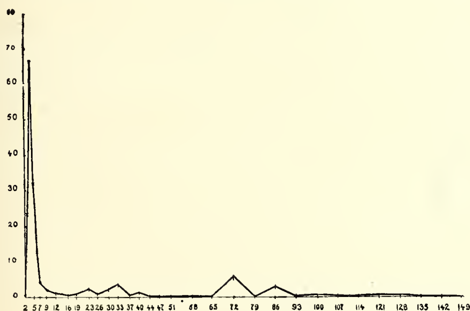



Fig. 2.

andere kultuur dan die waarvan de hoeveelheid enzym in het mycelium bepaald werd. Daaraan is het dan ook toe te schrijven, dat men zulke gevallen vindt als na 79 dagen, waar in de schimmel plus vloeistof gemiddeld 3,45 enzym zit, in de vloeistof daarentegen 4,56, dus meer. Dit is natuurlijk onzinnig en wanneer men de eigen

kultuurvloeistof had kunnen bezigen, zou men dergelijke cijfers niet gevonden hebben. Toch heb ik deze cijfers hier opgenomen en ze ook in figuur 2 in beeld gebracht, om te doen zien hoe het algemeene verloop van de aanwezigheid van diastase in de schimmelmassa zelf is. Het blijkt wel, dat deze lijn in groote trekken geheel gelijk is aan die van figuur 1. Dit is zeer begrijpelijk, wanneer men uit de cijfers van kolom V ziet, dat in het algemeen de kultuurvloeistof geen eenigszins aanzienlijke hoeveelheden enzym bevat; alleen wanneer er in het mycelium veel enzym aanwezig is, kan er ook in de omringende vloeistof een hoeveelheid worden aangetroffen, die niet al te klein is. Hoe dit enzym daar komt, moet in het midden gelaten worden. Men zou zich kunnen denken, dat het afkomstig was van reeds afgestorven cellen, maar daartegenover staat, dat men het juist alleen bij zeer jonge mycelia in iets grootere hoeveelheden aantreft.

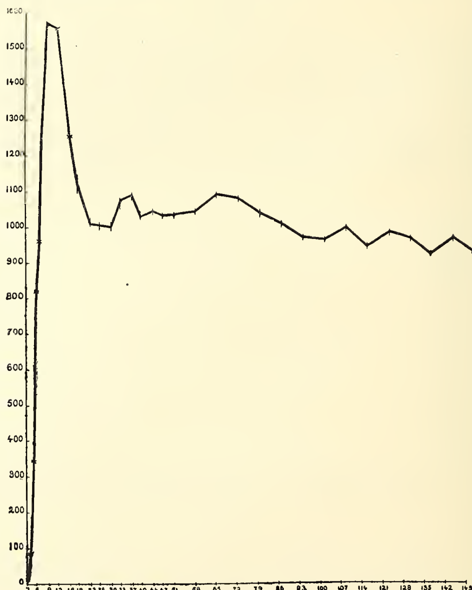



Fig. 3.

Wij kunnen dus verder het enzym, dat in de kultuurvloeistof gevonden wordt, buiten beschouwing laten, om ons alleen bezig te

houden met die diastase, die binnen het mycelium van de schimmel wordt aangetroffen. Uit alle tabellen en ook uit figuur 1 en 2 blijkt wel afdoende, dat er na de kieming een sterke toename van het enzym is waar te nemen, dat hiervoor al vrij spoedig een maximum bereikt wordt, waarna een bijna even snelle daling te constateeren valt. Men zal natuurlijk neiging gevoelen deze stijging in verband te brengen met de ontwikkeling van het mycelium, maar de cijfers voor den schimmeloogst in de verschillende tabellen toonen aan, dat dit niet juist kan zijn. Ten overvloede is in figuur 3 een beeld gegeven van de ontwikkeling van het mycelium bij de laatst besproken proef. Hier is de duur van de ontwikkeling aangegeven in dagen, op de abscissenas afgezet, terwijl de ordinaten het drooggewicht van de schimmelmassa aangeven. Men ziet een sterke stijging van den oogst in de eerste dagen, die gevolgd wordt door een daling, waarschijnlijk veroorzaakt door een overwegen van de dissimilatieprocessen over de assimilatie. Bij de verwerking van het mycelium op enzym bleek trouwens in de oudere kulturen een groot gedeelte dood te zijn, iets wat gemakkelijk te constateeren was, daar de hyphen week en slap aanvoelden, niet meer elastisch, zooals bij de jonge kulturen; maar dit liet zich pas met zekerheid constateeren, toen de schimmels eenige maanden oud waren.

Het is wel heel duidelijk, dat er geen evenredigheid bestaat tusschen de hoeveelheid droge stof van de schimmel en de gevormde enzymmassa. Maar bovendien ziet men, dat wel is waar in den aanvang van de ontwikkeling zoowel droge stof als diastase toenemen, maar dat die vermeerdering bij het enzym al tot staan gekomen is, terwijl de schimmelmassa nog dagen lang toeneemt.

Leveren nu de hier vermelde proeven inderdaad het bewijs, dat de hoeveelheden diastase in de schimmel gedurende de eerste dagen toenemen, om daarna weer een vermindering te ondergaan? Zou het niet kunnen zijn, dat de kultuurvloeistof, die gebezigd wordt voor het uittrekken van het enzym, langzame veranderingen ondergaat van dien aard, dat zich daarin een stof ophoopt, die het enzym vernietigt, of ten minste de werking daarvan tegengaat? Of omgekeerd zou niet een of andere versnellende stof, die in den aanvang aanwezig is en eerst toeneemt, daarna af kunnen nemen? Een zeker antwoord op dergelijke vragen zal pas gegeven kunnen worden, wanneer men de methode, die in den aanvang van dit opstel kort werd aangeduid, verder uitwerkt. Maar toch zijn er feiten, die de hier geopperde verklaringen zeer onwaarschijnlijk maken. Ik wijs er daarvoor op, dat in alle reeksen van proeven de daling van de hoeveelheid diastase niet regelmatig plaats heeft, maar dat later

weer eens plotselinge stijgingen worden waargenomen. Het is niet wel denkbaar, dat hierbij plotseling de samenstelling van de kultuurvloeistof een zoodanige verandering zou hebben ondergaan, dat daardoor de plotselinge verandering van de cijfers verklaard zou kunnen worden. Men kan hier aan niets anders denken dan aan een toeneming van de hoeveelheden diastase binnen de cellen van de schimmel. En wanneer men in dit geval aan de kultuurvloeistof geen grooten invloed op de cijfers voor de diastase mag toekennen, dan kan dit ook voor de andere gevallen niet worden aangenomen. Wij mogen dus met vrij groote zekerheid verwachten, dat de algemeene loop van de lijn van figuur 1 of 2 ons een beeld geeft van de werkelijke hoeveelheden diastase, die in het mycelium van *Aspergillus niger* voorkomen.

Wanneer wij het bovenstaande als juist mogen aannemen, dan volgt hieruit nog meer. Vooreerst, wanneer wij eens een oogenblik afzien van de latere onregelmatigheden van de lijn, ziet men eerst een zeer snelle rijzing, gevolgd door een bijna even sterke daling. Het eerste zou te verklaren zijn door de vorming van steeds meer en nieuw enzym, maar de daling? Er blijft niet veel anders over dan de conclusie, dat er binnen de cel steeds vernietiging van enzym plaats heeft; deze vernietiging zou dan in de eerste dagen worden gecompenseerd en overtroffen door de nieuwvorming, welke laatste echter al spoedig hetzij geheel tot stilstand zou komen of zoo gering zou worden, dat zij bij lange na niet voldoende zou zijn om de hoeveelheid enzym op peil te houden.

Ik kom thans terug op de onregelmatigheden, die in het dalende deel van de lijn zijn waar te nemen. Men ziet in de beide eerste tabellen, dat na ongeveer 1 maand de hoeveelheid diastase in de schimmel plotseling een aanzienlijke stijging ondervindt. Deze proeven duurden niet lang genoeg om te zien, hoe het verdere beloop zou zijn en daarom juist werd de laatste serie kolven neergezet, ten einde gedurende een langer tijdsverloop het gedrag van *Aspergillus niger* in dit opzicht na te gaan. Het blijkt, dat ook hier na ongeveer 1 maand de rijzing van het enzymgehalte valt te constateeren; daarop volgt weer een daling, vervolgens weer een stijging, terwijl na ongeveer 3 maanden de daling blijvend wordt, zoodat er ten slotte zoo goed als in het geheel geen diastase meer overblijft. De schommelingen van deze lijn zijn verklaarbaar, wanneer men bedenkt, dat de groote stijging in de eerste 3 — 4 dagen samengaat met een krachtige ontwikkeling van het jonge mycelium. Ditzelfde heeft nu dikwijls later nog weer eens plaats, wanneer de schimmel nieuwe conidiën heeft gevormd en deze, in de kultuurvloeistof terecht

komend, daar ontkiemen; wanneer dit plaats heeft, zal er een plotselinge stijging van de hoeveelheid diastase te constateeren moeten zijn. Het spreekt wel van zelf, dat het niet altijd vooruit te zeggen valt, wanneer in den loop van de kultuur zich dit geval zal voordoen, maar wel kan voorspeld worden, dat de kultuurvloeistof langzamerhand al minder en minder geschikt zal worden voor de ontkieming van die conidiën en dat dus dit verschijnsel langzamerhand zal ophouden. Wanneer deze verklaring juist is, zou men het dus in de hand hebben door voortdurende ververSching van de voedingsoplossing, de diastasevorming bij *Aspergillus niger* veel langer te laten voortduren.

De verschijnselen, die hier het laatst besproken werden, zijn dus van secundairen aard en elke studie van de enzymvorming bij *Aspergillus niger* zal zich moeten beperken tot de eerste ontwikkelingsstadia. Het is wel is waar niet te zeggen, of bij andere voeding het verloop van de enzymvorming overeenkomstig zal zijn, maar men mag dit toch wel als waarschijnlijk verwachten. Niet alleen zal het dus niet geoorloofd zijn, conclusies te trekken uit de hoeveelheden enzym, die men aantreft bij kulturen, die b.v. eenige weken oud zijn, maar men zal bij elke soort van voedsel het verloop van de enzymvorming gedurende de eerste dagen van de ontwikkeling van de schimmel nauwkeurig moeten trachten te vervolgen; dan pas kunnen conclusies getrokken worden omtrent den invloed van een bepaalde voeding op de enzymvorming bij *Aspergillus niger*.

Het spreekt wel van zelf, dat deze gevolgtrekkingen tot nu toe alleen betrekking hebben op de vorming van diastase bij *Aspergillus niger*; maar toch zullen zij er toe moeten voeren om voorzichtig te zijn met conclusies omtrent andere enzymen en omtrent andere schimmels; bij een onderzoek zal de mogelijkheid in het oog gehouden moeten worden, dat daar iets soortgelijks gevonden zal kunnen worden.

Resumeerend, blijkt, dat bij *Aspergillus niger* gedurende de eerste dagen na de kieming groote hoeveelheden diastase in het mycelium ontstaan (bij voeding met glucose als *C*-bron en $NH_4NO_3$ als *N*-bron), dat daarnevens een vernietiging van dit enzym plaats heeft, die in het eerst in het niet verzinkt tegenover de vorming, maar die weldra zoozeer op den voorgrond treedt, dat de hoeveelheid snel daalt, nadat deze ± 5 dagen na den aanvang van de kieming een maximum bereikt heeft. In de voedingsvloeistof komt steeds maar een zeer gering gedeelte van de totale hoeveelheid enzym, die binnen het mycelium te vinden is; wellicht is deze ten deele afkomstig uit afstervende cellen.

*Utrecht*, Augustus 1918.

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Een involutie in de stralenruimte*".

1. Door vier willekeurig in de ruimte aangenomen waaiers wordt in de stralenruimte een involutie van stralenparen bepaald; elk paar bestaat uit de beide transversalen $t,t'$ van vier stralen $a,b,c,d$, die ieder tot een der vier waaiers behooren. De waaier $(a)$ zal ook door het teeken $(A,\alpha)$ worden aangeduid; $A$ is de top, $\alpha$ het vlak van $(a)$. Analoog zullen $(B,\beta)$, $(C,\gamma)$, $(D,\delta)$ de overige drie waaiers aanduiden.

Een rechte $t$ bepaalt vier stralen $a,b,c,d$; deze hebben in het algemeen nog een tweede transversaal $t'$. Behooren $a,b,c,d$ tot een quadratische regelschaar, dan is elke rechte der toegevoegde regelschaar aan elke andere rechte dier schaar toegewezen.

Als $t$ den waaier $(T,\tau)$ doorloopt, zal $t'$ een regelvlak beschrijven, dat door $(t')^x$ zal worden aangeduid; $x$ duidt den graad van dat regelvlak aan. Door de stralen van $(T,\tau)$ worden de vier waaiers $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$ projectief gemaakt.

2. Onderstellen wij nu eerst, dat die waaiers op eenige wijs in projectief verband zijn gebracht, en beschouwen dan het regelvlak $T$ gevormd door de transversalen $t,t'$ van vier overeenkomstige stralen.

Uit $A$ worden de waaiers $(b)$, $(c)$, $(d)$ door drie projectieve vlakkenbundels geprojecteerd; er zijn dus drie transversalen van overeenkomstige stralen $b,c,d$, die den daarbij behoorenden straal $a$ in $A$ snijden. Dus zijn $A,B,C,D$ drievoudige punten van $T$. Analoog zijn $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ drievoudige raakvlakken, omdat zij drie rechten $t$ bevatten.

De doorsnede van $T$ met $\alpha$ bestaat dus uit drie rechten en een kromme, welke in $A$ een drievoudig punt bezit. Daar elke straal $a$ de doorgangen van een paar transversalen $t,t'$ bevat, is de bedoelde kromme van den graad *vijf*. Dus is $T$ een *regelvlak van den achtsten graad.*

Door $A$ gaan acht raaklijnen van de kromme $\alpha^5$, welke $T$ met $\alpha$ gemeen heeft; hieruit volgt, dat $T$ *acht* stralen $t$ bevat, die ieder met den toegevoegden straal $t'$ samenvallen.

3 Laat men $t$ den waaier $(T,\tau)$ doorloopen, dan ontaardt het regelvlak $T$ in den waaier $(t)$ en een regelvlak $(t')^7$. *De transformatie $(t,t')$ zet dus een waaier om in een regelvlak van den zevenden graad.*

Op de rechte $\alpha\beta$ bepalen de projectief geworden waaiers $(a)$, $(b)$

twee projectieve puntenreeksen. Een van de dekpunten (coïncidenties) is het punt $\alpha\beta\tau$; door het andere gaat een rechte $t'$. Behalve door dezen straal $t'$ wordt $\alpha\beta$ nog gesneden door de drie in $\alpha$ en de drie in $\beta$ gelegen stralen $t'$.

Door $\alpha$ wordt $(t')^7$ gesneden volgens een kromme $\alpha^4$, met drievoudig punt $A$. Elk snijpunt van $\alpha^4$ met $\tau$ is doorgang van een rechte $t'$, die met de aan haar toegewezen rechte $t$ samenvalt. *De dubbelstralen der involutie* $(t,t')$ *vormen dus een stralencomplex van den vierden graad.*

4. Om dit langs een anderen weg te bevestigen, beschouwen wij het stelsel $\infty^3$ der quadratische regelvlakken $(bcd)$. Door drie willekeurig op de rechten $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta$ aangenomen punten gaat *een* regelvlak $(bcd)$; het stelsel is dus lineair (*complex*), en snijdt $\alpha$ in een complex van kegelsneden $\alpha^2$. De kegelsneden, welke een straal $a$ in een punt $R$ aanraken, vormen een bundel. De regelvlakken, waarvan zij de doorgangen zijn, vormen ook een bundel; de basiskromme $\varrho^4$ wordt in $R$ door $a$ aangeraakt. Elke door $R$ getrokken koorde $t$ van $\varrho^4$ ligt op een regelvlak $(bcd)$, dat den straal $AR$ in $R$ raakt; de beide transversalen van het viertal $a,b,c,d$ zijn dus in $t$ vereenigd. De kubische kegel, welke $\varrho^3$ uit $R$ projecteert, bestaat dus uit dubbelstralen $t \equiv t'$.

Maar het punt $R$ draagt nog een in $\alpha$ gelegen waaier van dubbelstralen. Om dit in te zien, bedenken wij, dat elke rechte $t$ van $\alpha$ tot een lijnenpaar van den complex $\{\alpha^2\}$ behoort. Zij $S$ haar snijpunt met de tweede rechte van dat lijnenpaar. Daar $AS$ de overeenkomstige hyperboloïde $(bcd)$ in $S$ aanraakt, vertegenwoordigt $t$ de beide transversalen van een viertal $a,b,c,d$, is dus dubbelstraal der involutie $(t,t')$.

Wij vinden dus opnieuw, dat de *dubbelstralen een complex van den vierden graad* vormen.

Tevens is gebleken, dat die complex *vier hoofdvlakken*, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, en analoog, *vier hoofdpunten*, $A,B,C,D$ bezit.

5. Beschouwen wij thans drie stralen $b,c,d$, die op een door $A$ getrokken rechte $t_A$ rusten. Elke rechte $t'$, welke $b,c,d$ snijdt, ontmoet in $\alpha$ een bepaalden straal $a$, is dus toegevoegd aan $t_A$. Elke straal $t_A$ is derhalve toegewezen aan $\infty^1$ stralen $t'$. Anders gezegd: *de stralen der ster* $[A]$ *zijn singulier.*

Door middel van de stralen $t_A$ zijn de waaiers $(b),(c),(d)$ in trilineaire verwantschap gebracht; immers twee willekeurig aangenomen stralen $b,c$ bepalen een transversaal $t_A$, en deze levert den overeenkomstigen straal $d$. In een willekeurigen waaier $(l)$ ontstaat hierdoor ook een trilineaire verwantschap. Elke der drie dekstralen (coïnci-

denties) is transversaal van drie overeenkomstige stralen $b,c,d$, dus rechte $t'$ van een regelvlak $(bcd)$, dat door $A$ gaat, en bijgevolg toegevoegd aan een straal $t_A$.

De stralen, welke in $(t,t')$ zijn toegewezen aan de stralen door $A$, vormen dus een *kubischen complex.*

Analoog is ook elke straal $t_\alpha$, in het vlak $\alpha$, toegevoegd aan een regelschaar; ook *de stralen van het veld* $[\alpha]$ *zijn singulier.*

6. Beschouwen wij nu een straal $t$ van de ster, die $D^* \equiv \alpha\beta\gamma$ tot centrum heeft; zij $d$ de straal van $(D,\delta)$, die door $t$ wordt gesneden. Aan $t$ worden nu alle stralen $t'$ van den waaier toegewezen, welke $D^*$ tot centrum heeft en in het vlak $D^*d$ ligt. Deze waaier bestaat dus uit *singuliere stralen,* die ieder zijn toegevoegd aan elken straal van dien waaier. De ster $[D^*]$ bevat $\infty^1$ singuliere waaiers: hun vlakken gaan door de rechte $DD^*$.

Op analoge wijs vindt men, dat de stralen in het vlak $\delta^* \equiv ABC$ singulier zijn, en $\infty^1$ waaiers van aan elkander toegewezen stralen vormen, waarvan de centra op de rechte $\delta\delta^*$ liggen.

De involutie $(t,t')$ bezit dus *acht sterren* en *acht velden van singuliere stralen.*

De straal $AB$ snijdt twee bepaalde stralen $c,d$, maar *alle* stralen $a,b$; hij is dus toegewezen aan alle transversalen van die stralen $c,d$. Analoog is de straal $\alpha\beta$ toegevoegd aan $\infty^2$ stralen $t'$. Er zijn dus *twaalf hoofdstralen,* die ieder zijn toegewezen aan alle stralen van een *bilineaire congruentie.*

7. De hyperboloïden $(bcd)$, welke door $A$ gaan, vormen blijkbaar een net. Door elken straal $a$ gaat dus een dezer $(bcd)$. Elke straal $a$ vormt dus met drie bepaalde stralen $b,c,d$ een hyperboloïdisch viertal. De transversalen $t$ van dat viertal vormen een regelschaar, waarvan elke twee rechten in de involutie $(t,t')$ aan elkander zijn toegewezen. Wij noemen zulk een regelschaar *singulier.*

De waaiers $(a),(b),(c),(d)$ kunnen dus zoodanig projectief worden gemaakt, dat elke vier overeenkomstige stralen richtlijnen van een singuliere regelschaar zijn.

Beschouwen wij nu de congruentie, welke de $\infty^1$ singuliere regelscharen omvat.

In een vlak bepalen de projectieve waaiers $(a),(b),(c)$ drie projectieve puntenreeksen; in $\varphi$ liggen dus drie rechten $t$, welke ieder vier overeenkomstige stralen $a,b,c,d$ snijden. Analoog draagt een willekeurig punt drie rechten der congruentie. *De singuliere regelscharen vormen dus een congruentie* (3,3).

De vlakkenbundels, welke de projectieve waaiers $(b),(c)$ uit $A$ projecteeren, brengen een quadratischen kegel $(t_A)^2$ voort; dus is $A$

een singulier punt der congruentie. Analoog omhullen de in $\alpha$ gelegen stralen der (3,3) een kegelsnede. De congruentie heeft dus *vier singuliere punten van den tweeden graad* $(A,B,C,D)$ en *vier singuliere vlakken van den tweeden graad* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$.

Zij bezit ook singuliere waaiers. Wanneer de rechten $a,b$ van een hyperboloïdisch viertal elkander snijden, ontmoeten ook $c$ en $d$ elkander. Op $\alpha\beta$ liggen blijkbaar twee punten $ab$ (coïncidenties van twee projectieve reeksen). Ieder van hen is toegevoegd aan een van de beide, op $\gamma\delta$ gelegen, punten $cd$. De transversalen $t$ van vier aldus verbonden stralen $a,b,c,d$ vormen nu twee waaiers: een daarvan ligt in het vlak $ab$ en heeft zijn centrum in $cd$, de andere ligt in het vlak $cd$ en heeft $ab$ tot centrum. De congruentie (3,3) heeft dus *twaalf singuliere waaiers* [1]).

8. Wanneer een waaier $(t)$ een straal der (3,3) bevat, dan ontaardt het regelvlak $(t')^7$ in de singuliere regelschaar, waartoe die straal $t$ behoort, en een regelvlak $(t')^5$, dat $A,B,C,D$ tot dubbelpunten en $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tot dubbelraakvlakken heeft.

Bevat $(t)$ twee stralen der (3,3), dan bestaat de meetkundige plaats van $t'$ uit twee singuliere regelscharen en een regelvlak $(t')^3$, dat met $\alpha$ een kegelsnede en een rechte $t'$ gemeen heeft. Zijn doorsnede met $\tau$ bestaat uit twee stralen $t' \equiv t$ (door $T$) en een derde rechte $e$, welke de enkelvoudige richtlijn van $(t')^3$ is; de dubbele richtlijn gaat door $T$.

9. Met de stralen $t$, die op een rechte $l$ rusten, komen overeen de stralen $t'$ van een *complex van den zevenden graad*. Immers, $l$ ontmoet zeven stralen van het regelvlak $(t)^7$, dat toegevoegd is aan een waaier $(t')$; deze bevat dus zeven stralen $t'$ van den complex, waarin de speciale lineaire complex met richtlijn $l$ wordt omgezet.

De complex $\{t'\}^7$ heeft hoofdpunten in de centra der acht sterren, hoofdvlakken in de acht velden van singuliere stralen der involutie $(t,t')$. Immers $l$ ontmoet b.v. een straal van elken singulieren waaier der ster $[A^*]$ en twee stralen van een door $A$ gelegde regelschaar $(bcd)$; in het laatste geval is de overeenkomstige straal $t_A$ dus een *dubbelstraal* van den complex $\{t'\}^7$.

---

1) De hier beschouwde (3,3) is een bijzonder geval van de congruentie, welke uit de transversalen van overeenkomstige stralen van *drie* projectieve waaiers is samengesteld. Ook deze, meer algemeene, (3,3) heeft 12 singuliere waaiers; daarentegen zijn er slechts 3 singuliere punten en 3 singuliere vlakken van den tweeden graad.

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: *„Een involutie in de stralenruimte, die door twee congruenties van* REYE *wordt bepaald".*

1. Een congruentie van REYE bestaat uit de $\infty^2$ kubische ruimtekrommen $\alpha^3$, welke door vijf punten $A_k$ kunnen gelegd worden. Zij is bilineair: immers, door een willekeurig punt gaat één kromme en een willekeurige rechte wordt door één kromme tweemaal gesneden [1]).

Zij $[\beta^3]$ een tweede congruentie van REYE, met de hoofdpunten $B_k$. Een $\alpha^3$ heeft met een $\beta^3$ *tien* bisecanten gemeen; de $\infty^4$ tientallen welke $[\alpha^3]$ met $[\beta^3]$ bepaalt, vullen de stralenruimte en vormen daarin een involutie $I^{10}$. Een willekeurig aangenomen rechte $t$ is bisecante van één $\alpha^3$ en van één $\beta^3$, is dus toegewezen aan *negen* rechten $t'$.

Wanneer $\alpha^3$ uit een kegelsnede $\alpha^2$ (in het vlak $\alpha$) en een haar in $A$ snijdende rechte $a$ is samengesteld, dan bestaat de groep der $I^{10}$, welke zij met een willekeurige $\beta^3$ bepaalt, uit de *drie* in $\alpha$ gelegen koorden van $\beta^3$ en uit *zeven* transversalen van $a$ en $\alpha^2$. Immers, de koorden van $\beta^3$, die op $a$ rusten, vormen een regelvlak van den vierden graad, dat met $\alpha^2$, behalve het punt $A$, zeven punten gemeen heeft.

Bestaat ook $\beta^3$ uit een $\beta^2$ en een $b$ (die haar in $B$ snijdt), dan wordt de overeenkomstige groep der $I^{10}$ gevormd door de snijlijn der vlakken $\alpha$, $\beta$, de beide in $\alpha$ gelegen rechten, die den doorgang van $b$ met de doorgangen van $\beta^2$ verbinden, de beide in $\beta$ gelegen rechten, die den doorgang van $a$ met de doorgangen van $\alpha^2$ verbinden en vijf transversalen van $a, b, \alpha^2, \beta^2$.

Wanneer $\alpha^3$ en $\beta^3$ een punt $S$ gemeen hebben, gaan vier der gemeenschappelijke koorden door $S$; zij zijn de gemeenschappelijke ribben der kegels, welke $\alpha^3$ en $\beta^3$ uit $S$ projecteeren.

2. Elke rechte $a_k$ door het hoofdpunt $A_k$ is *singulier* voor de involutie; immers zij is koorde van $\infty^1$ krommen $\alpha^3$, behoort dus tot $\infty^1$ groepen der $I^{10}$.

De congruentie $[\alpha^3]$ kan worden voortgebracht door twee bundels

[1]) De congruentie van REYE is uitvoerig behandeld in het 1e hoofdstuk van het proefschrift van J. DE VRIES (Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen, Utrecht 1917).

van quadratische kegels, die ieder een hoofdpunt tot top hebben. Neemt men b.v. als basisribben $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1A_4$, $A_1A_5$ en $A_2A_1$, $A_2A_3$, $A_2A_4$, $A_2A_5$, dan zullen de krommen $\alpha^3$, die een door $A_1$ getrokken rechte $a_1$ tot koorde hebben, alle gelegen zijn op den kegel $\alpha_1^2$, die door $a_1$ is bepaald.

In elk der beide snijpunten van $a_1$ met de kromme $\beta_1^3$, welke haar tot koorde heeft, komen drie stralen $t'$ samen, die, in twee verschillende groepen der $I^{10}$, aan $t \equiv a_1$ zijn toegewezen. Hieruit volgt:

*Elke singuliere straal door een der tien hoofdpunten* ($A_k$, $B_k$) *wordt door de transformatie* ($t$, $t'$) *omgezet in een regelvlak van den zesden graad.*

De kromme $\beta_1^3$, welke $a_1$ tot koorde heeft, zendt een koorde $a_2$ door $A_2$; deze ontmoet den kegel $\alpha_1^2$ in $A_2$ en in een punt $P$. Door $P$ gaat een $\alpha^3$, welke met $\beta_1^3$ de koorden $a_1$ en $a_2$ gemeen heeft; dus ligt $a_2$ op het bij $a_1$ behoorend regelvlak $\alpha_1^6$.

Het vlak $B_1a_1$ snijdt den kegel $\alpha_1^2$ nog volgens een ribbe $a'_1$. Op $a_1$ en $a'_1$ bepalen de krommen $\alpha^3$ van dien kegel twee projectieve puntenreeksen; door $B_1$ gaan dus twee koorden van op $\alpha_1^2$ gelegen krommen $\alpha^3$. De koorden der op $a_1$ rustende krommen $\alpha^3$ vormen dus een *quadratischen complex*.

De complexkegel van het punt $B_k$ heeft vier ribben gemeen met den kegel, welke $\beta_1^3$ uit $B_k$ projecteert. Het regelvlak $\alpha_1^6$ heeft dus *viervoudige* punten in de hoofdpunten $B_k$.

De rechte $a_{12} \equiv A_1 A_2$ is *hoofdstraal* der $I^{10}$. Immers, de kromme $\beta^3_{12}$, welke $a_{12}$ tot koorde heeft, bepaalt met elk der krommen $\alpha^3$ een groep der $I^{10}$; $a_{12}$ behoort dus tot $\infty^2$ groepen, en de aan $a_{12}$ toegewezen stralen $t'$ vormen een *congruentie*. De koorde $t'$ van $\beta^3_{12}$, welke door een willekeurig punt $P$ gaat, is tevens koorde van een $\alpha^3$, dus toegevoegd aan $t \equiv a_{12}$. In een vlak $\Phi$ liggen drie koorden $t'$ van $\beta^3_{12}$, die ieder tevens koorde van een kromme $\alpha^3$ zijn. De straal $t \equiv a_{12}$ is dus toegevoegd aan de stralen $t'$ van een congruentie (1,3).

3. De straal $A_1 B_1$ is gemeenschappelijke koorde van $\infty^2$ paren $\alpha^3, \beta^3$; hij is dus een *hoofdstraal* van $I^{10}$ en toegevoegd aan de stralen $t'$ van een *congruentie* $[t']$.

Elk punt $S$ van $A_1 B_1$ draagt één $\alpha^3$ en één $\beta^3$, dus drie stralen $t'$; de *schoofgraad* (orde) van $[t']$ is dus *drie*.

De krommen $\alpha^3$, die $A_1 B_1$ tot koorde hebben, liggen op een kegel $\alpha_1^2$ en bepalen een $I^3$ op de kegelsnede, welke $\alpha_1^2$ met een vlak $\Phi$ gemeen heeft. De in $\Phi$ gelegen koorden der $\alpha^3$ omhullen dus een andere kegelsnede. Analoog bevat $\Phi$ een kegelsnede, die omhuld wordt door de koorden der krommen $\beta^3$, waarvoor $A_1 B_1$ koorde is.

In $\Phi$ liggen dus vier aan $A_1 B_1$ toegevoegde koorden $t'$; d. w. z. de *veldgraad* (klasse) van $[t']$ is *vier*.

Door $A_1$ gaat een kromme $\beta_0^3$; de quadratische kegel, welke haar uit $A_1$ projecteert, wordt in drietallen ribben $t'$ gesneden door de projecteerende kegels der krommen $\alpha^3$, welke $A_1 B_1$ tot koorde hebben. Hieruit volgt, dat de congruentie $[t']$ in $A_1$ en $B_1$ *singuliere punten* van den *tweeden graad* heeft.

Elke $\beta^3$, die $A_1 B_1$ tot koorde heeft, zendt een koorde $a_2$ door $A_2$; deze snijdt den bij $A_1 B_1$ behoorenden kegel $a_1^2$, buiten $A_2$, in een punt $P$. De $\alpha^3$ door $P$ heeft met $\beta^3$ de koorde $a_2$ gemeen. Hieruit blijkt, dat $A_2$ een singulier punt der congruentie (3, 4) is.

Een vlak $\Phi$ door $A_2$ snijdt den bij $A_1 B_1$ behoorenden quadratischen kegel $b_1^2$ volgens een kegelsnede, waarop de krommen $\beta^3$ een involutie $I^3$ insnijden. Door $A^2$ gaan dus twee van de in $\Phi$ gelegen koorden der krommen $\beta^3$. Wij vinden dus, dat de hoofdpunten $A_k$ en $B_k$ $(k \neq 1)$ *singuliere punten* van den *tweeden graad* zijn voor de bij $A_1 B_1$ behoorende congruentie (3, 4).

De rechte $A_1 B_1$ is koorde van een uit $a_{12} \equiv A_1 A_2$ en een $\alpha^2$ samengestelde figuur $\alpha^3$. De kegel $b_1^2$, welke de krommen $\beta^3$ bevat, waarvoor $A_1 B_1$ koorde is, bepaalt in het vlak $\alpha_{345} \equiv A_3 A_4 A_5$ een involutie $I^3$, waarvan de groepen uit doorgangen der $\beta^3$ bestaan. De in $\alpha_{345}$ gelegen koorden $t'$ der congruentie $[t']$ omhullen dus een kegelsnede. Hieruit volgt, dat de vlakken $\alpha_{klm}$ en $\beta_{klm}$ singuliere vlakken van den tweeden graad zijn voor de congruentie (3, 4) behoorende bij $A_1 B_1$.

4. Elke straal $t$ in het vlak $\alpha_{345}$ is *singulier*, daar hij koorde is van alle kegelsneden $\alpha^2$, die in $\alpha_{345}$ liggen. Met de kromme $\beta^3$, welke $t$ tot koorde heeft, bepalen de $\infty^1$ krommen $\alpha^2$ blijkbaar $\infty^1$ groepen van stralen $t'$; elke groep bestaat uit de beide koorden van $\beta^3$, die nog in $\alpha_{345}$ liggen, en uit zeven stralen $t'$, welke op $a_{12}$ rusten. Alle deze zeventallen behooren tot het regelvlak $(t')^4$ der op $a_{12}$ rustende koorden van $\beta^3$, en vormen op dat regelvlak een $I^7$.

Aan het *stralenveld* $[t]$ in $\alpha_{345}$ zijn toegevoegd de stralen $\{t'\}$ van den *specialen lineairen complex*, die $a_{12}$ tot richtlijn heeft. Die stralen vormen $\alpha^3$ groepen van zeven stralen.

Elke rechte $t \equiv \alpha_{klm}, \beta_{pqr}$ is *hoofdstraal* der $I^{10}$; immers, zij is koorde van $\infty^1$ kegelsneden $\alpha^2$ en van $\infty^1$ kegelsneden $\beta^2$, dus toegewezen aan $\infty^2$ groepen van stralen $t'$.

Beschouwen wij b.v. de rechte $t \equiv \alpha_{345}, \beta_{345}$ als gemeenschappelijke koorde van twee bepaalde kegelsneden $\alpha^2$ en $\beta^2$. Van de overeenkomstige rechten $t'$ liggen twee in $\alpha_{345}$; zij verbinden den doorgang van $b_{12}$ met de beide doorgangen van $\beta^2$. Analoog liggen twee stralen

$t'$ in $\beta_{345}$; de overige vijf zijn transversalen van $a_{12}$ en $b_{12}$.

De stralen der bilineaire congruentie, welke $a_{12}$ en $b_{12}$ tot richtlijnen heeft, zijn dus te rangschikken in $\infty^2$ groepen van vijf rechten $t'$.

5. Wanneer de straal $t$ een waaier $(T, \tau)$ doorloopt, blijven de negen aan hem toegewezen stralen $t'$ op een regelvlak $(t')$, waarvan wij den graad kunnen bepalen door na te gaan hoeveel rechten $t'$ op $A_1 A_2$ rusten.

Beschouwen wij eerst de stralen $t'$, die $a_{12}$ buiten $A_1$ en $A_2$ snijden. Zulk een rechte $t'$ kan koorde zijn van een $\alpha^3$, die uit $a_{12}$ en een in $\alpha_{345}$ gelegen kegelsnede $\alpha^2$ bestaat. De straal van den waaier $(t)$, die op $a_{12}$ rust, ontmoet op de doorsnede der vlakken $\alpha_{345}$ en $\tau$ een $\alpha^2$, is dus koorde van een samengestelde $\alpha^3$. Deze bepaalt met de $\beta^3$, welke $t$ tot koorde heeft, *zes* rechten $t'$, die op $a_{12}$ rusten, maar tevens drie rechten $t'$, welke in het vlak $\alpha_{345}$ liggen.

Analoog bevat het vlak $\alpha_{125}$ *drie* rechten $t'$; deze zijn gemeenschappelijke koorden van een $\alpha^3$, die uit $a_{34}$ en een in $\alpha_{125}$ gelegen kegelsnede bestaat, en een kromme $\beta^3$, welke den op $a_{34}$ rustenden straal van den waaier $(T, \tau)$ tot koorde heeft.

Ook de vlakken $\alpha_{123}$ en $\alpha_{124}$ bevatten ieder *drie* rechten $t'$ van het aan $(t)$ toegevoegde regelvlak.

6. Om het aantal rechten $t'$ te bepalen, welke door $A_1$ gaan, beschouwen wij het oppervlak gevormd door de krommen $\alpha^3$, welke de stralen van den waaier $(T, \tau)$ tot koorden hebben.

Zij $d$ de doorgang van $\alpha_{125}$ op het vlak $\tau$, $D$ de doorgang van $a_{34}$. De straal van $(T, \tau)$, die op $a_{34}$ rust, bepaalt op $d$ een in $\alpha_{125}$ gelegen kegelsnede, die met $a_{34}$ een tot het bedoelde oppervlak $\Delta$ behoorende figuur $\alpha^3$ vormt. Hieruit volgt, dat $\Delta$ door de tien rechten $a_{kl}$ gaat en tien kegelsneden bevat, welke ieder in een der vlakken $\alpha_{pqr}$ liggen. De doorsnede van $\Delta$ met $\alpha_{123}$ bestaat dus uit de rechten $a_{12}, a_{13}, a_{23}$ en een kegelsnede door $A_1, A_2, A_3$. Derhalve is $\Delta$ een oppervlak van den vijfden graad [1]).

Een willekeurig vlak $\Phi$ wordt door de krommen $\alpha^3$ gesneden in de drietallen $X_1, X_2, X_3$ van een involutie $(X)^3$. Daar men door elke twee krommen $\alpha^3$ een quadratisch oppervlak kan leggen, kunnen elke twee groepen der bedoelde involutie door een kegelsnede worden verbonden. Een op $X_1 X_2$ gelegen punt $Y_3$ bepaalt dus

---

[1]) Blijkbaar heeft $\Delta^5$ in elk der vijf punten $A_k$ een drievoudig punt. De meetkundige plaats der paren van punten, waarin elke $\alpha^3$ van $\Delta^5$ op den overeenkomstigen straal $t$ rust, is een kromme $c^4$, welke in $T$ een dubbelpunt heeft. Dus wordt $\Delta^5$ door $\tau$ nog volgens een rechte $l$ gesneden. Hieruit volgt, dat $\Delta^5$ tevens de meetkundige plaats is van de krommen $\alpha^3$, welke de rechte $l$ ontmoeten

een groep met twee punten $Y_1$, $Y_2$, die met $X_3$ collineair zijn. Laat men $Y_3$ de rechte $x_3 \equiv X_1 X_2$ doorloopen, dan draait de rechte $y_3 \equiv Y_1 Y_2$ dus om het punt $X_3$. De drietallen der involutie bepalen bijgevolg pooldriehoeken t. o. v. een kegelsnede [1]).

7. De waaier $(T, \tau)$ bepaalt in de congruenties $[\alpha^3]$ en $[\beta^3]$ twee oppervlakken $\Delta_A$ en $\Delta_B$ (§ 6) en voegt aan elke kromme $\alpha^3$ van $\Delta_A$ een kromme $\beta^3$ van $\Delta_B$ toe.

Beschouwen wij nu den kegel, die gevormd wordt door de koorden welke men uit $A_1$ kan trekken naar de op $\Delta_B$ gelegen krommen $\beta^3$.

Een vlak $\Phi$ door $A_1$ snijdt $\Delta_B$ volgens een kromme $c^5$, welke $\infty^1$ groepen der involutie $(X)^3$ bevat. Als het punt $X_1$ de kromme $c^5$ doorloopt, omhult de rechte $X_2 X_3$ een kromme van de vijfde klasse, waarvan elke raaklijn koorde is van een op $\Delta_B$ gelegen kromme $\beta^3$. Door $A_1$ gaan dus vijf van die koorden; bijgevolg vormen de in $A_1$ samenkomende koorden der op $\Delta_B$ gelegen krommen $\beta^3$ een kegel $K^5$.

Beschouwen wij nu een straal $t_\alpha$ van $(T, \tau)$ als koorde van een $\alpha^3$. De quadratische kegel, die deze kromme uit $A_1$ projecteert, heeft met $K^5$ tien ribben $a_1$ gemeen. Elk dezer stralen $a_1$ is koorde van een $\beta^3$, welke tevens een koorde $t_\beta$ in den waaier $(t)$ bezit; aan elken straal $t_\alpha$ zijn dus 10 stralen $t_\beta$ toegevoegd.

Een straal $t_\beta$ is koorde van een bepaalde kromme $\beta^3$; deze zendt een koorde $a_1$ door $A_1$. De krommen $\alpha^3$, welke $a_1$ tot koorde hebben, vormen een kegel $a_1{}^2$; deze snijdt $\tau$ in een kegelsnede, waarop de doorgangen der krommen $\alpha^3$ een involutie $I^3$ bepalen. De drietallen van koorden, welke die doorgangen twee aan twee verbinden, omhullen een tweede kegelsnede; twee van die koorden gaan dus door $T$. Met een straal $t_\beta$ komen bijgevolg 2 stralen $t_\alpha$ overeen.

Blijkbaar bevat $(T, \tau)$ twaalf stralen $t_\alpha \equiv t_\beta$. Aan elk dier stralen voegt de involutie $I^{10}$ een straal $a_1$ toe; op het regelvlak $(t')$ behoorend bij den waaier $(t)$ is $A_1$ dus een twaalfvoudig punt. De snijpunten van het regelvlak $(t')$ met de rechte $a_{12}$ liggen dus op 12 rechten $a_1$, 12 rechten $a_2$, 3 rechten van $\alpha_{123}$, 3 van $\alpha_{124}$, 3 van $\alpha_{125}$ en op 6 rechten, die in geen dezer drie vlakken zijn gelegen en ook niet door $A_1$ of $A_2$ gaan.

*Een waaier wordt door de transformatie $(t, t')$ omgezet in een regelvlak van den graad* 39.

Dit regelvlak heeft 10 *twaalfvoudige punten* $(A_k, B_k)$.

---

[1]) Deze is de meetkundige plaats der punten, waarin $\Phi$ door krommen $\alpha^3$ wordt aangeraakt.

De oppervlakken $\Delta_A$ en $\Delta_B$ hebben mèt het vlak $\tau$ ieder een kromme van den vierden graad gemeen. Deze hebben ieder in $T$ een dubbelpunt, snijden elkaar dus buitendien nog in 12 punten $S$. Door elk dier punten gaan 3 rechten $t'$ van het regelvlak $(t')$. Dus heeft $(t')^{39}$ in het vlak $\tau$ *twaalf drievoudige punten.*

De 20 vlakken $\alpha_{klm}$ en $\beta_{klm}$ zijn *drievoudige raakvlakken,* want ieder van hen bevat drie stralen $t'$.

**Wiskunde**. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan: „*Over de berekening van* $\zeta(2n+1)$".

Door middel van eene karakteristieke en zeer algemeene methode vervormde MARKOFF [1]) de zeer langzaam convergeerende reeksen $\sum\limits_1^\infty n^{-2}$ en $\sum\limits_1^\infty n^{-3}$ in andere reeksen, die sneller convergeeren, en J. G. VAN DER CORPUT [2]) beschreef eene bijzondere wijze van transformatie, die toepasselijk is op de reeksen $\sum\limits_1^\infty n^{-(2h+1)}$ voor grootere waarden van $h$. Ik stel mij voor opnieuw de transformatie van deze reeksen te behandelen en eenige uitkomsten toe te voegen aan de vroegere. Ten einde de vermeerdering in convergentie van de vervormde reeksen te beoordeelen, zal ik voor die vervormingen de verhouding van D'ALEMBERT beschouwen, die ik zal noemen haar index. Voor de reeksen van MARKOFF was die index $\frac{1}{27}$, en ik zal laten zien, dat een lagere index kan worden bereikt.

In de eerste plaats grond ik mijne afleidingen op de eigenschappen van de functie

$$\varphi_k(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{n^k},$$

waar $k$ aanwijst een positief geheel getal. Om de functie $\varphi_k(z)$ eenwaardig te maken, is het geschikt om de rechte lijn $(+1, +\infty)$ in het complexe $z$-vlak als eene snede te beschouwen, en met deze afspraak gelden de volgende eigenschappen van $\varphi_2(z)$, die in hoofdzaak door ABEL zijn afgeleid:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_2(z) + \varphi_2(1-z) = -\log z \log(1-z) + \zeta(2), \\
&\varphi_2(z) + \varphi_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\tfrac{1}{2}\log^2 z + \pi i \log z + 2\zeta(2) \\
&\varphi_2(z) - \varphi_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = \tfrac{1}{2}\log^2 z - \log z \log(1-z) + \zeta(2) \\
&\varphi_2(z) + \varphi_2(-z) = \tfrac{1}{2}\varphi_2(z^2)
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Blijkbaar heeft men in deze formule $\log z$ en $\log(1-z)$ bestaanbaar te nemen, als $z$ zelf bestaanbaar is en tusschen 0 en 1 ligt.

---

[1]) Comptes rendus, t. 109, p. 934.

[2]) Versl. Kon. Akad. Amsterdam, afd. Natk., XXIV, p. 1463.

Daar men in het algemeen heeft

$$\frac{d}{dz}\varphi_{k+1}(u) = \varphi_k(u)\frac{d\log u}{dz},$$

is het mogelijk om bovenstaande betrekkingen ten deele uit te breiden tot de functie $\varphi_3(z)$, en inderdaad er volgt

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_3(z) - \varphi_3\left(\frac{1}{z}\right) = -\tfrac{1}{6}\log^3 z + \tfrac{1}{2}\pi i \log^2 z + 2\zeta(2)\log z,\\
&\varphi_3\left(\frac{z-1}{z}\right) + \varphi_3(1-z) + \varphi_3(z) = \tfrac{1}{6}\log^3 z - \tfrac{1}{2}\log^2 z \log(1-z) + \\
&\qquad\qquad + \zeta(2)\log z + \zeta(3),\\
&\varphi_3(z) + \varphi_3(-z) = \tfrac{1}{4}\varphi_3(z^2).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Voor $k > 3$ bestaat er niet langer eene lineaire betrekking tusschen $\varphi_k(z)$, $\varphi_k(1-z)$ en $\varphi_k\left(\frac{z-1}{z}\right)$, er blijft alleen behalve de betrekking

$$\varphi_k(z) + \varphi_k(-z) = \frac{1}{2^{k-1}}\varphi_k(z^2)$$

eene vergelijking van den vorm

$$\varphi_k(z) + (-1)^k \varphi^k\left(\frac{1}{z}\right) = -(2\pi i)^k g_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right),$$

waar $g_k(u)$ beteekent de afgeleide van den veelterm van Bernoulli $f_k(u)$.

Eene andere ontwikkeling geldig voor alle positieve en geheele waarden van $k$ is de volgende:

$$\varphi_k(e^{-y}) = \frac{(-y)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \log y\right) + \\
+ \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \frac{(-y)^n}{n!}\zeta(k-n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hier moet de rechte lijn $(0, -\infty)$ beschouwd worden als eene snede in het complexe $y$-vlak en $\log y$ is bestaanbaar voor positieve $y$. Het accent in $\Sigma'$ beteekent, dat de term met het rangnummer $n = k-1$ moet worden uitgesloten. Wat betreft de getallenwaarden, die de $\zeta$-functie aanneemt voor de waarde nul en voor negatieve geheele waarden van het argument, heeft men

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \;,\; \zeta(-2h) = 0 \;,\; \zeta(1-2h) = (-1)^h \frac{B_h}{2h}.$$

Daarom zullen van een bepaald rangnummer af de coëfficiënten in de ontwikkeling van het rechterlid van (3) uit te drukken zijn door de getallen van Bernoulli en de convergentiestraal is blijkbaar

$2\pi$, zooals te verwachten was, daar de vergelijking (3) bewezen kan worden door herhaalde integratie van beide leden der vergelijking

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-ny}}{n} = -\log y + \tfrac{1}{2} y + \sum_{n-1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n B_n}{2n\,!} \cdot \frac{y^{2n}}{2n} \cdot (0 < y < 2\pi).$$

Als men substitueert $z = \frac{1}{2}$ in de formules (1) en (2), vindt men

$$\varphi_2(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}\log^2 2 + \tfrac{1}{2}\zeta(2),$$
$$\varphi_3(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{6}\log^3 2 - \tfrac{1}{2}\zeta(2)\log 2 + \tfrac{7}{8}\zeta(3),$$

en als men in aanmerking neemt dat

$$\log\log 2 = -\tfrac{1}{2}\log 2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n B_n}{2n\,!} \cdot \frac{(\log 2)_{2n}}{2n},$$

leidt men af uit (3) door $y = \log 2$ te nemen

$$\zeta(2) = \tfrac{1}{2}\log^2 2 + 2\left\{ \frac{\log 2}{1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n\,!} \; \frac{(\log 2)^{2n+1}}{2n+1} \right\},$$

$$\zeta(3) = \tfrac{2}{3}\log^3 2 + 4\left\{ \frac{\log^2 2}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n\,!} \cdot \frac{(\log 2)^{2n+2}}{2n+2} \right\}.$$

De index van deze ontwikkelingen is ongeveer $\frac{1}{82}$ en de fout voortvloeiende uit het verwaarloozen van alle termen na den tweeden heeft geen invloed op de vijfde decimaal.

Het is mogelijk om deze ontwikkelingen in verband te brengen met de vergelijking

$$\frac{u}{2} \operatorname{Coth} \frac{u}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n\,!} u^{2n}$$

en op deze wijze bepaalde integralen af te leiden, die $\zeta(2)$ en $\zeta(3)$ voorstellen. Zoo komt men vooreerst tot de bekende formule

$$\zeta(2) = 2\int_0^1 \frac{\log(1+\xi)}{\xi} d\xi,$$

maar men verkrijgt ook de minder bekende uitkomst

$$\zeta(3) = 4\int_0^1 \frac{\log^2(1+\xi)}{\xi} d\xi = 8\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n-1}\right).$$

Verder kan men bewijzen de uitkomst van Euler

$$\zeta(3) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2(1-\xi)}{\xi} d\xi = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right).$$

en eindelijk kan men aantoonen, dat

$$\zeta(3) = -\tfrac{8}{5}\int_0^1 \frac{\log(1-\xi)\log(1+\xi)}{\xi}\,d\xi =$$

$$= \tfrac{4}{5}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

Geheel andere ontwikkelingen van de grootheden $\zeta(2)$ en $\zeta(3)$ worden verkregen door in (1) en in (2) te stellen

$$z = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = a.$$

Daar men heeft

$$1 - a = a^2 \text{ en } \frac{a-1}{a} = -a$$

verkrijgt men dadelijk uit (1)

$$\varphi_2(a) = -\log^2 a + \tfrac{3}{5}\zeta(2)$$
$$\varphi_2(a^2) = -\log^2 a + \tfrac{2}{5}\zeta(2)$$

en uit (2)

$$\varphi_3(a^2) = -\tfrac{2}{3}\log^3 a + \tfrac{4}{5}\zeta(2)\log a + \tfrac{4}{5}\zeta(3).$$

Als men nu schrijft $-2\log a = \alpha$, heeft men

$$\log \alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n B_n}{2n!}\cdot\frac{\alpha^{2n}}{2n},$$

en als men substitueert $y = \dfrac{\alpha}{2}$ en ook $y = \alpha$ in (3) ten einde ontwikkelingen van $\varphi_2(a)$, $\varphi_2(a^2)$ en $\varphi_3(a^2)$ te verkrijgen, kan men besluiten tot

$$\zeta(2) = \tfrac{5}{2}\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tfrac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n!}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right\},$$

$$\zeta(2) = \tfrac{5}{3}\left\{\alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n!}\cdot\frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1}\right\},$$

$$\zeta(3) = \tfrac{5}{2}\left\{\frac{\alpha^2}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n!}\cdot\frac{\alpha^{2n+2}}{2n+2}\right\}.$$

De index van de eerste reeks, die $\zeta(2)$ voorstelt, is ongeveer $\frac{1}{170}$, voor de twee andere reeksen is hij kleiner dan $\frac{1}{42}$.

Opnieuw is het mogelijk om de reeksen om te zetten in bepaalde integralen. Uit de machtreeksen in $\alpha$ kan men vinden

$$\zeta(2) = \tfrac{10}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\xi} \log(\xi + \sqrt{1+\xi^2}),$$

$$\zeta(3) = 10\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\xi} \log^2(\xi + \sqrt{1+\xi^2}).$$

Wenscht men ontwikkelingen van $\zeta(k)$ voor $k > 3$, dan is op eene andere wijze te handelen. Ik zal gebruik maken van de algemeene identiteit

$$\varphi_s(z) + \varphi_s(z\theta) + \varphi_s(z\theta^2) + \ldots + \varphi_s(z\theta^{p-1}) = \frac{1}{p^{s-1}} \varphi_s(z^p) \quad . \quad (4)$$

waarin $p$ is een geheel getal en $\theta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$

Als men de reeks

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{mn\pi}{3}}{n^s}$$

aanduidt door $U_m$, verkrijgt men door in (4) te substitueeren

$$p = 3, \; z = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$p = 2, \; z = 1$$

achtereenvolgens

$$2U_1 + U_3 = \frac{1}{3^{s-1}} U_3$$

$$U_0 + U_3 = \frac{1}{2^{s-1}} U_0$$

en dientengevolge

$$U_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^s} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{3^{s-1}}\right)\zeta(s).$$

Uit vergelijking (3) leidt men af door $k = 2h + 1, y = iv$ te nemen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nv}{n^{2h+1}} = \frac{(-1)^h v^{2h}}{2h\,!}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2h} - \log v\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' \frac{(-1)^n v^{2n}}{2n\,!} \zeta(2h + 1 - 2n) \quad . \quad . \quad (5)$$

zoodat, als men schrijft

$$1 - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2h}}\right)\left(1 - \frac{1}{3^{2h}}\right) = A_{2h+1},$$

men kan besluiten tot

$$A_{2h\cdot 1}\,\zeta(2h+1)=\frac{(-1)^{h-1}v^{2h}}{2h\,!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2h}-\log v\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{n=h-1}\frac{(-1)^{n-1}\,v^{2n}}{2n\,!}\zeta(2h+1-n)+(-1)^h\;{}_1\!\!\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_n}{(2n+2h)\,!}\cdot\frac{v^{2n+2h}}{2n},\;(6)$$

waar $v$ nu beteekent $\frac{\pi}{3}$.

Door middel van deze vergelijking heeft men $\zeta(2h+1)$ uitgedrukt in $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, . . ., $\zeta(2h-1)$ en als men achtereenvolgens stelt $h=1,2,3\ldots$, verkrijgt men $\zeta(3$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, . . . uitgedrukt door eene lineaire combinatie van ontwikkelingen, elk met den index $\frac{1}{36}$ [1]).

Eene kleine vervorming van (6) is mogelijk. Als men gebruik maakt van

$$\log v=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{Bn}{2n\,!}\cdot\frac{v^{2n}}{2\,n},$$

en als men eenige andere herleidingen uitvoert, blijkt het, dat (6) den vorm kan aannemen

$$A_{2h+1}\,\zeta(2h+1)=\left(1-\frac{A_{2h-1}}{h(2h-1)}\right)\zeta(2h-1)\,.\,\frac{v^2}{2}+$$

$$+\sum_{n=2}^{n=h-1}\frac{(h-n)(2h+2n-1)}{h\,(2h-1)}\cdot\frac{(-1)^{n-1}\,v^{2n}}{2n\,!}\zeta(2h+1-n)+$$

$$+\frac{(-1)^{h-1}v^{2h}}{2h\,(2h-1)}\left\{\frac{4h-1}{2h\,!}-\sum_{n-1}^{n=\infty}\frac{B_n}{(2n+2h)\,!}\,.\,(2n+4h-1)v^{2n}\right\}.$$

$$\left(v=\frac{\pi}{3}\right).$$

Als men stelt $h=1$ en $h=2$ zal men zien, dat er komt

$$\zeta(3)=\tfrac{3}{4}\left\{\frac{3}{2\,!}v^2-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_n}{(2n+2)\,!}(2n+3)v^{2n+2}\right\},$$

$$\zeta(5)=\tfrac{9}{58}\left\{\frac{137}{4\,!}v^4-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_n}{(2n+4)\,!}\left[4(2n+3)^2(2n+4)-(2n+7)\right]v^{2n+4}\right\}.$$

---

[1]) Soortgelijke uitkomsten werden door den heer VAN DER CORPUT in het aangehaalde opstel afgeleid. Intusschen werd in de fundamenteele ontwikkeling van de grootheid $I(n,a)$ op p. 1464 door eene kleine vergissing de factor $2^{2k}$ in den algemeenen term weggelaten daarom moet in alle volgende ontwikkelingen de algemeene term met $2^{2k}$ vermenigvuldigd worden, en is de index van de reeksen op p. 1470 gelijk aan $\frac{1}{36}$ en niet gelijk aan $\frac{1}{144}$.

Ik wil nu gaan aantoonen, dat voor elk der grootheden $\zeta(2h+1)$ er eene lineaire combinatie van ontwikkelingen bestaat met een index kleiner dan $\frac{1}{36}$. Tot dit doel gebruik ik opnieuw de identiteit (4) en schrijvende

$$w = \frac{\pi}{15} \quad , \quad U_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos mnw}{n^s}$$

maak ik in (4) de substituties

$$p = 2 \quad , \quad z = e^{iw} \quad \text{en} \quad z = e^{3iw},$$
$$p = 3 \quad , \quad z = e^{4iw},$$
$$p = 5 \quad , \quad z = 1.$$

Deze substituties geven de vier vergelijkingen

$$U_1 + U_{14} = \frac{1}{2^{s-1}} U_2,$$

$$U_3 + U_{12} = \frac{1}{2^{s-1}} U_6,$$

$$U_4 + U_6 + U_{14} = \frac{1}{3^{s-1}} U_{12},$$

$$U_0 + 2U_6 + 2U_{12} = \frac{1}{5^{s-1}} U_0.$$

en als men hieruit $U_6$, $U_{12}$, $U_{14}$ elimineert, verkrijgt men

$$\left(1 - \frac{1}{5^{s-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{6^{s-1}}\right)U_0 + 2\left(1 + \frac{1}{2^{s-1}}\right)U_1 - \frac{1}{2^{s-2}}\left(1 + \frac{1}{2^{s-1}}\right)U_2 -$$
$$- 2\left(1 + \frac{1}{3^{s-1}}\right) U_3 - 2\left(1 + \frac{1}{2^{s-1}}\right) U_4 = 0.$$

Als men nu neemt $s = 2h + 1$, kan men $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ ontwikkelen door toepassing van (5), en men verkrijgt $U_0 = \zeta(2h+1)$ uitgedrukt door $\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2h-1)$ en door vier machtreeksen in $w$, die in volgorde den index gelijk hebben aan $\frac{1}{900}, \frac{1}{225}, \frac{1}{100}, \frac{4}{225}$. Daar de formules wat ingewikkeld worden, beschouw ik alleen het eenvoudigste geval $h = 1$.

Men heeft dan

$$336\,\zeta(3) = -900\,U_1 + 225\,U_2 + 800\,U_3 + 900\,U_4$$

en dan verder

$$689\,\zeta(3) = 450w^2(36 - 24\log w - 33\log 2 - 8\log 3) - 900\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(2n+2)!}\cdot\frac{w^{2n+2}}{2n} +$$
$$+ 225\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2w)^{2n+2}}{2n} + 800\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(2n+2)!}\cdot\frac{(3w)^{2n+2}}{2n} +$$
$$+ 900\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(2n+2)!}\cdot\frac{(4w)^{2n+2}}{2n}.$$

Ik zal eindigen met de opmerking, dat de berekening van de som der reeks

$$\eta(2h) = \frac{1}{1^{2h}} - \frac{1}{3^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{7^{2h}} + \cdots$$

langs overeenkomstigen weg kan geschieden.

De vergelijking (3) geeft, als men neemt $k = 2h,\ y = iu$

$$\sum_{n=1}^{u=\infty} \frac{\sin nw}{n^{2h}} = \frac{(-1)^{h-1}\, u^{2h-1}}{(2h-1)\,!} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2h-1} - \log u \right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty}{}' \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)\,!} \zeta(2h \quad 1-2n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en het is mogelijk om $\eta(2h)$ uit te drukken door middel van reeksen van den vorm $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nw}{n^{2h}}$.

Inderdaad, als men stelt

$$V_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{mnv}{2}}{n^s} \qquad \text{en} \qquad v = \frac{\pi}{3}$$

heeft men door in (4) te substitueeren

$$p = 2 \quad , \quad z = e^{\frac{iv}{2}},$$

$$p = 3 \quad , \quad z = e^{\frac{iv}{2}},$$

achtereenvolgens

$$V_1 - V_5 = \frac{1}{2^{s-1}} V_2,$$

$$V_1 + V_5 - V_3 = \frac{1}{3^{s-1}} V_3$$

en derhalve

$$V_3 \left( 1 + \frac{1}{3^{s-1}} \right) = 2\, V_1 - \frac{1}{2^{s-1}} V_2.$$

Neemt men nu $s = 2h$, dan is $V_3 = \eta(2h)$, en als men $V_1$ en $V_2$ door middel van vergelijking (7) uitdrukt, verkrijgt men eene ontwikkeling voor $\eta(2h)$. In het eenvoudigste geval $h = 1$, vind ik op deze wijze

$$\eta(2) = \tfrac{3}{8}\, v \left( 1 + \log \frac{4}{v} \right) + \tfrac{3}{8} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(2n+1)\,!} \cdot \frac{v^{2n+1}}{2n} \left( \frac{1}{2^{2n-1}} - 1 \right).$$

$$\left( v = \frac{\pi}{3} \right)$$

Alweder is de index van de reeks $\frac{1}{36}$ en de waarde van $\eta(2)$ wordt in vijf decimalen gevonden, als men alleen de twee eerste termen van de ontwikkeling in rekening brengt.

---

**Dierkunde.** — De Heer VAN BEMMELEN biedt eene mededeeling aan: *„Androgene oorsprong der Hoorns en Geweien"*.

In WEBER's voortreffelijk werk „die Säugetiere" wordt in zake den oorsprong der kopbewapening van vele Hoefdieren de meening uitgesproken, dat hoorns en geweien aanvankelijk bij beide sexen ontstaan zijn als verdedigingswapenen tegen vijanden, maar vervolgens meer en meer zijn gaan dienen als aanvalswapenen der mannetjes in hun strijd om de wijfjes, en in verband daarmede hetzij een uitsluitend attribuut van de mannelijke sexe zijn geworden, of ten minste zich bij deze veel sterker ontwikkeld hebben dan bij het vrouwelijk geslacht.

In dit opzicht is WEBER dus blijkbaar de meening toegedaan, die TANDLER en GROSS hebben uitgesproken in hun verhandeling: Die biologischen Grundlagen der sekundären Geschlechtscharaktere, in de woorden: „Alle secundaire Geslachtskenmerken waren oorspronkelijk species-kenmerken, dus eigenschappen, die voor een bepaalde soort, ja vaak voor een orde van Vertebrata karakteristiek waren, zonder dat zij primair met de genitaalspheer in samenhang stonden".

In hun toelichting dezer stelling merken zij op „dat bij de morphologie der Geslachtskenmerken tot nu toe te weinig rekening is gehouden, hoeveel daarvan niet voor de sexe, maar de species eigendommelijk is", en halen als voorbeeld juist de hoorns der Cavicornia aan, „die op zichzelf geen geslachtskenmerk vormen, maar enkel in hun vorm, die bij mannetjes en wijfjes verschillend is, bij mannelijke en vrouwelijke castraten daarentegen gelijk".

„Evenzoo is het gesteld met de beharing van den mensch. Voor een eminent secundair geslachtskenmerk van den man, nl. de baard, konden wij aantoonen, dat zij ook bij oude kastraten wordt aangetroffen, en bij deze in vorm en uitgebreidheid op die van oude vrouwen gelijkt".

Volgens TANDLER en GROSS moet men dus niet vragen: „Is een orgaan een secundair geslachtskenmerk", maar: „Hoeveel in de ontwikkeling van een orgaan is soorts-karakter, hoeveel sexe-karakter".

Schoon men dit laatste zou kunnen toegeven, meen ik toch tegenover deze meening een andere opvatting te mogen stellen, te weten dat de loop der ontwikkeling juist omgekeerd is geweest, zoodat de kopbewapening als aanvalswapen der mannetjes bij hunne tweegevechten

is ontstaan, en daarna bij een gedeelte der soorten in min of meer verzwakten vorm op de wijfjes is overgegaan (volgens den welbekenden regel der monosexueele overerving), zoodat zij nu ook door beide sexen als verdedigingswapen kon gebruikt worden.

Voor deze laatste opvatting schijnt mij het volgende te pleiten:

1°. Bij de Herten ontbreekt het gewei bij de wijfjes van alle soorten behalve de Rendieren, en juist bij deze laat zich een nuttige aanwending ervan, die niet met het geslachtsleven in verband staat, in beide sexen denken, nl. het opwoelen van voedsel uit de sneeuw, al wordt dit door sommige deskundigen (bv. Brehm) tegengesproken.

2°. Bij de Antilopen vindt men naast genera waarin beide sexen gehoornd zijn, andere, waar alleen het mannetje hoorns bezit, en in de meerderheid der gevallen zijn de hoorns der wijfjes kleiner dan die der mannetjes, en neigen deze laatste, evenals bij de Herten, tot reuzengroei over het doelmatige heen, of tot allerlei zonderlinge gedaanten (bv. schroefsgewijze winding) die met de eischen van practisch gebruik in lijnrechte tegenspraak schijnen.

3°. Hetzelfde is het geval bij de Runderen, Schapen en Geiten. Men denke aan de vierhoornige geit, en aan de excessieve ontwikkeling van karbouwen- en andere buffelhoorns.

4°. Zelfs bij de Giraffen, waar de rozenstokken met hun klein os cornu misschien mogen beschouwd worden als overblijfselen van een voorheen hooger ontwikkeld gewei (blijkens de vergelijking met Ukapia en Sivatherium), zijn de bedoelde hoornstompjes en de neusknobbel bij de mannetjes veel hooger en forscher dan bij de wijfjes. Bij Ukapia daarentegen ontbreken de hoorns aanvankelijk in de vrouwelijke sexe, en hetzelfde was wellicht het geval gedurende het geheele leven bij de wijfjes van de Sivatheridae en bij Hellado- en Samotherium.

5°. De oorspronkelijkste vormen der Ruminantia: Tragulidae en Camelidae, zijn ongehoornd, gelijk ook de oudste en oorspronkelijkste uitgestorven Artiodactyla (Pantolestidae, Anoplotheridae), en alle Non-Ruminantia onder hen. Ook de oudste fossiele herten bezaten nog geen geweien, evenmin als thans nog de Muskusherten, al heeft ook reeds het miocene hert Palaeomeryx volgens Rütimeyer en Schlosser een gewei. Dit wijst er misschien op dat de neiging tot geweivorming zich in dien stam der Cervidae zelfstandig heeft ontwikkeld, maar zou toch ook zóó kunnen opgevat worden, dat een veel oudere erfelijke aanleg voor het voortbrengen van beenuitgroeiïngen op het voorhoofd van het mannetje, die in den stam der Artiodactyla wel algemeen aanwezig was, maar sluimerde, bij de Herten opnieuw was ontwaakt, en van toen af steeds in potentie en samengesteld-

heid was toegenomen. Voor deze opvatting pleit m.i., dat ook bij de Varkens de neiging tot vorming van beenprotuberansen op de rugzijde van den schedel blijkbaar aanwezig is, en zich in het mannelijk geslacht sterker manifesteert dan in het vrouwelijke, getuige den gedrochtelijken schedel bij den beer van het Afrikaansche Knobbelzwijn.

6°. Ook onder de Protoceratinae was alleen bij het mannetje het schedeldak met een geheele reeks gepaarde beenuitsteeksels bezet.

7°. Bij de Dinoceratidae bezaten (volgens MARSH) wel is waar beide geslachten de beenderprotuberansen (en daarnevens de groote hoektanden), maar waren deze wapens bij de mannetjes toch sterker ontwikkeld dan bij de wijfjes. Mogelijkerwijze is dus de neiging tot het voortbrengen van schedelwoekeringen nog ouder dan de scheiding tusschen Artio- en Perissodactyla.

8°. De jaarlijksche gewei-afwerping en regeneratie bij de Cervinae staat blijkbaar in verband met de bronst. Hetzelfde schijnt het geval bij Antilocapra.

9°. De bovengenoemde zonderling gevormde en vaak bovenmatig ontwikkelde beenuitsteeksels der Giraffidae, Suidae, Protoceratinae en Dinoceratidae kan men evenmin als de geweien der meeste Herten en de hoorns van vele Antilopen, Runderen, Schapen en Geiten, als doelmatige wapentuigen beschouwen. Daarentegen dragen zij in hooge mate het karakter van sexueele attributen, in hun overdrevenheid, ondoelmatigheid, grillige samengesteldheid, in-'t-oogloopendheid en veranderlijkheid.

10°. Het gewei en de hoorns zijn blijkbaar bij de oorspronkelijke leden van den groep der Ruminantia op een betrekkelijk laat stadium opgetreden, al moge dit verder in den geologischen tijd teruggeschoven worden, dan meestal wordt aangenomen. In allen gevalle is het kenmerk in zijn optreden of wederverschijnen jonger dan de overige eigenaardigheden der Artiodactyla.

Bij het raadplegen der literatuur bleek mij, dat ik in de opvatting der geweien en hoorns als sexueele attributen tot een overeenkomstig besluit was gekomen, als door den welbekenden populairen schrijver over vraagstukken der descendentieleer in de Zoölogie, BÖLSCHE, ontwikkeld wordt in zijn „Thierbuch, IV, der Hirsch", maar dat omtrent de eerste oorzaak der geweivorming onze meeningen uiteen gaan. BÖLSCHE toch ziet in de excrescenties op het schedeldak van zoovele Ruminantia niet anders dan oorspronkelijk zuiver ornamentale attributen, en schrijft hun ontstaan toe aan een periodieke overmaat van groei-energie, die tot uiting zou komen in exostosen der beenderen van het schedeldak, het hevigst en ten slotte uitsluitend

in de voorhoofdsbeenderen. De periodiciteit dezer groei-exuberantie zou in verband staan met de bronstperiode der mannetjes, maar de aanwezigheid van overtollige groeikracht zou moeten toegeschreven worden aan den achteruitgang van een ander differentieel kenmerk der mannelijke sexe, n.l. van de sabelvormige slagtanden, gelijk die bij de Suidae, Tragulidae en bij de geweilooze Muskusherten nog wel worden aangetroffen. Het sterkst drukt BÖLSCHE deze overtuiging uit in de woorden op blz. 88: „Der Rosenstock ist keine Waffe". Op blz. 89 laat hij er op volgen: „Wir sahen dass der Begriff der Waffe schon auf die Stange nicht ohne weiteres passte, so gut sie gelegentlich beim Angriff als solche funktionieren kann. Weit darüber hinaus und offenbar in ihren Wesenszügen ist diese Stange ein Ornamentalgebilde, eine vom Nutzen abstrahierende, rhythmisch gebaute Körperarabeske, in der zugleich eine Beziehung zum Liebesleben steckt. Der Rosenstock, im Prinzip ein Schädelprodukt wie die Stange, kommt als Waffe aber überhaupt nicht in Betracht, gleichzeitig aber fehlt es auch ihm offenbar nicht an erotischem Anschlus".

Tegen deze beschouwing rijst m.i. in tweeërlei opzicht groot bezwaar. In de eerste plaats bestaat er geen plausibele reden om het eerste ontstaan der geweien en hoorns niet in verband te brengen met tweegevechten der mannetjes onder elkaar, waarbij de oorspronkelijke vechtwijze, met behulp der slagtanden (gelijk wij die nog aantreffen bij de varkens) meer en meer plaats maakte voor het stooten der voorhoofden tegen elkaar. De vraag, of deze nieuwe gewoonte rechtstreeks dan wel middelijk de exostotische beenwoekering teweegbracht, (Lamarckismus versus Darwinismus) kan hier, evenals bij alle dergelijke quaesties, onbesproken gelaten worden. Ook bedoel ik natuurlijk in geenen deele te ontkennen, dat overdadige groeikracht in verband met periodische geslachtsrijpheid op die ontwikkeling van grooten invloed kan geweest zijn, gelijk zij het nog telkens is bij elke hernieuwing van het gewei; men denke slechts aan de stoornis die hierin zich openbaart bij herten wier geslachtsklieren beschadigd zijn.

Ook tegen BÖLSCHE's uitspraak: „De rozenstok is geen wapen", lijken mij gewichtige bezwaren aan te voeren, Reeds de vergelijking van den langen rozenstok bij het Muntjak-hert met de veel kortere bij de overige leidt tot de voorstelling dat de rozenstok een achteruitgaand orgaan is. Tot dezelfde opvatting voert de beschouwing der fossiele herten; de middelmiocaene Palaeomeryx-soorten bezaten geen scheiding in rozenstok en stang, maar slechts een lange, aan 't eind zwak dichotome beenige uitgroeiïng van 't os frontale, die

dus kan opgevat worden als een rozenstok van buitengewone lengte. Bij de eerste herten die een afzonderlijken rozenstok vertoonen, is deze zeer lang, zooals thans nog bij den Muntjak.

Hiermee stemt het feit overeen dat bij de Sivatherinae aan den wortel van het geweldige en vertakte gewei geen roos voorkomt, zoodat ook hier het geheel als rozenstok kan beschouwd worden. Daar bij de tegenwoordig levende Giraffen de hoorntjes steeds met behaarde huid bekleed blijven, is dit wellicht ook bij hunne uitgestorven verwanten, de Sivatherinae, het geval geweest, en misschien evenzeer bij de eerste gehoornde voorouders der Herten. De verdeeling in rozenstok en stang bij de Herten, met de jaarlijksche afwerping van het gewei, de regeneratie, het schuren, kortom het geheele voor het dier zoo lastige en gevaarlijke vernieuwingsproces, heeft zich dan ontwikkeld uit een dergelijken primitieven toestand als bij de Sivatherinae, waarin met huid bekleede beenuitgroeiingen op het schedeldak in grootte en samengesteldheid toenamen. Geeft men aan deze laatste reeds den naam rozenstok, dan is dus juist het omgekeerde waar van wat Bölsche beweert: de rozenstok is ontstaan als wapen, en is slechts bij de Giraffen die functie kwijtgeraakt.

Ten tweede bestaat er volgens mijn gevoelen geen voldoende reden om tusschen den achteruitgang der slagtanden in de bovenkaak der mannelijke Herten en de ontwikkeling van het gewei zulk een nauw en innig verband aan te nemen, als geschiedt door de onderstelling, dat het teveel aan groeikracht zich van die slagtanden naar de voorhoofdsbeenderen zou verplaatsen. Hiertegen pleit vooreerst, dat bij de mannetjes der Protoceratinae evenals bij de Dinoceratidae, geweldige, ver buiten den mond uitstekende slagtanden aanwezig waren, tegelijk met een geheele reeks van gepaarde en ongepaarde beenknobbels en uitsteeksels op den kop, evenals nog thans bij de Knobbelzwijnen, en verder dat onder de Herten de mannelijke Muntjak naast een eenvoudig, maar goed ontwikkeld gewei nog flinke, onder de bovenlip uitstekende slagtanden bezit. Verder, dat er weinig reden is, om aan te nemen dat bij de Holhoornigen hetzelfde verschijnsel zich zou hebben voorgedaan als bij de Volhoornigen, n.l. een achteruitgang van groote slagtanden, gelijken tred houdend met sterkeren groei en hoogere complicatie der excrescenties op het schedeldak, terwijl toch 't ontstaan dezer uitgroeisels bij alle Hoorn- en Geweidragers aan overeenkomstige oorzaken mag toegeschreven worden.

Aan den anderen kant is het zeer begrijpelijk, dat de bovenhoektanden der Herten rudimentair konden worden, toen zij niet meer als wapenen gebruikt werden, omdat de mannelijke Herten zich een

andere vechtwijze hadden aangewend, en in verband daarmede geweien kregen. Men kan deze vicarieerende ontwikkeling begrijpen, ook zonder dat men aan zulk een innige correlatie tusschen bovenslagtanden en gewei behoeft te denken, als BÖLSCHE doet, waar hij spreekt van een overschot van groei-energie, vrijgekomen door 't achterblijven in ontwikkeling der slagtanden, welk overschot zich zou uiten in woekeringen der voorhoofdsbeenderen.

Wanneer men in den boven door mij ontwikkelden gedachtengang verder gaat, rijst als van zelf de vraag, of de veel hoogere ontwikkeling der slagtanden bij de mannetjes van zoovele Zoogdiersoorten niet als een steun mag opgevat worden voor de hierbesproken hypothese van den androgenen oorsprong der voorhoofdsbewapening. Het verschil tusschen beide verschijnselen bestaat vooral in het feit, dat bij de tot slagtanden vervormde hoektanden of de tot stoottanden vergroote snijtanden alleen hun sterkere ontwikkeling en differentiatie aan invloeden van sexueelen, en wel specifiek mannelijken aard, toegeschreven zou kunnen worden, terwijl men bij de hoorns en geweien ook hun oorsprong daarop zou moeten terugbrengen. Maar dit neemt niet weg, dat wij de stoottanden der Olifantachtigen en Cetaceen, de slagtanden van zoovele Apen, Roofdieren, Hoefdieren enz. het gereedelijkst kunnen verklaren door aan te nemen, dat zij, wat aangaat hunne grootte en hun onderscheid met snijtanden en kiezen, een verworven bezit van 't mannelijk geslacht zijn, hetwelk naderhand door overgang in verzwakte mate op het andere geslacht, zijn monosexueel karakter weer eenigzins is kwijtgeraakt. In 't bijzonder is het weder de groei ver over 't doelmatige heen, die als een argument voor deze hypothese mag aangevoerd worden: men denke aan de in een cirkel opgekrulde stoottanden van den Mammouth, of aan de reusachtige hoektanden bij den mannelijken Walrus, de meestal slechts éénzijdige priemtand van den mannelijken Narwal en dergelijke.

In dit verband zou ik de vraag willen stellen, of niet de onmatig groote slagtanden van den uitgestorven Machaïrodus-tijger, die ongetwijfeld voor verdediging en aanval beide verre van practisch waren, voornamelijk een attribuut van 't mannetje gevormd zouden kunnen hebben. Met zekerheid toch is dit geval bij den Walrus aanwezig.

Ook de dorsaalwaarts omgekrulde, door de bovenlip heengegroeide bovenhoektanden van den Babiroessa zijn een mooi voorbeeld van groei over 't doelmatige heen.

*Groningen*, September 1918.

**Physiologie.** — Den Heer G. GRIJNS, correspondent der Afdeeling, biedt eene mededeeling aan: *„Is er verband tusschen het opslorpend vermogen voor stralende warmte en de riekkracht van stoffen?"*

Voor de kennis van het wezen der gewaarwordingen onzer zintuigen is het in de eerste plaats noodig te weten, wat de bijzondere geaardheid is van den prikkel, voor welks opname het zintuig gebouwd is. Voor licht en geluid weten wij, dat de golflengte de kwaliteit, de amplitude de sterkte der gewaarwording bepaalt. Voor reuk en smaak is nog niet bekend, welke eigenschap der riekende of smakende stof bepalend is voor den indruk, die zij wekken.

Vooral voor den reuk heeft het niet aan pogingen ontbroken deze in verband te brengen met bepaalde eigenschappen. Tot heden echter nog niet met succes.

De scheikundige eigenschappen, aan welke wel het eerst en het meest gedacht is, bleken niet voldoende van alle eigenaardigheden rekening te geven. ZWAARDEMAKER[1]) komt dan ook in zijn „Physiologie des Geruchs" tot de conclusie, dat er geen direct verband tusschen de scheikundige samenstelling eener stof en haren reuk bestaat.

LIÉGEOIS[2]) wees er op, dat een groot aantal reukstoffen op een wateroppervlak gebracht het zelfde verschijnsel vertoonen als door PRÉVOST[3]) bij kamfer is beschreven, en spreekt zelfs van een odoroscopisch phenomeen. Het bleek echter, dat ook een aantal niet riekende stoffen het zelfde verschijnsel geeft, en dat dus hierin geen reden ligt, om het rieken met oppervlaktespanningsverschijnselen, waartoe VAN MENSBRUGGE het verschijnsel terugbrengt, in verband te brengen.

De ontdekking van ZWAARDEMAKER[4]), dat een groot aantal reukstoffen in waterige oplossing verstoven een geladen nevel geven, wekte de gedachte, dat electrische ladingen een rol zouden kunnen spelen. ZEEHUIZEN[5]) vond echter, dat ook bij saponinen en antipyretica,

---

1) H. ZWAARDEMAKER, Die Physiologie des Geruchs Leipzig 1895.

2) LIÉGEOIS: Sur les mouvements de certains corps organiques à la surface de l'eau. Arch. de Physiol. 1868 T. I p. 35.

3) PRÉVOST: Annales de Chemie et de physique XXI p. 254, XXIV p 31, XL p. 1.

4) H. ZWAARDEMAKER, Ziltingsverslag Ak. v. Wetensch. Amsterdam Deel 24 p. 1630. Deel 25 p. 3 en 512.

5) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Deel 26 p. 1250.

die niet rieken eene lading kan worden aangetoond. Het doen ontstaan eener electrische lading van den nevel bij verstuiving is dus geen eigenschap, die karakteristiek is voor de reukstoffen.

TYNDALL[1]) vond indertijd, dat verschillende reukstoffen een sterk absorptievermogen voor donkere stralen hebben. Men kon daarom denken aan een verband tusschen deze twee eigenschappen. Het zou toch niet onmogelijk zijn, dat de reukstoffen energie aan hunne omgeving ontleenden, om die op het reukzintuig over te dragen.

In dat geval moet men verwachten, dat de riekkracht en het warmteopslorpend vermogen bij verschillende stoffen zoo al niet evenredigheid, dan toch een zeker parallellisme zullen vertoonen.

Op voorstel van Prof. ZWAARDEMAKER besloot ik daarom in deze richting een onderzoek te doen.

Daar het hier om een eerste orientatie te doen was, kon van al te groote nauwkeurigheid worden afgezien, waardoor vele moeilijkheden konden worden omzeild.

Ik bepaalde het absorptievermogen van droge lucht, die door een zwak geknikt buisje met de te onderzoeken vloeistof gestreken was, in vergelijking met zuivere droge lucht volgens een differentiaalmethode. Hiervoor werd aan weerskanten van een Nernstlamp een glazen buis geplaatst, waarvan de einden door klipzoutplaatjes gesloten werden. Achter deze buizen stonden thermozuilen van MOLL, die tegengesteld met den galvanometer van MOLL waren verbonden. Door de eene buis kon lucht of gas gevoerd worden. Dit geschiedde door aanzuiging met een spirometer. Voor de andere buis was een irisdiaphragma aangebracht, waarvan de stand op een grooten gradenboog werd afgelezen. Door meting was de grootte van de opening, die met elke schaalverdeeling overeenkwam, bepaald. De galvanometer werd afgelezen door de beweging van het spiegelbeeld van een verlichten koperdraad op een millimeterschaal. Bij elke bepaling werd eerst droge lucht door de eene buis geleid en dan het diaphragma zoo gesteld, dat de galvanometer op nul stond. Dit kon gemakkelijk, doordat de openingen in dubbele schermen, die tusschen lamp en meetbuizen stonden te gelijk konden worden bedekt of vrijgelaten.

Daarna werd een tien minuten lang lucht door de te onderzoeken vloeistof en door de meetbuis opgezogen. Vervolgens op nieuw de stand van het diaphragma bepaald, waarbij wegschuiven der schermpjes geen uitslag van den galvanometer gaf; dan de buis een kwartier of zoo noodig langer met droge lucht uitgespoeld, en weer het nulpunt bepaald. Zijn de beide nulpunten nagenoeg gelijk, en de

[1]) J. TYNDALL: Heat as a mode of motion p. 366.

bepaling met de reukstofhoudende lucht wijkt daarvan af, dan geeft de verhouding der diaphragma-openingen die der hoeveelheden doorgelaten licht en dus ook de absorptie aan.

Dan werd op de zelfde wijze droge lucht, die door de te onderzoeken vloeistof heenstreek door een glazen vat gezogen, dat een met een glazen plaatje gesloten opening had, waar op de diaphragma-odorimeter van ZWAARDEMAKER kon worden geplaatst.

Dit toestelletje, waarvan een beschrijving eerstdaags het licht zal zien, dient om een riekstofhoudende lucht in een bekende verhouding te verdunnen, doordat in een cylindrische kamer, waaruit men bij het ruiken lucht door een buisje opzuigt, door een irisdiaphragma-opening de riekende lucht en door spleetvormige verstelbare zijdelingsche openingen gewone lucht binnentreedt.

Gemeten wordt de verdunning, waarin nog juist de stof herkend wordt. Op deze wijze was het absorbeerend vermogen, en het riekend vermogen van een mengsel van lucht met een reukstof bekend. Voor alle onderzochte stoffen werd nu berekend, hoeveel maal zij verdund hadden kunnen worden, zonder dat de reuk onherkenbaar werd, wanneer de hoeveelheid in de meetbuis aanwezig juist voldoende geweest ware, om een opslorping van 1 procent te geven.

Wij komen dan tot de volgende tabel.

| Onderzochte stof | Aantal olfactieën | Onderzochte stof | Aantal olfactieën |
|---|---|---|---|
| Methylalcohol | 12 | Bromoform | 16° |
| Aethylalcohol | 7.2 | Benzol | 72 |
| Aether | > 13°° [1] | Toluol | 16° |
| Amylacetaat | 20°° | Xylol | 94 |
| Azijnzuur (ijs) | 36° | Toluidine | 51 |
| Propionzuur | 22° | Eulacyptol | > 34°° [2] |
| Chloroform | 14° | Eugenol | > 14°° [2] |

Hing de riekkracht met het warmteopslorpend vermogen samen, dan zou men moeten verwachten, dat de waarden in deze kolom ongeveer even groot waren, waar zij zoo ver uiteen loopen, moet een dergelijk verband worden ontkend.

[1]) De verdunning der aether houdende lucht was sterker dan met mijn toestel kon gemeten worden.

[2]) De absorptie van deze beide was kleiner dan $^1/_2$ $^0/_0$ en lag dus beneden de grens van nauwkeurigheid van mijne inrichting.

**Scheikunde.** — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den Correspondent der Afdeeling, den Heer A. W. K. DE JONG: *„De bepaling van het geraniolgehalte in citronellaolie"*.

Door de chemici van de firma SCHIMMEL & Co. werd een methode gegeven voor de bepaling van het geraniolgehalte in citronellaolie, die men vindt in het Bericht van genoemde firma van October 1899, 20 en ook in dat van October 1912, 39, waar men leest: „Etwa 2 g Phtalsäureanhydrid und 2 g des zu untersuchenden Oels werden mit 2 cm Benzol zwei Stunden in einem Kolben, wie er zu Acetylierungen benutzt wird, auf dem Wasserbad erwärmt, dann erkalten gelassen und mit 60 cm wässriger Halbnormal-Kalilauge 10 Minuten geschüttelt. Der Kolben ist hierbei mit einem eingeschliffenen Glasstöpfen verschlossen. Nach dieser Zeit ist alles Anhydrid in neutrales phtalsaures Kali und der saure Geraniolester in sein Kalisalz übergeführt worden. Nun wird das überschüssige Alkali mit Halbnormal-Schwefelsäure zurücktitriert. Zieht man dann von der Menge Alkali, die der eingewogenen Phtalsäure entspricht, die für den Versuch verbrauchte Menge ab, so erfährt man, wieviel Alkali dem an Phtalsäure gegangenen Geraniol äquivalent ist, woraus der Prozentgehalt an Geraniol zu berechnen ist".

Deze methode is reeds op het oog verdacht, omdat zij van de gedachte uitgaat, dat geraniol door phtaalzuuranhydride quantitatief veresterd wordt en dit zelfs niet eens met azijnzuuranhydride het geval is (gevonden werd dat 98.5 °/₀ veresterd werd).

Voor de volgende proeven werd zeer zuiver phtaalzuuranhydride bereid; 1 gr. werd geneutraliseerd door 135 $cM^3$ KOH $^1/_{10}$ n, terwijl voor de zuivere stof berekend wordt 135.1 $cM^3$.

Het gebruikte citronellal werd uit citronellaolie afgezonderd door middel van de bisulfietverbinding. Het s.g. 26° was 0.8526; $[\alpha]_D = + 10°21'$. Het was zwak zuur; 1 gr. werd geneutraliseerd door 0.2 $cM^3$ KOH $^1/_{10}$ n.

Het geraniol werd uit Palmarosaolie volgens de calciumchloride-methode afgezonderd. Het s.g. 26° was 0.8752.

Aan het mengsel van het anhydride, citronellal of geraniol werden 4 $cM^3$ benzol toegevoegd. Na het verhitten werd de kolf snel afgekoeld, waardoor de kristallen die zich afzetten klein bleven en

gemakkelijk in KOH ½ N. oplosten. Het phenolphtaleïne werd als poeder toegevoegd.

Het verhitten had 2 uur plaats.

| Temperatuur van het waterbad in graden C. | Gebruikte hoeveelheid phtaalzuur-anhydride. | Gebruikte hoeveelheid Citronellal | cM³ KOH $^1/_{10}$ n. | | Verschil |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | getitreerd | berekend | |
| 85 | 1.2600 gr. | 0.4450 gr. | 169.9 | 170.1 | 0.2 |
| 85 | 0.9480 „ | 0.5120 „ | 127.6 | 127.95 | 0.35 |

Bij deze temperatuur wordt dus het citronellal niet of slechts zeer weinig door het anhydride aangetast.

| Temperatuur van het waterbad in graden C. | Tijdsduur der verhitting | Gebruikte hoeveelheid phtaalzuur-anhydride gr. | Gebruikte hoeveelheid Geraniol gr. | Hoeveelheid Geraniol bepaald | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | gr. | % |
| 99 | 2 uur | 2.1740 | 0.4645 | 0.4158 | 89.5 |
| 88 | 2 „ | 2.1810 | 0.4960 | 0.4575 | 92.2 |
| 84 | 2 „ | 2.1300 | 0.4860 | 0.4481 | 92.2 |
| 77 | 2 „ | 2.1160 | 0.4950 | 0.4527 | 91.5 |
| 88 | 2 „ | 1.0550 | 0.4490 | 0.4073 | 90.7 |
| 82 | 3 „ | 1.6930 | 0.4515 | 0.4173 | 91.4 |

Hieruit blijkt duidelijk, dat het veresteren van het geraniol niet volledig is geweest. Het mengsel echter kookt niet en ik heb gemeend, dat hieraan wellicht het resultaat te wijten zou kunnen zijn. Daarom werden nog een paar bepalingen verricht waarbij de verhitting met een kleine vlam plaats had.

Verhit werd gedurende 2 uur.

| Gebruikte hoeveelheid phtaalzuuranhydride gr. | Gebruikte hoeveelheid Geraniol gr. | Hoeveelheid Geraniol bepaald | |
|---|---|---|---|
| | | gr. | % |
| 2.0540 | 0.8890 | 0.8193 | 92.2 |
| 2.0495 | 0.4970 | 0.4497 | 90.5 |

Ook het vermeerderen van de hoeveelheid benzol van 4 $cM^3$ op 8 $cM^3$ gaf geen ander resultaat. Gevonden: 90.6 %.

Bij deze wijze van verhitten wordt echter ook het citronellal sterker aangetast.

| Gebruikte hoeveelheid phtaalzuur-anhydride gr. | Gebruikte hoeveelheid Citronellal gr. | Aantal cM. KOH $^1/_{10}$ n. | | |
|---|---|---|---|---|
| | | getitreerd | berekend | verschil |
| 0.9490 | 0.5950 | 126.5 | 128.1 | 1.6 |
| 1.2850 | 0.5050 | 171.15 | 173.45 | 2.3 |

Blijkbaar hebben de wetenschappelijke onderzoekers van de firma Schimmel & Co. alleen met mengsels van geraniol, citronnellal en limoneen gewerkt. Zooals uit de volgende bepalingen blijkt, krijgt men met mengsels van geraniol en citronellal uitkomsten, die weinig van de juiste waarde verschillen.

| Temperatuur van het waterbad in graden C. | Gebruikte hoeveelheid phtaalzuur-anhydride gr. | Gebruikte hoeveelheid Geraniol gr. | Gebruikte hoeveelheid Citronellal gr. | Hoeveelheid Geraniol bepaald | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | gr. | % |
| 88 | 2.4883 | 0.5610 | 1.3602 | 0.5480 | 97.7 |
| 82 | 2.1090 | 1.0115 | 0.8120 | 1.0255 | 101.4 |
| 86 | 2.3600 | 1.3745 | 0.7560 | 1.3883 | 101.0 |

Dat door de aanwezigheid van het citronellal het geraniol beter veresterd zou worden, is zeer onwaarschijnlijk; waar van het geraniol bij de vorige bepalingen ongeveer 92 % veresterd zijn, zouden dus bij deze 3 bepalingen respectievelijk 0.032 gr., 0.095 gr. en 0.123 gr. citronellal veresterd zijn.

Zooals hieruit blijkt zou de hoeveelheid veresterd citronellal toenemen, wanneer de hoeveelheid geraniol vermeerderd wordt. De oorzaak, dat het citronellal veresterd wordt, wanneer geraniol aanwezig is, moet gezocht worden in het ontstaan van den zuren phtaalzuren ester van geraniol. Phtaalzuur heeft weinig invloed omdat het in benzol maar weinig oplost. Bekend is, dat citronellal zeer gevoelig is voor zuren en daardoor in isopulegol wordt omgezet.

Bij het acetyleeren van citronellal zonder natriumacetaat kan men hetzelfde verschijnsel waarnemen, wanneer men met mengsels van azijnzuur en azijnzuur-anhydride werkt.

Gebruikt werd een indirekte methode overeenkomende met de wijze waarop het geraniol door phtaalzuuranhydride bepaald wordt. Het toestel bestond uit een kolfje met langen hals waaraan een U-buisje ingeslepen verbonden was. In het kolfje werden steeds 2 cM³ citronellal en 2 cM³ van het azijnzuuranhydride mengsel afgewogen. In het U-buisje werd 5 cM³. KOH ½ n gebracht, terwijl er een natronkalkbuisje aan werd verbonden.

| Gehalte van het mengsel aan azijnzuuranhydride % | Citronellal veresterd in % | | Gemiddeld |
|---|---|---|---|
| | A | B | |
| 95.0 | 28.3 | 32.0 | 30.2 |
| 75.9 | 51.9 | 55.8 | 53.9 |
| 53.6 | 70.0 | 68.8 | 69.4 |
| 31.2 | 59.4 | — | 59.4 |
| 15.25 | 43.7 | 41.8 | 42.5 |
| azijnzuur van 97.2 % | 30.9 | 30.9 | 30.9 |

Wanneer de verhittingsduur van 2 op 3 uur gebracht wordt, wordt er ook meer citronellal veresterd. Men vond bij gebruik van 95 % azijnzuuranhydride 40.1 % en bij gebruik van 52.9 %, 76.7 % veresterd citronellal.

Duidelijk heeft de aanwezigheid van azijnzuur in het mengsel een gunstige werking op het veresteren van het citronellal. Men zou kunnen meenen, dat het citronellal, hetwelk niet veresterd wordt, toch omgezet is, bijvoorbeeld in een terpeen of iets dergelijks. Om dit na te gaan werden grootere hoeveelheden van de verschillende producten bereid op de wijze zooals dit bij het bepalen van z.g. totaal geraniol gehalte van citronellaolie plaats heeft. (Bericht van SCHIMMEL & Co. April 1910, 155).

Een deel van elk product werd door middel van phtaalzuuranhydride op de aanwezigheid van alcoholen onderzocht, van een ander deel werd op de bekende wijze het verzeepingsgetal bepaald en een derde gedeelte werd geacetyleerd volgens de indirekte

methode door 2 cM³ van 't product met 2 cM³ azijnzuuranhydride 95 °/₀ en 0.2 gr. natriumacetaat gedurende 3 uur te verhitten.

| Gehalte van het mengsel aan azijnzuuranhydride °/₀ | Aantal cM³ 1/10 n. phtaalzuur die veresterd werden | Verzeepings-getal | °/₀ geacetyleerd volgens de indirecte methode |
|---|---|---|---|
| 95.0 | 1.6 | 124.3 [1]) | 67.7 |
| 53.6 | — | 219.0 | 13.4 |
| 31.2 | 1.0 | 180.3 | 19.8 |
| 15.25 | — | 129.0 | 28.4 |
| azijnzuur van 97.2 °/₀ | 1.3 | 98.0 | 38.6 |

In totaal werden dus de volgende hoeveelheden van het citronellal geacetyleerd.

| | |
|---|---|
| 95.0 °/° | 37.7 + 74.6 = 112.3 |
| 53.6 | 72.0 + 16.0 = 88.0 |
| 31.2 | 57.3 + 22.9 = 80.2 |
| 15.25 | 39.2 + 31.6 = 70.8 |
| Azijnzuur van 97.2 °/₀ | 29.1 + 41.6 = 70.7 |

Bij het oorspronkelijke gebruik van 95 °/₀ anhydride krijgt men dus gedeeltelijk een biacetaat, terwijl de andere azijnzuuranhydride-mengsels geen 100 °/₀ geven, waaruit zou volgen, dat door deze ook koolwaterstoffen, terpenen, gevormd worden.

Evenals het azijnzuur geeft ook de aanwezigheid van geraniol aanleiding, zooals bij de bepalingen met phtaalzuuranhydride, tot een betere verestering van het citronellal.

Terwijl volgens de indirekte methode met azijnzuuranhydride van 95 °/₀ in 2 uur slechts 30.2 °/₀ citronellal veresterd werden, gaven de mengsels met geraniol het volgend resultaat.

| Hoeveelheid Geraniol gr. | Hoeveelheid Citronellal gr. | Hoeveelheid veresterd gr. |
|---|---|---|
| 0.4940 | 1.1365 | 0.9478 |
| 0.8275 | 0.9465 | 1.3195 |
| 1.3390 | 0.8260 | 1.8740 |

[1]) Dit hoogere cijfer is zeer waarschijnlijk aan het gemakkelijker opnemen van water bij het werken in 't groot te danken.

Aannemende, dat ook in het mengsel van het geraniol 98.5 % zijn veresterd, zooals door de proef met geraniol alleen werd gevonden, vindt men, dat de volgende hoeveelheden citronellal veresterd zijn: 40.6, 53.3 en 67.2.

Tevens volgt hieruit, dat men geen totale verestering kan verkrijgen zonder natriumacetaat te gebruiken. Ook zelfs door den duur van de verhitting tot 10 uur te vergrooten werden slechts 93.3 % van het geraniol-citronellal mengsel (1 $cM^3$ op 4 $cM^3$) veresterd.

Hierna werden nog enkele bepalingen verricht waarbij op elke 2 $cM.^3$ citronellal 0.2 gr. natriumacetaat (vooraf gesmolten) gebruikt werden.

| Gehalte van het mengsel aan azijnzuur-anhydride % | Hoeveelheid Citronellal veresterd in % | | Gemiddeld |
|---|---|---|---|
| | A | B | |
| 95.0 | 95.0 | 95.3 | 95.1 |
| 88.3 | 93.5 | — | 93.5 |
| 75.9 | 90.0 | 92.4 | 91.2 |
| 52.9 | 84.4 | — | 84.4 |
| 31.2 | 54.5 | — | 54.5 |
| 15.25 | 40.2 | — | 40.2 |
| Azijnzuur van 97.2 % | 30.3 | 31.4 | 30.8 |

Dus door de aanwezigheid van het natriumacetaat is de hoeveelheid geacetyleerd citronellal toegenomen voor de mengsels, die 53—95 % anhydride bevatten, terwijl het op de overigen geen invloed heeft gehad. De verhooging van de temperatuur door het toevoegen van het natriumacetaat is niet de oorzaak, dat de acetyleering hierdoor voor de opgegeven mengsels verbeterd wordt, daar toch het verhitten in een toegesmolten buis van het mengsel zonder natriumacetaat bij dezelfde temperatuur (ongeveer 149°) geen betere verestering ten gevolge had. Uit de kromme is echter te zien, dat bij het gebruik van natriumacetaat de aanwezigheid van azijnzuur nadeelig is, terwijl dit juist zonder natriumacetaat tot een bepaalde concentratie voordeelig is. Er volgt dus uit, dat men bij het gebruik van natriumacetaat met een andere reactie te maken heeft dan wanneer deze stof niet wordt toegepast.

*Buitenzorg*, 27 Mei 1918.

**Physiologie.** — De Heer PEKELHARING biedt een mededeeling aan van Mej. DR. M. A. VAN HERWERDEN: *Over den invloed van radiumstralen op de Oögenese van Daphnia pulex*".

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

Bij een ras van Daphnia pulex in het laboratorium gekweekt, waarvan de voortplantingswijze mij door een waarneming gedurende meer dan 8 jaren in tal van bijzonderheden bekend is, heb ik geruimen tijd den invloed der radiumbestraling bestudeerd. Het aanvankelijk doel dezer bestraling was mogelijkerwijze tijdens de geslachtelijke periode parthenogenesis op te wekken, of omgekeerd de parthenogenetische wijfjes tot een geslachtelijke nakomelingschap te brengen. De meening van vele onderzoekers, dat bij bestraling van het organisme met radium enzymwerkingen worden aangezet of in andere banen geleid, gaf voldoende reden tot een dergelijke proefneming. Bij de kortstondige of langere bestraling met 0.7 mgr. of 3.1 mgr. radiumbromide, welke tot mijn beschikking stond, gelukte het echter nooit op de geslachtelijke of parthenogenetische phase invloed te oefenen, terwijl een bestraling met sterker praeparaat de dieren snel te gronde richt. [1]) Afgezien van deze vraag, bleek echter de voortzetting der proeven van belang, omdat ze een eigenaardig licht werpen op den verschillenden weerstand van het protoplasma tijdens de verschillende phasen der oögenese en der embryonale outwikkeling tegenover de radiumstralen.

Daphnia pulex is voor dergelijke proeven een uitermate geschikt materiaal. Goed doorschijnend, gemakkelijk bij sterke vergrooting onder het microscoop waar te nemen, heeft zij bovendien het voordeel, dat niet slechts de ontwikkeling der in de broedruimte afgezette parthenogenetische eieren in het levende dier te volgen is, doch tevens de graad van rijping der eieren in het ovarium beoordeeld kan worden. Somtijds is met een nauwkeurigheid van enkele uren aan den dooierrijkdom der rijpende eieren te voorspellen, wanneer ze in de broedruimte zullen overgaan. Daar bij elke baring verscheidene jongen te verwachten zijn, is er altijd rijkelijk controlemateriaal. Verder maakt de snelle opeenvolging der generaties, dat

[1]) Verhandelingen der Koninklijke Akad. v. Wetenschappen. Deel XX. bldz. 20

men niet slechts de dieren, waarmede men proeven neemt, doch tevens een groote nakomelingschap overziet.

Bij de bestraling heb ik Daphnia pulex in een druppel slootwater onmiddelijk op de micaplaat van het radiumpraeparaat gebracht. De gebruikte praeparaten, die 0,7 en 3,1 m.gr. radiumbromide bevatten, zal ik bij de beschrijving der proeven respectievelijk kapsel *A* en kapsel *B* noemen.

Dieren van verschillenden leeftijd werden afzonderlijk bestraald, waarbij dadelijk bleek, dat de volwassen Daphnia veel minder gevoelig voor radiumstralen is dan de pasgeborene. Zelfs 18 uur bestraling op kapsel *A* werd verdragen zonder dat de dieren te gronde gingen. Bleef het dier na deze langdurige bestraling in leven, dan zag men het somtijds later bij de schaalwisseling, welke met een abnormale chitinevorming gepaard ging, bezwijken, hetgeen dus op een beschadiging van het ektoderm wees. Doch steeds, ook wanneer het dier zelf volkomen gezond bleef, was het voor den verderen duur van het leven steriel geworden. Duurt de bestraling slechts enkele uren en zijn er nog geen dooierrijke eieren in het ovarium te bespeuren, dan bestaat er geen gevaar voor het voortplantingsvermogen. De eieren, die later in de broedruimte overgaan, ontwikkelen zich normaal en de jongen, die uit deze eieren ontstaan, worden op normale wijze geslachtsrijp en krijgen een gezonde nakomelingschap.

*Zoodra echter de bestraling geschiedt, terwijl in den eierstok dooierrijke eieren liggen, of de eieren pas in de broedruimte zijn overgegaan, is somtijds een bestraling van* 25 *minuten op kapsel A, van enkele minuten op kapsel B reeds voldoende de ontwikkeling der eieren een abnormalen weg te doen inslaan,* zoodat ze reeds in het blastulatijdperk te gronde gaan en in het lichaam der moeder weer worden geresorbeerd. De gevoeligheid is individueel verschillend, zonder dat dit schijnt samen te hangen met den leeftijd der geslachtsrijpe wijfjes. Terwijl de eieren, die pas in de broedruimte zijn gekomen, even gevoelig of meestal nog gevoeliger zijn dan vóór het verlaten van den eierstok (somtijds reeds abortus na 1½ minuut verblijf op kapsel *B*), ziet men dat tijdens de ontwikkeling de weerstand der embryo's toeneemt. Zelf na 3 uur bestraling op kapsel *A* in het gastrulastadium heeft ontwikkeling tot voldragen jongen plaats gehad. Toch bleek het broedsel in deze gevallen niet altijd onbeschadigd te zijn, want één der jongen uit zulk een bestraalde gastrula voortgekomen — en wel de eenige die van dit broedsel geslachtsrijp werd — gaf later zelf een broedsel met afwijkingen in den morphologischen bouw. De toekomstige kiemcellen der gastrula moeten dus reeds onder de bestraling geleden hebben.

Meer weerstand bieden de bijna voldragen jongen; deze kunnen 20 uur bestraling op kapsel *A* verdragen, zonder dat hun latere vruchtbaarheid behoeft te lijden. Verlaten echter deze jongen de broedruimte reeds tijdens de bestraling, dan gaan ze alle zonder uitzondering te gronde; een paar uur verblijf op kapsel *A* is reeds voldoende ze te dooden. Na een uur bestraling is de hartswerking verzwakt en onregelmatig en sterven ze spoedig daarna. In de moederlijke broedruimte worden ze vermoedelijk door de chitineschaal der moeder en door de vloeistof, waarin ze zweven, beschermd; een bescherming, welke echter voor de jongere embryo's, die zooveel gevoeliger voor de radiumstralen zijn, niet voldoende is.

Kortstondige bestraling van een wijfje met dooierrijke eicellen in het ovarium, doet wel de eieren te gronde gaan, doch laat de moeder ongedeerd, bevordert zelfs de talrijkheid der volgende broedsels, een overeenkomstig verschijnsel als men bij de werking van verscheidene vergiften op Daphnia pulex[1]) ziet, waar het vergif in kleine dosis als prikkel werkt. De weerstand van eieren uit eenzelfde broedsel kan zeer verschillend zijn. Somtijds ziet men namelijk naast de eieren, die bezwijken gaan, een enkel normaal jong, dat volstrekt niet door zijn uiterlijk verraadt aan welke gevaren het tijdens of vóór de embryonale ontwikkeling was blootgesteld en ook later een normaal voortplantingsvermogen kan hebben. Slechts enkele keeren is zulk een jong abnormaal gebouwd, zonder dat de afwijking karakteristiek voor de bestraling met radium is. Doch over het algemeen zijn deze monstra (met abnormaal profiel of defecten darm) zeldzaam. Bij de bestraling wordt dus als regel „alles of niets" geleverd; vandaar dat het mij tot heden nimmer gelukt is mutaties door bestraling met radium bij Daphnia pulex te kweeken, zooals b.v. MORGAN op groote schaal bij de vlieg Drosophila verkregen heeft. De enkele abnormale exemplaren werden nimmer geslachtsrijp, op één exemplaar na, dat zich volkomen herstelde en zelf een normaal nageslacht kreeg, dat na 4 maanden nog gezond was. Trouwens mijn waarnemingen bij Daphnia pulex gedurende 8 jaar hebben mij overtuigd, dat bij dit gekweekte ras de modificeerbaarheid zeer groot is, de mutabiliteit daarentegen gering moet zijn.

Dat eieren van een zelfde broedsel ongelijken weerstand tegenover schadelijke invloeden vertoonen, is ook uit andere onderzoekingen op proefondervindelijk embryologisch gebied gebleken. Ik herinner b.v. aan de onderzoekingen van PEARL[2]) over ongelijken weerstand

[1]) l.c. bldz. 289.

[2]) Proceedings of the National Acad. of sciences. U. S. A., Vol. II, bldz. 380.

van kippen-embryo's tegen vergiftiging met alkohol, waarbij ook de eieren, die nog tot ontwikkeling kunnen overgaan, volkomen normale kuikens worden.

Men zou wellicht bij de bestralingsproeven aan ongelijke blootstelling der eieren kunnen denken. Dit kan echter alleen gelden voor de broedsels met veel eieren, waarbij de binnenste door de buitenste tegen de schadelijke stralen worden beschermd. Wanneer er, zooals vaak het geval was, 4 of 5 eieren in de broedruimte liggen, zal bij de Daphnia, welke vrij in den waterdruppel op de radiumkapsel rondzweeft, de blootstelling der eieren vermoedelijk gelijk zijn.

Wat is de oorzaak van dezen ongelijken weerstand der Daphnia-eieren? Een reductiedeeling der chromosomen, welke voor een ongelijke verdeeling van vaderlijke en moederlijke „genen" verantwoordelijk zou kunnen zijn, komt bij deze parthenogenetische ontwikkeling niet voor; het ei behoudt het aantal chromosomen der moeder. Een overeenkomstig onderscheid, wat de reactie der eieren op schadelijke invloeden betreft, heb ik vroeger bij de behandeling der Daphnia's met phenylurethaan gevonden [1]).

Terwijl bij korte bestraling van een wijfje met rijpe eicellen alleen het eerstvolgende broedsel bezwijkt en de volgende broedsels normaal, zelfs zeer rijkelijk zijn, ziet men bij langere bestraling, dat ook de jongere ontwikkelingstrappen der eieren beschadigd moeten zijn, totdat ten slotte volkomen steriliteit gevonden wordt. Als gevolg van één enkele bestraling kan men bij een Daphnia na tal van abortus, plotseling weer normale jongen zien verschijnen, wanneer namelijk de jongere oögonia niet beschadigd waren. Zoo heb ik tot 6 Januari 1917 nawerking bespeurd van een bestraling, die 23 November 1916 gedurende eenige uren op kapsel *A* had plaats gehad. Na 6 Januari werden weer volkomen normale jongen geboren.

Mijn waarneming, dat bij Daphnia pulex de eieren in het laatste tijdperk der rijping het meest gevoelig voor radiumstralen zijn en dat eerst bij langere bestraling eveneens de jongere eicellen en ten slotte de oögonia lijden, maakt het begrijpelijk dat PACKARD [2]) na bestraling van Drosophila-larven de jonge vliegen enkele weken steriel, later echter weer vruchtbaar zag worden. Bedenkt men, dat ook de waarnemingen bij zoogdieren er zeer voor pleiten, dat in het bijzonder de rijpe eicellen zeer gevoelig zijn, dan mag men wel het vermoeden uitspreken, dat dit voor het geheele dierenrijk geldt. Hoe is het te verklaren, dat de rijpende eieren meer toegankelijk

---

[1]) l.c. bldz 289.

[2]) Journal of exp. Zoology. XIX, bldz. 332.

zijn voor de radiumstralen dan de onrijpe eieren en dan de overige cellen van het embryonale en moederlijke organisme? En welke moleculaire omzettingen hebben in het protoplasma onder invloed van de radiumbestraling plaats? De opvatting, door verscheidene onderzoekers gehuldigd, dat enzymwerkingen door de bestraling worden aangezet, of in nieuwe banen geleid, gaf mij aanleiding de embryogenese van bestraalde en onbestraalde zusterdieren te vergelijken, die, — wat temperatuur en voeding betrof — onder dezelfde omstandigheden waren gekweekt. Deze zusters werden tot het overgaan van de eieren in de broedruimte in hetzelfde bekerglas gelaten en zoodra de eieren in de broedruimte waren (er werden voor deze proef dieren gekozen, bij welke deze overgang in hetzelfde uur had plaats gehad) werd de ééne Daphnia 15 minuten op kapsel *A* bestraald. Daarna werden de omstandigheden voor beide dieren weer gelijk gemaakt. Ontwikkelde zich na deze bestraling een normaal broedsel, dan was de embryogenese noch vertraagd, noch versneld. Op hetzelfde uur begon bij het broedsel van beide dieren de hartpulsatie zichtbaar te worden; tegelijkertijd nam de ontwikkeling der ledematen een aanvang en ontwikkelde zich het eerste oogpigment; in hetzelfde uur verlieten de jongen de moederlijke broedruimte. Ook bij een tweede bestraling werd deze waarneming gedaan. Zoolang dus de radiumwerking de physiologische grenzen niet overschrijdt, ontstaat er noch een versnelling, noch een vertraging der ontwikkeling.

Zijn het de $\alpha$, $\beta$ of $\gamma$ stralen, voor welke de eicellen van Daphnia in het bijzonder gevoelig zijn? Bij de bestraling op de kapsel met radiumbromide worden de $\alpha$ stralen uitgesloten, daar zij door de micaplaat van de kapsel reeds worden teruggehouden en dus het dier niet bereiken. Scheidt men de Daphnia door een loodplaatje van 3 mM. dikte van het radiumpraeparaat, dan bereiken de $\beta$ stralen de Daphnia niet en de secundaire $\beta$ stralen kan men laten resorbeeren door een micaplaatje van 50 $\mu$ dikte, waarop de Daphnia wordt geplaatst. Op deze wijze konden Daphnia's met dooierrijke eieren in het ovarium een bestraling met de $\gamma$ stralen van 0,7 mgr. radiumbromide 24 uur verdragen zonder dat dit abortus tengevolge had, hetgeen voor de onschadelijkheid der $\gamma$ stralen spreekt. Gebruikt men het radiumpraeparaat van 3,1 mgr. dat zooals men gezien heeft, binnen enkele minuten de eieren te gronde richt, dan gelukte het eveneens dikwijls bij afsluiting der $\beta$ stralen een bestraling van 24 uur zonder schadelijke gevolgen te laten verdragen. Bij een paar dezer laatste proeven is echter het eerstkomende broedsel geaborteerd. Het is dus zeer goed mogelijk dat voor een sterker concentratie der $\gamma$ stralen (welke met deze praeparaten niet verkrijgbaar was) de

eicellen van Daphnia wel gevoelig blijken te zijn, een gevoeligheid, die echter met die voor $\beta$ stralen niet vergelijkbaar is.

De antagonistische werking tusschen uranium en radium, door ZWAARDEMAKER [1]) bij het kikvorschhart aangetoond, gaf mij aanleiding Daphnia pulex in een druppel uranylnitraat te bestralen en na te gaan, of op deze wijze de resorptie der eieren achterwege bleef. Een concentratie van 600 mgr. uranylnitraat pro L. wordt eenige uren verdragen zonder dat de ontwikkeling van het broedsel schade lijdt; bij hooger concentratie gaat de Daphnia zelf binnen dien tijd te gronde. Brengt men een Daphnia met dooierrijke eieren in het ovarium in een oplossing van 500 mgr. uranylnitraat pro L. en legt het dier een half uur later in een druppel derzelfde vloeistof op de radiumkapsel van 3,1 mgr., dan kan men in verscheidene proeven de bestraling ½ à 4 uur voortzetten zonder dat het broedsel aborteert, terwijl onder deze omstandigheden in water de eieren na eenige minuten doodelijk beschadigd zijn. Somtijds echter was er van de beschermende werking van het uranylnitraat niets te bespeuren, zonder dat mij tot heden de oorzaak dezer wisselende uitkomst bekend is. Dit geldt eveneens voor lagere concentratie van het uranylnitraat.

Meer dan vijftig Daphnia's werden in microscopische doorsneden onderzocht en met onbestraalde exemplaren vergeleken. De *normale* eirijping bij Daphnia pulex is reeds door KÜHN [2]) beschreven. Mijn bevindingen hieromtrent komen grootendeels met de zijne overeen. Na langdurige bestraling heb ik in de rijpende eieren geen verandering, noch in de chromosomen, noch in het kernlichaampje, noch in het eiplasma kunnen aantoonen. Slechts in één richtingsspoel (ter vorming van het eerste poollichaampje) was het aantal chromatinebrokjes grooter dan met het dubbele aantal chromosomen overeenkwam. Een eventueele verandering in den vorm der chromosomen is echter bij Daphnia wegens de zeer kleine afmeting moeilijk te bestudeeren.

Eerst in het blastula-tijdperk, dus ongeveer, wanneer men ook bij het levende dier met zwakke vergrooting de embryo's reeds ten doode ziet opgeschreven, hebben er zeer duidelijke veranderingen in de kernen plaats, gekenmerkt door uitéénvallen der chromatine in grove brokjes. De beschadiging van het ei is echter reeds veel vroeger geschied dan met het gewapend oog zichtbaar is.

Ofschoon door microscopisch onderzoek niet was uit te maken, of de vernietigende werking der radiumstralen aanvankelijk de kern,

---

[1]) Verslagen der K. A. v. W. Amsterdam, Bd. 25, bldz. 1096.

[2]) Arch. f. Zellforschung, Bd. I, bldz 538.

het celplasma of deze beide heeft getroffen, is de groote gevoeligheid van het ei in een tijdperk, dat met belangrijke omwentelingen in de kern gepaard gaat (vorming van de richtingsspoel en uitéénvallen van het groote kernlichaampje) een aanwijzing, dat de kern in het bijzonder den schadelijken invloed der $\beta$-stralen ondervindt. Dat de eerste klieving normaal afloopt en eerst daarna de ontaarding zich openbaart, zou wellicht een verklaring vinden, wanneer men aan de onderzoekingen van BOVERI[1]) denkt, volgens welke bij den Zeeappel eerst aan het einde van het blastula-tijdperk de verschillende eigenschappen der chromosomen zich doen gelden.

Dezelfde rijpingsperiode, waarin het ei zoozeer gevoelig is voor radiumstralen, blijkt tevens het kritieke tijdperk te zijn voor een vergif als phenylurethaän in bepaalde concentratie, zooals ik elders heb uitééngezet[2]).

Op dezelfde wijze als na de bestraling met radium somtijds enkele eieren van het broedsel aan den dood ontsnappen en tot volkomen normale jongen worden, kwam na de behandeling met $\frac{n}{12000}$ phenylurethaan somtijds een enkele Daphnia tot ontwikkeling, welke in water overgebracht een normale nakomelingschap kreeg. Ook hier dus een bewijs, dat de weerstand der eieren tegenover het gevaar, dat hun van de buitenwereld dreigt, zelfs bij deze parthenogenetische dieren, uitermate verschillend kan zijn. Gaan ze in den strijd te gronde, dan is echter de wijze van reactie in de beide proefreeksen zeer verschillend. Terwijl deze bij de radiumbestraling tot een onherroepelijken ondergang aan het einde van het blastula-tijdperk leidt, ziet men bij de behandeling met phenylurethaan ten gevolge van een schadelijken invloed, die in dezelfde gevoelige periode werkzaam is, voldragen, doch na de geboorte niet levensvatbare monstra ontstaan, welke niet geresorbeerd, doch uit de broedruimte uitgestooten worden.

*Samenvatting der resultaten.*

De eicellen van Daphnia pulex zijn in het laatste stadium der rijping het meest gevoelig voor de bestraling met radium. Tijdens de embryonale ontwikkeling neemt de weerstand toe.

Bij een zelfde broedsel kan men dikwijls individueele verschillen in de gevoeligheid tegenover radiumstralen zien. Het ei, dat den schadelijken invloed weerstand biedt, ontwikkelt zich dikwijls tot

[1]) Jenaische Zeitschr. Bd. 43, 1907.

[2]) L. c. bldz. 289.

een volkomen normaal dier, dat zelf vruchtbaar wordt. De zeldzame afwijkend gebouwde exemplaren worden zelden volwassen. Slechts eenmaal gelukte het uit zulk een abnormaal jong een nakomelingschap te kweeken, die geen afwijkingen meer vertoonde.

Bij de geslachtsrijpe Daphnia is door uren lange bestraling met 0.7 mgr. radiumbromide alleen de vruchtbaarheid, niet het leven in gevaar. Van den tijd der bestraling hangt het af, of uitsluitend de rijpe eieren, de oöcyten, of ook de oögonia beschadigd zijn. De gemakkelijke waarneming van een groot nageslacht geeft de gelegenheid dit in elk speciaal geval na te gaan.

Daphnia's vóór de geslachtsrijpheid bieden langen tijd weerstand aan de radiumbestraling. Eerst bij uren lang verblijf op de kapsel met 0.7 mgr. radiumbromide is ook hier de latere oögenese in gevaar.

Uit het microscopisch onderzoek van eierstok en embryo's blijkt, dat de schadelijke werking van het radium zich eerst aan het einde van het blastula-tijdperk door een uiteenvallen van de chromatine verraadt, ook wanneer de eicellen reeds tijdens verblijf in het ovarium getroffen waren.

Schakelt men door filtratie de $\beta$-stralen uit, dan wordt de schadelijke invloed van het radium opgeheven of zeer verminderd, hetgeen bewijst, dat hoofdzakelijk de $\beta$-stralen voor den ondergang verantwoordelijk zijn.

**Scheikunde.** — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer F. E. C. SCHEFFER: *„Over het phenylcarbaminezuur en zijn homologen"*.

(Mede aangeboden door den Heer F. M. JAEGER).

1. *Inleiding.*

Door DITTE werd in 1887 waargenomen, dat aniline met koolzuur onder hoogen druk en bij temperaturen lager dan kamertemperatuur kan reageeren onder vorming van een vaste verbinding, welke uit gelijke moleculaire hoeveelheden aniline en koolzuur bestaat [1]). Bovendien kan men uit zijne verhandeling afleiden, dat bij gewone temperatuur ontmenging optreedt. Eenige jaren geleden zijn door Dr. J. J. POLAK in het organisch chemisch laboratorium der Amsterdamsche Universiteit een aantal proeven verricht met hetzelfde stelsel van stoffen [2]); ook hij kon het bestaan van een verbinding constateeren en de resultaten van zijn analyse wezen op dezelfde samenstelling, als door DITTE werd aangegeven. Verder bleek bij zijn onderzoekingen, dat de verbinding bij verhitting naast koolzuurrijke vloeistof en damp smelt, vóórdat de meniscus vloeistof-damp verdwijnt, onder vorming van een tweede vloeibare laag; dit wekte bij mij het vermoeden, dat het systeem aniline-koolzuur in zijn gedrag analogie zou vertoonen met de gashydraatsystemen van BAKHUIS ROOZEBOOM en met het systeem zwavelwaterstof-water, waarvan ik de verschijnselen in deze Verslagen uitvoerig heb beschreven [3]). Uit de beneden vermelde waarnemingen zal blijken, dat de verbinding, welke m.i. als een carbaminezuur beschouwd moet worden, in het P-T diagram aanleiding geeft tot het optreden van een quadrupelpunt, waar vaste verbinding, twee vloeistoflagen en gas coëxisteeren en dat de driephasenlijnen, welke elkaar in dit quadrupelpunt snijden, met voldoende nauwkeurigheid bepaald kunnen worden. Tevens levert dit systeem een nieuwe toepassing van den quadrupelpuntsregel, welken ik in 1912 opstelde [4])

---

[1]) Compt. rend. **105**. 612. (1887).

[2]) Niet gepubliceerd. De resultaten van het onderzoek zijn door Dr. POLAK welwillend te mijner beschikking gesteld, waarvoor ik hem gaarne ook hier mijn dank betuig.

[3]) Deze Verslagen **19**, 1057 (1910/11) en **20**, 104 (1911/12).

[4]) Deze Verslagen **21**, 446 (1912/13).

en welke bijna gelijktijdig door SCHREINEMAKERS in het Zeitschrift für physikalische Chemie werd beschreven [1]).

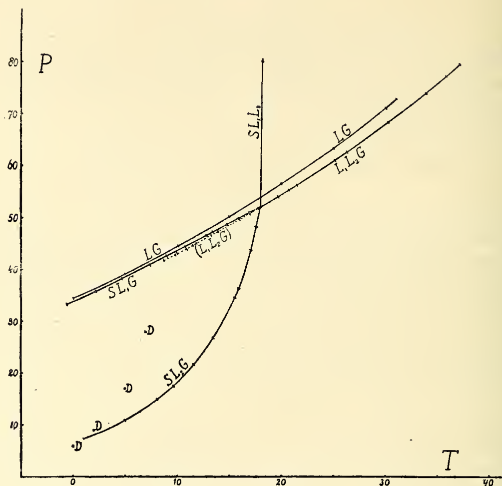



Fig. 1.

Vervolgens heb ik dit onderzoek tot de drie toluïdinen uitgebreid en is het mij gelukt de bestaansgrenzen van drie verbindingen te bepalen. Van twee dezer verbindingen heb ik door analyse de samenstelling bepaald; van de derde was de samenstelling reeds door DITTE gevonden. De groote analogie tusschen de drie systemen zal waarschijnlijk de conclusie rechtvaardigen, dat deze verbindingen de drie isomere tolylcarbaminezuren zijn.

2. *Het systeem aniline-koolzuur; het phenylcarbaminezuur.*

Uit „anilin purissimum" van MERCK, door contact met de lucht rood gekleurd, werd door fractionneeren een middenfractie afgezonderd; een geringe hoeveelheid hiervan werd met behulp van een lange glascapillair in de Cailletetbuis gebracht. Als proefbuis gebruikte ik een buis met verwijd boveneinde van dezelfde gedaante als bij mijn onderzoekingen over de systemen aether-water [2]) en hexaan-water [3]). Voor de vulling met koolzuur werd de proefbuis

[1]) Zeitschr. f. physik. Chem. **82**. 59 (1913).

[2]) Deze Verslagen **21** 437. (1912/13).

[3]) Deze Verslagen **22**. 427. (1913/14).

met een slijpstuk verbonden aan een toestel, bestaande uit een ontwikkelingsapparaat voor koolzuur, dat uit verdund zwavelzuur en natriumbicarbonaat werd verkregen en met phosphorpentoxyd werd gedroogd, een apparaat voor het verkrijgen van een hoog vacuum, bestaande uit een vat met kokosnootkool en een Geisslerschebuis, een buis voor condensatie van het koolzuur (met behulp van vloeibare lucht) en een vat van ca. $^1/_2$ Liter als koolzuurreservoir.[1]) Daar het bij deze proeven uitsluitend mijn doel was driephasendrukkingen te bepalen, was een bepaling van de samenstelling der gebruikte mengsels overbodig. Voor de eerste waarnemingen gebruikte ik een mengsel met groote overmaat koolzuur. Toen de proefbuis na de vulling in de persbus was vastgeschroefd en het mengsel tot gewone temperatuur opwarmde, bleek de vaste stof bij gewone temperatuur slechts onder hoogen druk houdbaar te zijn. Was het beschikbare volume zóó klein, dat er slechts een kleine hoeveelheid gas aanwezig was, dan trad bij gewone temperatuur een driephasenevenwicht van verbinding naast een dunvloeibare (koolzuurrijke) laag en gas op bij ongeveer 50 atmosferen druk. Werd de druk verkleind, dan verdween de vloeistof onder heftig koken en bleef vast naast gas over. Beneden 30 atmosferen ontleedde de vaste stof onder vorming van een anilinerijke vloeistof, terwijl een sterke gasontwikkeling in deze laag was waar te nemen. De vaste verbinding ontleedt derhalve in vloeistof en gas bij drukverlaging. Het is duidelijk, dat de druk, waarbij deze ontleding juist begint, de driephasencoëxistentie van verbinding, anilinerijke vloeistof en gas aangeeft. Bij toenemende vergrooting van volume houden wij coëxistentie van vloeistof naast gas. Bij gewone temperatuur is het phenylcarbaminezuur dus slechts bestaanbaar bij drukkingen boven ca. 30 atmosferen. In volkomen analogie met de gashydraten zijn derhalve de dissociatiespanningen van deze verbinding driephasenevenwichten. Dit geldt ook voor de bepalingen, welke Ditte uitvoerde door waarnemen van den druk, waarbij zich gas uit de kristallen begint te vormen, of van den druk, waar deze ontwikkeling ophoudt, welke natuurlijk theoretisch dezelfde, maar practisch volgens Ditte verschillend zijn.[2]) Ditte wijt dit laatste aan onnauwkeurigheden van de temperatuurbepaling; m. i. heeft hieraan stellig de traagheid der transformatie $S \rightarrow L + G$ schuld. Bij mijn vroegere onderzoekingen over het systeem zwavelwaterstof-water heb ik een dergelijke langzame transformatie ook kunnen constateeren.[3])

[1]) Zie ook: Deze Verslagen **19**. 1058. (1910/11).

[2]) l.c.

[3]) l.c.

Om de driephasendrukkingen nauwkeurig te kunnen bepalen, heb ik om de proefbuis een wijd cilindrisch, aan het benedeneinde vernauwd vat gebracht, waarin alcohol door middel van vertikaal bewegende loodplaten werd geroerd; de verwarming geschiedde electrisch; afkoeling werd verkregen door inbrengen van vast koolzuur. Bij de waarnemingen bij klein volume bleek nu, dat de maximale temperatuur, waarbij de verbinding naast gas bestaan kan, ca. 18° is. Bij deze temperatuur ligt het quadrupelpunt; de druk is ca 52 atmosferen. In dit punt treedt snijding op van de driephasenlijnen S (verbinding), $L_1$ (koolzuurrijke vloeistof) en G (gas), welke bij temperaturen beneden het quadrupelpunt stabiel is en niet boven het quadrupelpunt verlengd kan worden, $S + L_2 + G$, welke in de buurt van het quadrupelpunt een snel met de temperatuur toenemende waarde van $\frac{dp}{dT}$ vertoont, $L_1 + L_2 + G$, welke boven het quadrupelpunt stabiele evenwichten aangeeft, maar ook beneden het quadrupelpunt gemakkelijk te bepalen is; deze evenwichten zijn dan echter metastabiel ten opzichte van de vaste phase. De vierde driephasenlijn $S + L_1 + L_2$ beweegt zich van het quadrupelpunt snel naar hoogeren druk. De ligging der driephasenlijnen is aangegeven in fig. 1 met de bovenaangegeven letters; de quantitatieve gegevens zijn in tabel 1 samengenomen; ze zijn verkregen met twee mengsels; het éene bevatte een groote, het tweede een kleine overmaat koolzuur; de bepalingen, met beide mengsels verricht, stemmen zeer goed overeen. Aan de hand van de figuur zullen de in het begin van deze paragraaf beschreven verschijnselen duidelijk zijn. Zoolang er gas aanwezig is, kan de vaste verbinding alleen bestaan bij drukkingen, welke hooger zijn dan de driephasenlijn $SL_2G$. De bepalingen van Ditte, welke zoowel in de figuur als in de tabel zijn aangegeven met de letter D, blijken merkbaar van de mijne af te wijken; alleen in de buurt van 0° komen de waarnemingen vrijwel overeen. Het maakt den indruk, dat Ditte de punten heeft bepaald, waar zich bij drukverhooging vaste stof vormt en dat door vertraging der transformatie $L + G \rightarrow S$ de drukkingen veel te hoog gevonden zijn, hoewel Ditte vermeldt, dat hij de drukkingen waarnam, waarbij de gasontwikkeling ophield. In dit opzicht zijn de verschijnselen weer in volkomen analogie met het systeem zwavelwaterstof-water, waar Cailletet en Bordet's waarnemingen analoge afwijkingen van de mijne vertoonen [1]). Ditte maakt echter voor zijn waarnemingen geen aanspraak op groote nauwkeurigheid; hij zegt,

[1]) Deze Verslagen 19. 1060, fig. 2 en tabel op 1062 (1910/11).

dat zijne bepalingen slechts globaal zijn, maar toch een indruk kunnen geven van de wijze, waarop het „anilinecarbonaat" dissocieert.

TABEL 1.

| $LG(CO_2)$ | | $L_1L_2G$ | | $SL_2G$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | P | T | P | T | P |
| 0 | 34.4 | 8.7 | 41.8 | 0 | 6 D |
| 5.0 | ·39.0 | $9.8^5$ | 42.8 | $0.9^5$ | 7.4 |
| 10.1 | 44.6 | 10.0 | 43.2 | 2 | 9 D |
| 15.0 | 50.2 | 10.9 | 43.9 | 5.0 | 10.9 |
| 20.0 | 56.6 | 11.5 | 44.8 | 5 | 17 D |
| 25.0 | 63.4 | $11.8^5$ | 45.1 | 7 | 28 D |
| 30.0 | 71.1 | $13.2^5$ | 46.6 | 8.1 | 15.0 |
| **31.1** | **72.9** | $13.9^5$ | 47.4 | 9.7 | 17.5 |
| | | 16.0 | 49.7 | 11.6 | 21.7 |
| $SL_1G$ | | $16\ 9^5$ | 50.8 | 13.5 | 26·7 |
| T | P | 17.8 | 51.8 | 15.5 | 34.6 |
| | | 19.7 | 54.1 | 15.9 | 36.4 |
| —0.6 | 33.3 | 20.7 | 55.4 | 17.1 | 43.8 |
| +2.2 | 35.7 | 21.5 | 56.3 | 17.6 | 48.3 |
| 4 7 | 38.1 | $25.1^5$ | 61.1 | | |
| 7.4 | 40.8 | 26.3 | 62.7 | $SL_1L_2$ | |
| 9.0 | 42.5 | $30.2^5$ | 68.4 | T | P |
| 10.8 | 44.4 | 33.9 | 74.0 | | |
| 12.8 | 46.5 | 35 8 | 77.1 | 18.0 | 52 |
| 13.4 | 47.3 | $\mathbf{37.1^5}$ | **79.5** | 18.2 | 80 |
| 14.8 | 48.6 | | | | |
| 15.9 | 49.8 | Quadrupelpunt | | 18.0° | 52.0 atm. |
| $16.9^5$ | 50.9 | | | | |

Indien wij de driephasenlijn $L_1L_2G$ naar hoogere temperatuur vervolgen, wordt de fluïditeit van de bovenlaag steeds grooter en bij 37° vertoont zich het kritische verschijnsel; het kritisch eindpunt ligt 6° en ca. 7 atmosferen hooger dan het kritisch punt van koolzuur. Uit de figuur leiden wij verder af, dat de driephasenspanning

$L_1L_2G$ bij toenemende temperatuur meer van de koolzuurspanning gaat afwijken; bij het quadrupelpunt bedraagt de afwijking bijna 2 atmosferen; bij het kritisch punt van koolzuur ongeveer $3^1/_2$ atmosfeer.

Uit den reeds genoemden quadrupelpuntsregel, welken ik vroeger aldus heb geformuleerd: *Het gebied, dat in de P-T-projectie geen metastabiele verlengden van driephasenlijnen bezit, is dat van coëxistenties van phasen van op elkaar volgende samenstelling* [1]) volgt, dat het gebied tusschen $SL_1G$ en $SL_1L_2$ aan de genoemde voorwaarde voldoet. In dit gebied, dat behalve door de beide genoemde driephasenevenwichten tevens begrensd wordt door $SL_1G$ en $L_1L_2G$ resp. door $SL_1L_2$ en $SL_2G$, komen de coëxistenties voor van de twee phasen, welke de begrenzende driephasenevenwichten gemeen hebben, in dit geval dus $S + L_1$, $L_1 + G$ en $S + L_2$. Daar deze coëxistenties volgens genoemden regel betrekking moeten hebben op phasen, die elkaar opvolgen in samenstelling, is de genoemde volgorde $GL_1SL_2$; de samenstelling van de verbinding ligt dus tusschen die der beide coëxisteerende vloeistoflagen in. Op de driephasenlijn $SL_1L_2$ in de buurt van het quadrupelpunt heeft derhalve de transformatie $S \rightleftarrows L_1 + L_2$ plaats.

3. Om de samenstelling van de verbinding te leeren kennen heeft Dr. Polak een afgewogen hoeveelheid aniline op overmaat koolzuur in een toegesmolten buis bij gewone temperatuur laten inwerken. Na vorming van de verbinding werd de buis bij — 80° weder geopend en geplaatst in een bad van ca. — 60°; na een half uur werd de buis weder dichtgesmolten en na opwarmen tot gewone temperatuur gewogen. Deze analyse leverde de samenstelling $C_6H_5NH_2 . 1.01\ CO_2$.

Op weinig afwijkende wijze heb ik zelf een drietal analyses uitgevoerd; de methode van onderzoek was dezelfde als die, welke ik in mijn tweede verhandeling over het systeem zwavelwaterstof-water heb beschreven [2]); de overmaat koolzuur werd bij — 80° met behulp van een waterstraalpomp weggezogen. Voor de hoeveelheid koolzuur in grammoleculen, welke zich met één mol. aniline verbindt, werd achtereenvolgens gevonden 0.98, 0.99 en 0.98. De verbinding bestaat dus uit een gelijk aantal moleculen aniline en koolzuur.

4. *Het systeem o-toluïdine-koolzuur; het o-tolylcarbaminezuur*

Ook in het systeem o-toluïdine-koolzuur heb ik het optreden van een verbinding kunnen constateeren; het quadrupelpunt ligt hier

[1]) l.c.

[2]) l.c.

echter bij lagere temperatuur. Daar het onderzoek van de even

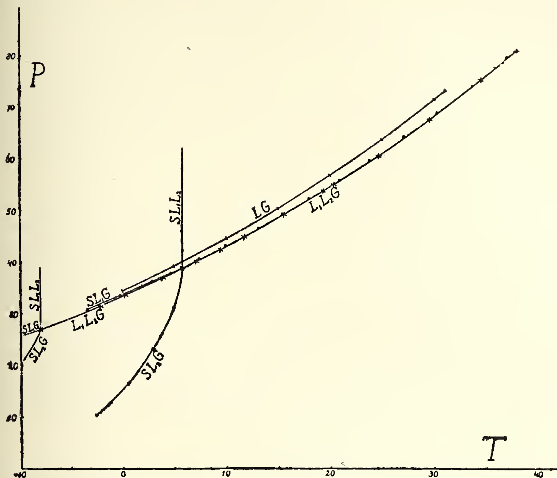



Fig. 2.

wichten bij lage temperatuur experimenteele moeilijkheden meebrengt, heb ik volstaan met de bepaling van het quadrupelpunt en van de driephasenlijn $L_1L_2G$ met het kritisch eindpunt. De gevonden driephasendrukkingen zijn in tabel 2 vermeld en in fig. 2 door kruisjes

TABEL 2.

| $L_1L_2G$ | | | |
|---|---|---|---|
| T | P | T | P |
| −2.1 | 31.5 | 19.4 | 53.5 |
| +0.3 | 33.6 | 20.4 | 54.8 |
| 3.9 | 36.8 | 24.7 | 60.1 |
| 7.3 | 40.1 | 29.6 | 67.1 |
| 9.5 | 42.3 | 34.5 | 74.9 |
| 11.8 | 44.7 | 38.1 | 80.8 |
| 15.6 | 49.0 | | |
| Quadrupelpunt | | −7.5° | 27.5 atm. |

aangegeven. Bij temperaturen beneden het quadrupelpunt treedt weder eene verbinding op, die ook reeds door DITTE is waargenomen en volgens hem uit gelijke moleculaire hoeveelheden o-toluïdine en koolzuur bestaat. Zelf heb ik de samenstelling van deze verbinding niet bepaald; de toepassing van de boven beschreven analysemethode levert bij de lage temperaturen vrij groote moeilijkheden. De mogelijkheid, dat de vaste stof zuiver o-toluïdine zou zijn, is uitgesloten, daar het quadrupelpunt bij hoogere temperatuur ligt dan het smeltpunt van de zuivere stof. (Zie tabel 5).

5. *Het systeem m-toluïdine-koolzuur, het m-tolylcarbaminezuur.*

In het systeem m-toluïdine-koolzuur treedt een quadrupelpunt $SL_1L_2G$ op bij een temperatuur, welke tusschen die van o-toluïdine-koolzuur en van aniline-koolzuur ligt. De driephasenlijnen hebben weder dezelfde relatieve ligging als boven beschreven werd. De waarnemingen, betrekking hebbende op de drie driephasenlijnen $L_1L_2G$, $SL_1G$ en $SL_2G$, zijn in tabel 3 vermeld en in figuur 2 door driehoekjes aangegeven. In deze figuur vindt men tevens de dampspanningen van zuiver koolzuur (zie tabel 1).

TABEL 3.

| $L_1L_2G$ | | $SL_2G$ | | $SL_1G$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | P | T | P | T | P |
| 7.5 | 40.5 | −2.6 | 10.4 | −3.4 | 30.8 |
| 10.0 | 43.1 | +0.6 | 16.5 | −0.2 | 33.4 |
| 13.2 | 46.4 | 2.9 | 23.1 | +1.9 | 35.3 |
| 15.5 | 49.2 | 5.0 | 31.5 | 2.9 | 36.2 |
| 18.0 | 52.1 | | | 4.7 | 37.7 |
| 20.9 | 55.7 | | | 5.7 | 38.6 |
| 23.9 | 59.5 | | | | |
| 27.3[5] | 64.2 | | | | |
| 30.3 | 68.5 | | | | |
| 33.7 | 73.8 | Quadrupelpunt | | 6.3° | 39.2 atm. |
| 35.8[5] | 77.4 | | | | |
| 37.2 | 79.6 | | | | |

6. De analyse van de verbinding volgens de in § 3 genoemde

methode leverde wisselende waarden in tegenstelling met die van aniline en van p-toluïdine, zooals in § 8 blijken zal. Voor de hoeveelheid koolzuur, die zich met één molekuul aniline verbindt, werd achtereenvolgens gevonden 0.76, 0.79, 0.85, 0.86, 0.88, 0.88, 0,93, 0.89, 0.86, 0.92 en 0.89 mol. Deze waarden voor het koolzuurgehalte zijn hoogstwaarschijnlijk alle te klein. De oorzaak van deze afwijking is m. i. de volgende. Vloeibaar koolzuur en m-toluïdine zijn weinig mengbaar. De vorming van de verbinding bij afkoeling heeft dus in hoofdzaak plaats op de grens der beide lagen. Hierdoor wordt voortdurend een wand van vaste stof gevormd, die de beide lagen scheidt. Er kan dus een deel van het toluïdine aan de inwerking van koolzuur onttrokken worden. Het is duidelijk, dat na wegzuigen van de koolzuurovermaat de hoeveelheid gebonden koolzuur te klein gevonden wordt. Om de vorming zoo volledig mogelijk te doen geschieden werden de buizen meerdere dagen in ijs gehouden; bij de opvolgende bepalingen is deze tijdsduur stijgende van 2 tot 10 dagen. Het blijkt dus, dat de tijd geen grooten invloed heeft op het analyse resultaat. Bij de laatste bepaling werd de buis gedurende 7 uren met ijs en zout (—15 tot —20°) afgekoeld; ze levert eveneens een te laag resultaat. Het vermoeden, dat het m-toluïdine onzuiver zou zijn, bleek onjuist, daar voor het smeltpunt van de aceetverbinding de juiste waarde van 65° gevonden werd. Uit de bovengenoemde bepalingen meen ik te mogen concludeeren, dat de verbinding eveneens uit gelijke moleculaire hoeveelheden toluïdine en koolzuur bestaat.

7. *Het systeem p-toluïdine-koolzuur; het p-tolylcarbaminezuur.*

Het systeem p-toluïdine-koolzuur levert in de P-T-figuur een driephasenlijn $L_1L_2G$, welke weinig van die van de genoemde systemen afwijkt. (Zie fig. 3). Het quadrupelpunt $SL_1L_2G$ ligt hier bij hoogere temperatuur; de vier driephasenlijnen, welke elkaar in dit quadrupelpunt snijden, zijn in fig. 3 aangegeven; de quantitatieve gegevens in tabel 4. De relatieve ligging der vier phasen is hier dezelfde als bij de vorige stelsels. Het stabiele deel van de driephasenlijn $SL_2G$ eindigt bij lagere temperatuur in een tweede quadrupelpunt $SS_BL_2G$ ($S_B$ is vast p-toluïdine). In de vorige systemen ligt het corresponderende quadrupelpunt bij lagere temperatuur en druk; in dit systeem verschilt de temperatuur van beide quadrupelpunten weinig van de kritische temperatuur van koolzuur. De driephasenlijnen $SL_2G$ en $S_BL_2G$ zijn gemakkelijk te bepalen door bij constanten druk te verhitten en de temperatuur af te lezen, waarbij vloeistof optreedt. Van de driephasenlijn $SS_BL_2$ kunnen wij zonder verder onderzoek

zeggen, dat de helling groot zal zijn. Van drie der driephasenlijnen, die door het quadrupelpunt $SS_BL_2G$ gaan, kon dus de ligging ge-

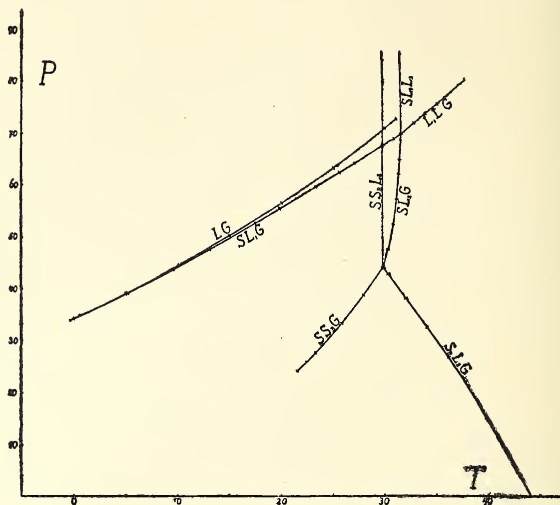



Fig. 3.

makkelijk worden aangegeven. De vierde driephasenlijn $SS_BG$ was echter lastig te vinden. De genoemde quadrupelpuntsregel gaf mij echter de aanwijzing, waar ze gevonden moest worden. Voor de ligging van deze vierde driephasenlijn bestaan twee mogelijkheden, die door fig. 4*a* en *b* worden weergegeven. De driephasenlijn $SS_BG$

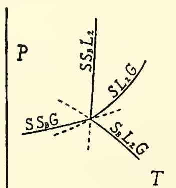



Fig. 4*a*.

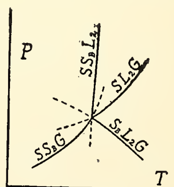



Fig. 4*b*.

moet immers liggen tusschen de metastabiele verlengden van $SL_2G$ en $S_BL_2G$ (fig. 4*a*) of tusschen die van $SL_2G$ en $SS_BL_2$ (fig. 4*b*). Andere liggingen zijn onmogelijk, daar anders tweephasencoëxistenties

zouden voorkomen met een hoek grooter dan 180°; ik heb in de genoemde verhandeling aangetoond, dat dit onmogelijk is. Gaat men nu met den quadrupelpuntsregel na, welke volgorde der phasen volgens fig. 4*a* zou optreden, dan blijkt, dat tusschen $SS_BL_2$ en $SL_2G$ geen metastabiele verlengden optreden, dat de tweephasen-coëxistenties in dit gebied zijn: $G + S$, $S + L_2$ en $L_2 + S_B$ en dat de volgorde der phasen aangegeven wordt door $GSL_2S_B$.

Uit fig. 4*b* zou op analoge wijze volgen, dat de volgorde der phasen $SGL_2S_B$ zou zijn. Deze volgorde geeft afnemend koolzuurgehalte aan, daar $S_B$ vast p-toluïdine voorstelt. Dat nu de verbinding S rijker aan koolzuur zou zijn dan de gasphase, die practisch uit zuiver koolzuur bestaat, is uitgesloten; p-toluïdine heeft bij deze temperatuur een zeer geringe dampspanning (kpt. 200°) en het gehalte aan p-toluïdine in den damp is dus zeer klein. De eenige mogelijkheid wordt dus aangegeven door fig. 4*a*. Ik heb daarop in het gebied

TABEL 4.

| $SL_1G$ | | $L_1L_2G$ | | $SL_2G$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | P | T | P | T | P |
| −0.4 | 33.9 | 32.8 | 72.0 | 30.2 | 47.7 |
| +5.1 | 39.1 | 33.9 | 73.9 | 30.8 | 52.5 |
| 9.6 | 43.6 | $35.0^5$ | 75.7 | 31.1 | 57.3 |
| 13.1 | 47.6 | $37.7^5$ | 80.4 | 31.3 | 62.2 |
| 17.5 | 52.7 | | | 31.4 | 65.0 |
| 19.8 | 55.5 | $SS_BG$ | | | |
| 23.3 | 59.8 | T | P | $S_BL_2G$ | |
| 25.6 | 62.4 | | | T | P |
| 27.0 | 64.3 | 21.5 | 24.2 | | |
| 29.7 | 67.7 | 23.3 | 27.6 | 30.3 | 43.0 |
| 30.8 | 69.0 | 25.8 | 33.4 | 32.0 | 38.2 |
| | | 27.9 | 38.8 | 34.0 | 32.5 |
| | | | | 36.2 | 26.8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quadrupelpunt | $SL_1L_2G$ | 31.5° | 70 atm. |
| | $SS_BL_2G$ | 29.7° | 44 atm. |

tusschen de metastabiele verlengden van $SL_2G$ en $S_BL_2G$ naar het ontbrekende driephasenevenwicht gezocht. De bepalingen waren lastig; ik heb de evenwichten niet anders kunnen vinden dan door bij constante temperatuur na te gaan of drukstijging of drukdaling na verloop van tijd optreedt. Het is duidelijk, dat beneden de driephasenlijn $SS_BG$ (fig. 4*a*) de tweephasencoëxistentie $S_B + G$ optreedt en daar boven $S + G$ en $S + S_B$, daar S in samenstelling tusschen G en $S_B$ ligt en de coëxistentie van de beide vaste stoffen zich naar hoogeren druk zal uitstrekken [1]). Op de driephasenlijn treedt dus de transformatie $S_B + G \rightleftarrows S$ op. De bovenste pijl geeft de omzetting aan bij volumeverkleining, de onderste bij uitzetting. Treedt bij bepaalde temperatuur een drukdaling op, dan is men boven $SS_BG$; neemt de druk toe, dan is men beneden $SS_BG$. Op deze wijze werd een bovenste en een onderste grens gevonden, die niet meer dan één atmosfeer, soms enkele tienden van een atmosfeer, uit elkaar lagen. De traagheid van de transformatie maakte deze wijze van werken nookzakelijk; de onderste grens bleek beter reproduceerbare waarden te leveren dan de bovenste. De verklaring hiervoor moet m.i. worden gezocht in het feit, dat de transformatie $S \rightarrow S_B + G$ gemakkelijker plaats grijpt dan de omgekeerde. Dit ligt ook voor de hand, daar de inwerking van G op $S_B$ uitsluitend op de grens van de twee phasen kan plaats hebben en een vorming van een phase S de inwerking kan stopzetten. De waarden van de onderste grens zijn dan ook in tabel 4 vermeld; de bovenste grens wijkt bovendien, zooals gezegd, vaak niet meer dan een fractie van een atmosfeer van de onderste af. De relatieve ligging der driephasenlijnen is werkelijk die, welke met behulp van den quadrupelpuntsregel voorspeld werd.

8. De analyse van de verbinding leverde geen moeilijkheden. De resultaten van de analyses waren resp. 1,00, 0,97 en 0,99 mol. $CO_2$ op 1 mol. *p*-toluïdine. De verbinding bevat dus gelijke moleculaire hoeveelheden van de beide componenten.

9. *Overzicht van de resultaten.*

De vier onderzochte systemen leveren vrijwel samenvallende driephasenlijnen $L_1L_2G$. De kritische eindpunten liggen dicht bij elkaar. Het groote verschil tusschen de stelsels zit alleen in de ligging der quadrupelpunten. In tabel 5 zijn de vier systemen naar opklimmende quadrupelpuntstemperaturen gerangschikt. De volgorde in temperatuur

[1]) Dit is ook onmiddellijk uit de relatieve ligging der driephasenlijnen in fig. 4*a* af te leiden.

TABEL 5.
Quadrupelpunten $SL_1L_2G$.

| o-toluïdine | | m-toluïdine | | aniline | | p-toluïdine | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | P | T | P | T | P | T | P |
| —7.5 | 27.5 | 6.3 | 39.2 | 18 0 | 52.0 | 31.5 | 70 |

Smeltpunten.

| m-toluïdine | o-toluïdine | aniline | p-toluïdine |
|---|---|---|---|
| —30 | —15 | —7 | 44 |

is dezelfde als die in druk. Dit is trouwens ook door het samenvallen der $L_1L_2G$ lijnen noodzakelijk.

De volgorde der smeltpunten van de zuivere componenten wijkt alleen hiervan af, doordat *m*-toluïdine en *o*-toluïdine van plaats verwisseld zijn. Ik heb de vier in tabel 5 opgegeven smeltpunten zelf bepaald. Dat van *m*-toluïdine was, voor zoover ik kan nagaan, niet bekend; dat van *o*-toluïdine stemt overeen met de waarneming van Knoevenagel [1]). Voor het smeltpunt van aniline vindt men —8° opgegeven; mijn waarde ligt iets hooger; de waarde van Timmermans (—6,15°) ligt weer hooger dan de mijne [2]). Ik meen echter uit het kleine smelttraject, dat mijn praeparaat vertoonde, te mogen besluiten, dat de stof zuiver was. Voor het smeltpunt van *p*-toluïdine vindt men in de leerboeken 45°; mijn waarde is lager en stemt overeen met de met groote zorg uitgevoerde bepaling van Hulett (43.9°) [3]).

De verbindingen, welke in deze systemen optreden bevatten de componenten in de verhouding 1 : 1. Ik meen ze derhalve als carbaminezuren te moeten beschouwen. Deze verbindingen waren nog onbekend, alleen Ditte heeft twee er van blijkbaar bij zijne proeven waargenomen. Uit de stabiliteitsgrenzen der verbindingen is duidelijk, waarom ze niet gevonden zijn; bij gewone temperatuur zijn slechts twee dezer verbindingen mogelijk (phenyl- en *p*-tolylcarbaminezuur). Het eerste ontleedt bij openen van de buizen direct in vloeistof en gas, het tweede in vast *p*-toluïdine en gas.

[1]) Ber 40. 517. (1907). Knoevenagel vindt behalve het smeltpunt van —15.5° nog een tweede, behoorende aan een metastabiele modificatie (—21°). De bepaling van Timmermans (—24.4°) zal misschien op deze metastabiele modificatie betrekking hebben.

[2]) Timmermans. Bull. Soc. Chim. Belg. 27. 334. (1914).

[3]) Hulett. Zeitschr. physik. Chem. 28. 650. (1899).

Bij lage temperatuur kunnen alle bij gewone druk bestaan, maar de vorming zal bemoeilijkt worden door de reeds vroeger genoemde reden, dat de verbinding de inwerking der twee phasen (gas en vast) door afsluiting kan stopzetten.

Opmerking verdient, dat blijkbaar door inwerking der aromatische aminen op koolzuur vrije zuren ontstaan in tegenstelling met ammoniak en de aliphatische aminen, die zouten vormen.

Van de genoemde carbaminezuren zijn enkele zouten bekend. Tracht men door dubbele omzetting met zuur de vrije zuren te krijgen, dan ontleden ze in koolzuur en de vrije aminen; alleen bij hoogen druk of lage temperatuur zouden de vrije carbaminezuren gevormd kunnen worden. Toch is het mogelijk en zelfs waarschijnlijk, dat deze zuren, hoewel ze in vasten toestand bij gewone temperatuur slechts onder verhoogden druk bestendig zijn, in de vloeistoffen $L_2$ voorkomen. De aanname, dat voor bepaalde reacties de carbaminezuren als tusschenproduct kunnen optreden, is dus zeker niet onmogelijk te achten.

Uit de P-T-figuren blijkt, dat het quadrupelpunt van p-tolylcarbaminezuur hooger ligt dan dat van phenylcarbaminezuur. Mogelijk ligt het quadrupelpunt van één der xylylcarbaminezuren bij nog hooger temperatuur. Het as-o-xylidine lokt zeker tot onderzoek uit; het quadrupelpunt zal hier waarschijnlijk naar hooger temperatuur zijn verschoven, daar het smeltpunt hooger ligt dan dat van p-toluïdine. Het is mogelijk, dat bij dit systeem het quadrupelpunt reeds is verdwenen; we zouden dan overgaan op een ander type van binaire systemen; het gedrag zal dan analoog worden aan dat van zwavelwaterstof-ammoniak, waarvan ik de bijzonderheden vroeger heb beschreven. [1])

Denkt men zich het quadrupelpunt geleidelijk naar hooger temperatuur verschoven, dan zal het verdwijnen, als het samenvalt met het kritisch eindpunt. Een geleidelijke verandering is niet te realiseeren, daar de verandering in constitutie discontinu plaats heeft. Hier is echter mogelijk, dat door geschikte keuze der homologen de verschuiving met kleine sprongen verandert en de overgang van het door deze systemen geleverde type in dat van zwavelwaterstof-ammoniak duidelijk te voorschijn komt.

In zijn dissertatie werd door Büchner reeds op het bestaan van een dergelijken overgang bij systemen zonder verbinding gewezen. Ik zal de verschijnselen, die zich bij deze transformaties voordoen, in een volgende verhandeling beschrijven.

*Delft*, 30 Augustus 1918. *Technische Hoogeschool.*

[1]) Dissertatie. (1909). Zeitschr. physik. Chemie. 71. 214 en 671. (1910).

**Scheikunde.** — De Heer P. ZEEMAN biedt namens de Heeren A. SMITS en J. M. BIJVOET een mededeeling aan: „*Over de beteekenis van het Volta-effect bij de meting van electromotorische evenwichten*".

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

*Inleiding.*

Vele physici zijn van meening, dat het Volta-effect slechts eenige milli Volts bedraagt en dat de electromotorische kracht van een electrische cel practisch uitsluitend in de potentiaalsprongen metaal-electrolyt zetelt, zoodat deze alleen in aanmerking genomen behoeven te worden; er zijn er zelfs die meenen, dat het Volta-effect theoretisch nul is. Het is voornamelijk de Duitsche school, die aanneemt dat het Volta-effect t. o. v. den potentiaalsprong metaal-electrolyt verwaarloosd kan worden. Daartegenover staat, dat een groot aantal onderzoekers meenen gevonden te hebben, dat het Volta-effect, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ en een nog grootere fractie van de electromotorische kracht van een cel kan uitmaken en dus wel 1 Volt kan bedragen.

De meeningen omtrent de grootte van het Volta-effect zijn dus zéér verdeeld, hetgeen zijn grond vindt in de groote moeilijkheden waarmede men bij de bepaling van het Volta-effect te kampen heeft.

Bij toepassing van de nieuwe beschouwingen omtrent de electromotorische evenwichten [1]) op het Volta-effect blijkt, dat al mocht dit effect bij metalen in den innerlijken evenwichtstoestand klein zijn, het bij polarisatie-verschijnselen groot zal moeten worden, zoodat wij dan zeker voor deze gevallen het Volta-effect niet mogen verwaarloozen.

2. *De verandering van het Volta-effect bij polarisatie en passiveering.*

Voor den potentiaalsprong van een metaal in actieven toestand t. o. v. een electrolyt geldt de betrekking:

$$\Delta_{M\,actief-L} = -\frac{0{,}058}{\nu} \log \frac{K'_{M^{\nu\cdot}} (M_S^{\nu\cdot})_{actief}}{M_L^{\nu\cdot}}$$

en zoo krijgt men voor den passieven toestand

$$\Delta_{M\,passief-L} = -\frac{0{,}058}{\nu} \log \frac{K'_{M^{\nu\cdot}} (M_S^{\nu\cdot})_{passief}}{(M_L^{\nu\cdot})}$$

waaruit volgt,

[1]) Zeitschr, f. physik. Chemie 88, 743 (1914).
„ „ „ „ 90, 723 (1915).

$$\triangle_{M\,actief-L} - \triangle_{M\,passief-L} = -\frac{0{,}058}{\nu}\,log\,\frac{(M_S^{\nu\cdot})_{actief}}{(M_S^{\nu\cdot})_{passief}}$$

Voor het Volta-effect geldt de betrekking:

$$\triangle_{M_1-M_2} = \frac{\theta_{M_1}-\theta_{M_2}}{F}.$$

waaruit, op dezelfde wijze als wij dit voor den potentiaalsprong metaal-vloeistof hebben afgeleid, volgt, dat voor het Volta-effect geldt de vergelijking:

$$\triangle_{M_1-M_2} = 0{,}058\,log\,\frac{K'_\theta(\theta_{M_1})}{(\theta_{M_2})}$$

zoodat

$$\triangle_{M_1 actief-M_2} - \triangle_{M_1 passief-M_2} = 0{,}058\,log\,\frac{(\theta_{M_1})_{actief}}{(\theta_{M_1})_{passief}}$$

Noemen wij nu

$$\frac{(M_{1S}^{\nu\cdot})_{actief}}{(M_{1S}^{\nu\cdot})_{passief}} = n$$

dan is ook

$$\frac{(\theta_{M_1})_{actief}}{(\theta_{M_1})_{passief}} = n$$

Hieruit volgt, dat, wanneer bij het polariseeren of passiveeren de verandering van den potentiaalsprong metaal-electrolyt

$$\frac{0{,}058}{\nu}\,log\,n$$

is, die van het Volta-effect

$$0{,}058\,log\,n$$

bedraagt, dus $\nu$ maal zoo groot is.

Wat wij meten is de som van deze twee veranderingen:

$$\frac{\nu+1}{\nu}\,0{,}058\,log\,n.$$

Van deze totale verandering komt dus het deel $\frac{\nu}{\nu+1}$ op rekening van het Volta-effect. Bij een éénwaardig metaal is dit dus $\frac{1}{2}$ en bij een twéèwaardig $\frac{2}{3}$ enz.

Wanneer men nu bedenkt, dat bij 't passiveeren door anodisch oplossen de potentiaalsprong metaal-electrolyt, zooals deze door meting gevonden wordt, met 1 à 2 Volt, kan veranderen (bij ijzer wordt b. v. 1,7 Volt. gevonden) dan volgt hieruit, dat volgens deze beschouwingen ook het Volta-effect een groote verandering ondergaat. [1])

[1]) Er moet nog op gewezen worden, dat het geval ijzer zeker ingewikkelder is dan het boven beschouwde geval, doordat ijzer ionen van verschillende waardigheid bevat.

*Dit werpt wel een eigenaardig licht op 't Volta-effect want nu blijkt duidelijk, dat wanneer inderdaad het Volta-effect voor metalen in den innerlijken evenwichtstoestand nul of zéér klein mocht zijn, hetgeen dus neerkomt op gelijkheid of ten naaste bij gelijkheid van den moleculairen thermodynamischen potentiaal der electronen in die metalen, dit volgens de electronen-theorie een bijzondere, karakteristieke eigenschap zou zijn voor metalen in den innerlijken-evenwichts-toestand.*

Maar afgezien van de grootte van het Volta-effect kan bij de consequente ontwikkeling van de gegeven theorie van het electromotorisch-evenwicht, het Volta-effect niet verwaarloosd worden[1]).

---

[1]) Wij willen hierbij nog opmerken, dat, de nieuwe beschouwingen omtrent de rol der electronen en het electromotorisch evenwicht consequent op een willekeurige electrische keten toepassende, men tot het resultaat komt, dat overal waar een potentiaalsprong optreedt, bij stroomdoorgang een reactie plaats grijpt, waarbij de verandering in vrije energie van de daar ter plaatse verloopende reactie. de grootte van den potentiaalsprong bepaalt. Zooals bekend bestaat deze reactie volgens de gegeven theorie aan de contactplaatsen metaal electrolyt 1o. uit het splitsen van metaal-atomen in ionen en electronen; resp uit de vorming van metaal atomen uit de hier genoemde electrisch geladen dissociatie-producten en 2o. uit den overgang van ionen en electronen uit de metaalphase in den electrolyt of omgekeerd. Aan dezen overgang uit de eene phase in de andere nemen de ionen zéér overwegend deel.

Beschouwen wij het contact metaal-metaal, dan bestaat de zooeven onder 2 genoemde overgang zéér overwegend uit de verplaatsing van electronen uit het metaal $M_1$ naar het metaal $M_2$.

Deze beschouwingswijze verschilt dus van die welke vooral in Duitsche leerboeken wordt aangetroffen, waarin de opvatting wordt gehuldigd, dat de reacties zich bij stroomdoorgang *uitsluitend* aan de contactplaatsen metaal-electrolyt afspelen.

Het is duidelijk, dat alleen dan bij toepassing van de betrekking

$$E = A - T\frac{dA}{dT}$$

op den electriciteits-overgang uit het eene metaal in het andere tot

$$A = T\frac{dA}{dT}$$

besloten mag worden, wanneer bij het hiergenoemd proces geen verandering der thermodynamische energie optreedt ($E = 0$).

Leblanc, doet dit in zijn leerboek pg. 227 (1914) en komt zoo tot het besluit dat het volta-effect klein moet zijn, omdat $\frac{dA}{dT}$ klein is.

Volgens de electronen theorie zal echter rekening gehouden moeten worden met het verschil in oploswarmte der electronen in beide metalen Bij den isothermen overgang van electriciteit tusschen beide metalen zal de *vrije energie* der electronen veranderen en bij omkeerbaar verloop in electrische energie worden omgezet, terwijl de optredende verandering der *gebonden energie* door de latente warmte tot uiting komt, welke warmte de Peltier-warmte is. Het is dan deze grootheid, de Peltier-warmte, die door $T\,\frac{dA}{dT}$ gegeven wordt en niet het Volta-effect.

3. *De experimenteele electrische potentiaal.*

Wanneer wij den potentiaalsprong metaal-electrolyt meten, doen wij dit met behulp van een hulpelectrode b.v. een calomel of waterstof-electrode m.a.w., dan maken wij een electrische keten, die bij de meting wordt gesloten. De electromotorische kracht van deze keten, waarin wij den diffusie-potentiaal tusschen $L_1$ en $L_2$ opgeheven onderstellen, wordt dan

$$E = \triangle_{M_1 - L_1} - \triangle_{M_2 - L_2} - \triangle_{M_1 - M_2}$$

waarin $\triangle_{M_1 - M_2}$ een Volta-effect is.

Stellen wij hierin $\triangle_{M_2 - L_2} =$ nul (N. waterstof-electrode) dan krijgen wij:

$$E = \triangle_{M_1 - L_1} - \triangle_{M_1 - M_2},$$

waarin wij E zullen noemen den *experimenteelen electrischen potentiaal.*

Deze uitdrukking bevat dus steeds het Volta-effect, en zoolang deze grootheid niet bekend is, en wij ook geen verdere onderstellingen over de grootte ervan invoeren, kunnen wij natuurlijk op deze wijze den sprong $\triangle_{M_1 - L_1}$ niet alléén bepalen, en daardoor ook niet de verzadigings-concentratie van de metaalionen, (welke grootheid gelijkwaardig is met de „Lösungstension" van Nernst) die berekend werd uit:

$$E = -\frac{RT}{\nu_1 F} \ln \frac{K_{M^{\nu}}}{(M_L^{\nu})} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarin $\triangle_{M_1 - M_2}$ is verwaarloosd.

Men kan dan ook, zoolang het Volta-effect onbekend is, uit de z.g. spanningsreeks geen conclusies trekken omtrent de volgorde van de verzadigings-concentraties der metaalionen. Uit het feit toch dat het metaal $M_1$, in een normaal oplossing van één zijner zouten gedompeld, bij de meting negatiever blijkt dan het metaal $M_2$, gedompeld in een 1 norm.-oplossing van een oveenkomstig zout, concludeert men dat:

$$\triangle_{M_1 - L_1} \text{ negatiever is dan } \triangle_{M_2 - L_2}$$

maar deze conclusie is streng genomen niet geoorloofd, omdat de meting alleen zegt dat $\triangle_{M_1 - L_1} - \triangle_{M_1 - M_2}$ sterker negatief is dan $\triangle_{M_2 - L_2}$.

Wij toonden aan, dat de verg. voor den exp. elec. potentiaal, in den vorm waarin zij de verzadigings-concentratie der ionen of de „Lösungstension" bevatten, het bezwaar hebben, dat het onbekende Volta-effect er in voorkomt. Geheel anders staat het nu met de nieuwe reeds vroeger gegeven vergelijking, waarin het *oplosbaarheidsproduct* van het metaal of het *oplosbaarheidsquotient* van het metalloid voor-

komt, terwijl hetzelfde gezegd kan worden van de electronen-vergelijking [1]).

Zoo werd n.l. de volgende betrekking afgeleid:

$$\Delta_{M_1-L_1}-\Delta_{M_2-L_2}=\frac{RT}{\nu_1 F}ln\frac{(M_1{}^{\nu}{}_L)}{L_{M_1}}-\frac{RT}{\nu_2 F}ln\frac{(M_2{}_L)}{L_{M_2}}+\frac{\theta_{M_1}-\theta_{M_2}}{F} \quad . \quad (2)$$

men meet echter

$$E=\Delta_{M_1-L_2}-\Delta_{M_2-L_2}-\Delta_{M_1-M_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en daar het Volta-effect

$$\Delta_{M_1-M_2}=\frac{\theta_{M_1}-\theta_{M_2}}{F}$$

volgt hieruit, dat

$$E=\frac{RT}{\nu_1 F}ln\frac{(M_{1L}^{\nu})}{L_{M_1}}-\frac{RT}{\nu_2 F}ln\frac{(M_{2L}^{\nu})}{L_{M_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waaruit het Volta-effect is weggevallen.

Deze vergelijking stelt ons dus in staat de verhouding der oplosbaarheids-producten te vinden uit de electromotorische krachten.

Bij de practische toepassing kan men voor het metaal $M_2$ de waterstofelectrode nemen, en voor $L_{H_2}$ de waarde invullen, die reeds vroeger is aangegeven, n.l. $10^{2\times-48}$ [2]);
in dit geval krijgen wij:

$$E=\frac{0{,}058}{\nu}log\frac{(M_L^{\nu})}{L_M}-2{,}8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Vergelijkt men vergelijking (4) met de uitdrukking voor $E$ die de verzadigings-concentraties der metaalionen bevat, welke gevonden wordt door de waarden van $\Delta_{M_1-L_1}$ en $\Delta_{M_2-L_2}$, door vergelijking (1) gegeven, in verg. (3) te substitueeren, waarbij ontstaat:

$$E=-\frac{RT}{\nu_1 F}ln\frac{K^{M_1{}^{\nu}}}{(M_{1L}^{\nu})}+\frac{RT}{\nu_2 F}ln\frac{K_{M_2}{}^{\nu}}{(M_{2L}^{\nu})}-\Delta_{M_1-M_2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dan springt duidelijk het groote voordeel in het oog, dat verg. (4) resp. (5) hebben boven verg. (6), welke laatste vergelijking een nog onbekend Volta-effect bevat. Terwijl het opstellen van een reeks der potentiaalsprongen metaal-electrolyt door onbekendheid met het Volta-effect nog niet mogelijk is, stelt verg. (5) ons in staat een reeks voor de oplosbaarheids-producten der metalen saam te stellen, terwijl uit een dergelijke betrekking een reeks voor de oplosbaarheids-quotienten der metalloiden is te vinden, zooals dan ook reeds is geschied [3]).

[1]) Zeitschr. f. physik. Chemie **92**, 1 (1916).

[2]) l. c.

[3]) l. c.

De bepaling en volgorde dezer reeks is natuurlijk dezelfde als die der zoogenaamde spanningreeks, die de volgorde aangeeft, waarin de metalen elkaar uit gelijkgeconcentreerde oplossing verdringen. We toonden echter aan, dat in een theorie, welke het bestaan van Volta-effecten aanneemt, de uit de electromotorische evenwichten afgeleide grootheden niet als de verzadigings-concentraties der metaalionen, of als de „Lösungstensionen" zijn op te vatten.

De electronen verg. geeft een met verg. (2) overeenkomende betrekking, n.l.

$$\Delta_{M_1-L_1} - \Delta_{M_2-L_2} = -\frac{RT}{F} \, ln \, \frac{(\theta_{L_1})}{(\theta_{L_2})} + \frac{\theta_{M_1} - \theta_{M_2}}{F},$$

zoodat

$$E = -\frac{RT}{F} \, ln \, \frac{(\theta_{L_1})}{(\theta_{L_2})}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ook in deze betrekking komt natuurlijk het Volta-effect niet voor, zoodat, wanneer men voor de electronen conc. $(\theta_{L_2})$ in den electrolyt waarin zich de waterstof-electrode bevindt een bepaalde waarde aanneemt, de electronen-concentratie $(\theta_{L_1})$, die bij het andere electromotorische evenwicht behoort kan worden gevonden.

Vergelijking (4) en (7) zijn dus niet benaderd maar volkomen streng, hetgeen ook blijkt uit de overweging dat verg. (7), waaruit (4) gevonden wordt door voor $(\theta_L)^{\nu}$ te substitueeren $\frac{L_M}{(M_L^{\nu})}$, onmiddellijk volgt uit de voorwaarde voor electronen-evenwicht tusschen de vloeistoffen $L_1$ en $L_2$. De afleiding dezer electromotorische kracht als som der in den keten voorkomende potentiaalsprongen, werd dan ook hier alleen gevolgd om in overeenstemming te blijven met de vroeger gegeven afleiding.

4. Zooals uit een vorige mededeeling [1]) blijkt, werd de experimenteele elec. potentiaal van een Ni-electrode, gedompeld in een electrolyt waardoor waterstof werd afgeleid, gelijk gevonden aan den waterstof-potentiaal. Om dit feit, dat de electromotorische kracht $E$ der gesloten keten, nikkelelectrode-electrolyt-waterstof-electrode, nul is, volgens onze beschouwingen te verklaren, moeten wij, zooals direct uit verg. (7) volgt, aantoonen op welke wijze de electronen-concentratie van het nikkel-evenwicht gelijk geworden is aan die van het waterstof-evenwicht.

Op zéér eenvoudige wijze is dit verschijnsel reeds verklaard [2]) door

[1]) SMITS en LOBRY DE BRUYN. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 26, 270 (1917).

[2]) SMITS en LOBRY DE BRUIJN l.c.

aan te nemen dat de nikkel-electrode, althans oppervlakkig, verstoord wordt, welke verstoring dan bij een zéér traag metaal zoo ver zal gaan, totdat de electronen-concentratie van het nikkelevenwicht in den electrolyt zich geregeld heeft naar de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht en daaraan ongeveer gelijk is geworden.

Voor het grensgeval van een ideaal traag metaal zal deze gelijkheid volkomen worden, zooals ook door het nul worden van $E$ in dit geval wordt vereischt.

Het verwaarloozen van het Volta-effect leidde daarentegen, bij de vroegere bespreking dezer verschijnselen tot de conclusie, dat de electromotorische kracht der keten, bij gelijke electronen-concentraties in den electrolyt van beide metaal-evenwichten, *alleen bij benadering* nul zou zijn.

Door het voorgaande zal duidelijk geworden zijn, dat terwijl tot nu toe bij de $\Delta$, $X$ Fig. het Volta-effect is verwaarloosd men beter doet i. p. v. den potentiaalsprong metaal-vloeistof, den experimenteelen potentiaal $E$ (b.v. t.o.v. waterstof) als ordinaat uit te zetten; dan zijn de zoo verkregen $E$, $X$ Fig. volkomen streng. Zij geven dan aan, dat bij het driephasen-evenwicht beide electroden denzelfden experimenteelen potentiaal bezitten; terwijl het verschil tusschen hunne potentiaal-sprongen met den electrolyt dan gelijk is aan het Volta-effect tusschen beide metalen.

In dit punt geldt dan,

$$\Delta = \frac{0{,}058}{v_1} \log \frac{(M_{1\,L}^{v'})}{L_{M_1}} = \frac{0{,}058}{v_2} \log \frac{(M_{2\,L}^{v'})}{L_{M_2}}$$

of

$$\frac{L_{M_2}^{\;v'}}{L_{M_1}^{\;v'}} = \frac{(M_{2\,L}^{v'})^{v_1}}{(M_{1\,L}^{v'})^{v_2}}$$

zoodat uit de verhouding der oplosbaarheids-producten onmiddellijk de ligging van den koëxisteerenden electrolyt volgt. Ofschoon dit reeds vroeger is aangetoond wordt hier nogmaals op deze omstandigheid gewezen, om te laten zien, dat verg. (6) ons hier niet helpen kan, want deze verg. geeft voor het driephasen-evenwicht:

$$-\frac{0.058}{v_1} \log \frac{K_{M_1}^{\;v'}}{(M_{1\,L}^{v})} = -\frac{0{,}058}{v_2} \log \frac{K_{M_2}^{\;v'}}{(M_{2\,L}^{v})} + \Delta_{M_1-M_2}$$

In dezen vorm bevat de verg. echter het onbekende Volta-effect en de onbekende verzadigings-concentraties, zoodat een berekening als boven niet mogelijk is.

*Samenvatting.*

Door toepassing van de nieuwere beschouwingen omtrent de electromotorische evenwichten op het Volta-effect werd het resultaat verkregen, dat bij polarisatie en passiveering de *verandering* in het Volta-effect volgens deze theorie groot moet zijn, en dat bij deze verschijnselen het Volta-effekt zelfs het grootste deel van de totale verandering in de electromotorische kracht zou uitmaken. Vervolgens werd er op gewezen, dat indien de Volta-effecten tusschen metalen die in den innerlijken evenwichtstoestand verkeeren, werkelijk zeer klein mochten zijn, waarover de meeningen nog uitéénloopen, maar hetgeen wel door de in den laatsten tijd genomen proeven waarschijnlijk is geworden, dit volgens de theorie als een zéér karakteristieke eigenschap voor metalen in den innerlijken-evenwichtstoestand opgevat zou moeten worden.

Daar het Volta-effect in ieder geval in de gegeven theorie van de electromotorische evenwichten principieel niet verwaarloosd mag worden, werd er nu rekening mede gehouden. De grootheden, die bij het meten van potentiaalsprongen metaal-electrolyt gevonden worden, en die hier *experimenteele electrische potentialen* genoemd zijn, bevatten steeds een onbekend Volta-effect hetgeen veroorzaakt, dat uit de genoemde potentialen, de verzadigingsconcentraties der metaalionen (resp. de „Lösungtensionen”) niet zijn te berekenen.

De nieuw afgeleide betrekkingen, waarin het *oplosbaarheidsproduct* van het metaal, het *oplosbaarheidsquotient* van het niet-metaal resp. de electronen-concentratie in den electrolyt voorkomt, bevatten echter het Volta-effect niet, en stellen ons in staat een *oplosbaarheids-producten-reeks* van metalen en een *oplosbaarheids-quotienten-reeks* van metalloiden op te stellen, zooals dan ook reeds is geschied, waaruit men conclusies kan trekken omtrent het chemisch en electrochemisch gedrag der elementen.

*Algemeen en Anorg. Chem. Laboratorium*
*der Universiteit.*

*Amsterdam, Sept.* 1918.

---

**Wiskunde**. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van Prof. Dr. J. WOLFF: „*Over reeksen van analytische functies*".

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KLUYVER).

OSGOOD's stelling: „*Als de reeks* $f_1 + f_2 + \ldots$, *waarvan alle termen analytische functies zijn in een gebied* $T$ *van het complexe vlak, convergent is in de punten van een verzameling* $(\beta)$ *die in* $T$ *overal dicht is, terwijl* $|f_1 + f_2 + \ldots + f_n| < G$ *in ieder punt van* $T$ *en voor iedere* $n$, $G$ *een constante zijnde, dan convergeert de reeks overal in* $T$ *en stelt daar een analytische functie voor*" [1]) is op nieuw bewezen door ARZELA [2]). Hierop voortbouwend hebben VITALI [3]) en PORTER [4]) de stelling uitgebreid door te bewijzen dat de verzameling $(\beta)$ der punten waar de reeks convergeert slechts een inwendig punt van $T$ tot verdichtingspunt behoeft te hebben.

Van de zoo uitgebreide stelling zal in het volgende een eenvoudig bewijs worden gegeven.

§ 1. Wij veronderstellen dus, dat de $f_i$ analytisch zijn in $T$, dat $|S_n| < G$ overal in $T$ en voor iedere $n$, $G$ een constante zijnde, terwijl in de punten $\beta_1, \beta_2, \ldots$, met het inwendige punt $z_0$ van $T$ tot limietpunt, de reeks convergent is, en zullen bewijzen dat de reeks gelijkmatig convergeert in ieder gebied dat met zijn rand binnen $T$ ligt.

Beschrijf om $z_0$ als middelpunt een cirkel $(R)$ met straal $R$, gelegen binnen $T$. Is $\beta_i$ een punt van $(\beta)$ binnen cirkel $(\frac{1}{2} R)$ om $z_0$ als middelpunt en noemen we $f(\beta_i)$ de som der reeks in $\beta_i$, $S_n(\beta_i)$ de som van $n$ termen, dan is

$$S_n(\beta_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{S_n(t)dt}{t-\beta_i} \quad \text{en} \quad f(\beta_i) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \int_{(R)} \frac{S_n(t)dt}{t-\beta_i}$$

---

[1]) W. F. OSGOOD. *Functions defined by infinite series*. Annals of Mathematics, Series 2, Vol. 3, Oct. 1901, bl. 26.

[2]) V. C. ARZELA. Annals of Mathematics, Series 2, Vol. 5, 1904, bl. 51.

[3]) G. VITALI. *Sopra le serie di funzioni analitiche*. Annali di Matematica, Serie 3a, tomo 10, 1904, bl. 65.

[4]) M. B. PORTER. Annals of Math. Series 2, Vol. 6, 1904—5, bl. 45 en bl. 190.

Is $\beta_k$ een ander punt van $(\beta)$ binnen $(\frac{1}{2}R)$, dan heeft men

$$|S_n(\beta_i)-S_n(\beta_k)| < \frac{4G}{R}\,|\beta_i-\beta_k|,$$

voor iedere $n$, zoodat

$$|f(\beta_i)-f(\beta_k)| \leq \varepsilon$$

zoodra

$$|\beta_i-\beta_k| < \frac{R\varepsilon}{4G},$$

waaruit volgt dat $f(\beta_i)$ tot een limiet $f(z_0)$ nadert als $\beta_i$ tot $z_0$ nadert. Zij $\eta$ een willekeurig positief getal. Voor alle voldoend kleine waarden van $|\beta_i - z_0|$ heeft men

$$|f(\beta_i)-f(z_0)| < \frac{\eta}{3}.$$

Ook is $|S_n(\beta_i)-S_n(z_0)| < \frac{2G}{R}\,|\beta_i - z_0|$ voor iedere $n$, zoodat voor alle voldoend kleine waarden van $|\beta_i - z_0|$ geldt:

$$|S_n(\beta_i)-S_n(z_0)| < \frac{\eta}{3}$$

waarin $n$ willekeurig is.

Kiezen we nu een $\beta_i$ die aan deze beide voorwaarden voldoet, dan heeft men van af een zekere $n$:

$$|S_n(\beta_i)-f(\beta_i)| < \frac{\eta}{3}.$$

Hieruit volgt dat men van af die waarde van $n$ voortdurend heeft

$$|S_n(z_0)-f(z_0)| < \eta,$$

waaruit men tot de convergentie der reeks in $z_0$ besluit. De som is daar $f(z_0)$.

Tevens is gebleken dat

$$\lim_{\beta_i = z_0} f(\beta_i) = f(z_0)$$

§ 2. Beschouwen we voorloopig $n$ als standvastig. Dan is voor $|z-z_0| < \frac{1}{2}R$:

$$S'_n(z_0) = \frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0} + \psi_n(z),$$

waarin $\lim\limits_{z=z_0} \psi_n(z) = 0$. De functie $\dfrac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}$ is analytisch binnen $(\frac{1}{2}R)$, haar absolute waarde is kleiner dan $2G/_R$. Laten we nu $n$ oneindig worden, dan nadert zij in de punten $\beta_i$ tot een grenswaarde, dus volgens § 1 ook in $z_0$. Voor iedere $n$ heeft zij in $z_0$ de waarde $S_n'(z_0)$. Hieruit volgt dat $S_n'(z_0)$ nadert tot een limiet $f^{(1)}(z_0)$.

Evenzoo is

$$S''_n(z_0) = 2!\,\frac{S_n(z) - S_n(z_0) - \dfrac{z-z_0}{1}\,S'_n(z_0)}{(z-z_0)^2} + \Phi_n(z),$$

waarin $\lim\limits_{z=z_0} \Phi_n(z) = 0$. De eerste term van het tweede lid is analytisch binnen $(\frac{1}{2}R)$, haar absolute waarde is kleiner dan $\dfrac{4G}{R^2}$, daar $\left|\dfrac{S_n^{(k)}(z_0)}{k!}\right|$, zijnde de absolute waarde van de coëfficient van $(z-z_0)^k$ in de ontwikkeling $S_n(z) = S_n(z_0) + \sum\limits_1^\infty a_k (z-z_0)^k$, kleiner is dan $\dfrac{G}{R^k}$. Bij nadering van $n$ tot oneindig, nadert deze functie in de punten $\beta_i$ tot een limiet, dus ook in $z_0$, waaruit het bestaan van een limiet

$$\lim_{n=\infty} S''_n(z_0) = f^{(2)}(z_0)$$

volgt.

Zoo voortgaande blijkt voor iedere $k$ een limiet te bestaan

$$\lim_{n=\infty} S^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0).$$

§ 3. Voor $z$ willekeurig binnen $(\frac{1}{2}R)$ is

$$S_n(z) = S_n(z_0) + (z-z_0)\,S'_n(z_0) + \ldots + \frac{(z-z_0)^k}{k!}\,S^{(k)}(z_0) + \ldots \qquad (1)$$

Bij vaste $z$ naderen de termen van deze reeks voor $n = \infty$ tot die van de reeks

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\,f(1)(z_0) + \ldots + \frac{(z-z_0)^k}{k!}\,f(k)(z_0) + \ldots, \qquad (2)$$

die wegens $\left|\dfrac{f(k)(z)}{k!}\right| < \dfrac{G}{R^k}$ een binnen $(\frac{1}{2}R)$ analytische functie voorstelt.

Uit $\left|\dfrac{S_n{}^k(z_0)}{k!}\right| < \dfrac{G}{R^k}$ olgt dat de reeks (1) *gelijkmatig* convergent is als men de termen als functies beschouwt van de beide onafhankelijke variabelen $z$ en $n$ op de verzameling $|z-z_0| \leq \frac{1}{2}R$, $n = 1,2,\ldots$ Hieruit volgt dat $S_n$ binnen $(\frac{1}{2}R)$ gelijkmatig tot $f$ nadert.

§ 4. In plaats van $\frac{1}{2}R$ hadden we even goed $\lambda R$ kunnen nemen, als $\lambda$ een willekeurig positief getal kleiner dan 1 is. $S_n$ convergeert dus gelijkmatig tot een analytische functie binnen iederen cirkel $(R)$ om $z_0$, die geheel binnen $T$ ligt. Is $z$ een willekeurig punt binnen $T$, dan kan men $z$ insluiten in den laatsten van een ketting van cirkels, die alle binnen $T$ liggen, waarvan $(R)$ om $z_0$ de eerste is, terwijl iedere volgende zijn middelpunt binnen den voorafgaanden

heeft. Daar de punten waar $S_n$ convergeert zich verdichten in het tweede middelpunt, convergeert $S_n$ gelijkmatig binnen den tweeden cirkel, evenzoo binnen alle volgenden, dus ook binnen iederen cirkel om $z$, die binnen $T$ ligt. Ieder gebied $\tau$ dat met zijn rand binnen $T$ ligt kan bedekt worden met een *eindig* aantal van zulke cirkels, waaruit de gelijkmatige convergentie van $S_n$ tot een analytische functie in $\tau$ volgt.

§ 5. Tot slot zullen we een eenvoudig bewijs geven van Osgood's oorspronkelijke stelling.

Uit § 1 volgt, dat als $S_n$ in de overal binnen $T$ dichte puntverzameling $(\beta)$ convergeert, ze overal binnen $T$ convergeert en dat de limietfunctie $f$ continu binnen $T$ is, terwijl $|f| \leq G$. Om een willekeurig punt $z_0$ binnen $T$ trekke men cirkel $(R)$ binnen $T$ gelegen. Is $|z-z_0|$ b.v. weer $< \frac{1}{2}R$, dan is

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \int_{(R)} \frac{S_n(t)dt}{t-z} = \frac{R}{2\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \frac{S_n(t)\, e^{\theta i}\, d\theta}{t-z}, \quad t = z_0 + Re^{\theta i}.$$

Wij passen nu een voor de hand liggende uitbreiding op complexe functies toe van deze stelling van Osgood[1]):

*convergeert een functie $\varphi_n(\theta)$, die voor iedere $n$ continu is in het interval $a \leq \theta \leq b$, tot een functie $\varphi(\theta)$, die in dat interval continu is, en is $|\varphi_n(\theta)| < G$ in dat geheele interval en voor iedere $n$, $G$ een constante zijnde, dan is*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n(\theta)\, d\theta = \int_a^b \varphi(\theta)\, d\theta.$$

Stellen we $\varphi_n(\theta) = \dfrac{S_n(t)\, e^{\theta i}}{t-z}$, dan is $\varphi_n$ continu in $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en $|\varphi_n| < \dfrac{2G}{R}$, ook is $\varphi(\theta) = \dfrac{f(t)\, e^{\theta i}}{t-z}$ continu in $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dus

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{f(t)\, dt}{t-z}.$$

Daar $f$ continu is op $(R)$ volgt hieruit dat $f$ analytisch is binnen $(\frac{1}{2}R)$.

Dezelfde hulpstelling kan dienen om eenvoudig de gelijkmatige convergentie van $S_n$ tot $f$ binnen $(\frac{1}{2}R)$ te bewijzen.

---

[1]) W. F. Osgood. *On the non uniform convergence.* Am Journal of Math, 1897. Voor een uitbreiding zie H. Lebesgue, *Leçons sur l'Intégration*, p. 114.

Voor $|z-z_0| \leq \frac{1}{2}R$ is namelijk

$$|f(z)-S_n(z)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)-S_n(t)|\, d\theta, \quad t = z_0 + Re^{\theta i}.$$

Hier is $\varphi_n = |f(t) - S_n(t)|$ continu in $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en hoogstens $2G$, terwijl $\varphi$ nul is. Daarom is

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} |f(t)-S_n(t)|\, d\theta = 0.$$

Voor alle voldoend groote waarden van $n$ is derhalve $|f - S_n|$ overal binnen $(\frac{1}{2}R)$ kleiner dan een gegeven bedrag, m. a. w. $S_n$ convergeert binnen $(\frac{1}{2}R)$ gelijkmatig tot $f$.

Op grond van dezelfde hulpstelling is

$$\lim_{n=\infty} S_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \int_{(R)} \frac{S_n(t)dt}{(t-z)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{k+1}} = f^{(k)}(z),$$

waaruit blijkt dat de reeks onbepaald vaak termsgewijs mag gedifferentieerd worden.

Is $C$ een integratieweg in $T$, dan is, alweer op grond van de hulpstelling:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n=\infty} \int_C S_n(z)dz.$$

Is derhalve $C$ gesloten, terwijl hij slechts inwendige punten van $T$ bevat en omvat, dan is

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Ook hieruit volgt, op grond van een theorema van MORERA [1]), dat $f$ analytisch $T$ is.

---

[1]) Reale Istituto Lombardo di Sc e lettere, Rendic., 2e reeks, Vol. 19, 1886.

**Wiskunde.** — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer N. G. W. H. BEEGER: *„Over de deellichamen van het cirkellichaam der $l^h$-de machtswortels uit de eenheid en hunne klassenaantallen".* (1ste gedeelte).

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

Het doel van 't volgende is het onderzoek van alle deellichamen van 't cirkellichaam $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ en voornamelijk de bepaling van hunne klassenaantallen. Ik gebruik daarbij de definities en notaties van het voortreffelijke „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper" van D. HILBERT[1]).

KUMMER die 't eerst de uitdrukking van het aantal klassen van 't lichaam $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$ ($l$ priem) heeft afgeleid, geeft ook, echter zonder bewijs, de formules voor het klassenaantal van alle deellichamen van $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$[2]).

Verder heeft KUMMER, eveneens zonder afleiding, de formules gegeven voor het klassenaantal van $K\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ ($m$ willekeurig)[3]). Door HILBERT is 't voornaamste punt van 't bewijs gegeven[4]), maar niet, de nog zeer ingewikkelde verdere afleiding. Evenzoo is niet 't volledige bewijs gegeven van 't theorema van KUMMER, dat de tweede factor van het aantal klassen van $K\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$, het klassenaantal voorstelt van 't reëele deellichaam $K\left(e^{\frac{\pi i}{m}} + e^{-\frac{\pi i}{m}}\right)$.

De klassenaantallen van de door mij beschouwde deellichamen zijn nog niet afgeleid en om bovengenoemde reden lijkt het mij nuttig de volledige afleiding te geven, te meer omdat er over de theorie van bijzondere algebraïsche lichamen (behalve het kwadratische) geen enkel leerboek bestaat; tenzij men het genoemde „Bericht" van HILBERT als zoodanig wil opvatten. Er is dan echter 't zeer

---

1) Jahresb. d. D. M. Verein. Band IV. Het zal voortaan worden aangeduid door H

2) Crelle Journ. Band 40.

3) Monatsberichte. Berlin 1861, 1863.

4) H. Hülfssatz 22.

groote bezwaar van 't ontbreken van menig bewijs en de groote beknoptheid van andere.

### § 1. *Enkele beschouwingen over 't lichaam* $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$.

Het cirkellichaam $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ $l$, (oneven priem), dat we voorloopig zullen aanduiden door $K(Z)$, is een cyclisch lichaam [1]). Zij $r$ een primitieve wortel van $l^h$ en zij $s$ de substitutie $(Z : Z^r)$ dan is de groep der substituties van 't lichaam:

$$s, s^2, \ldots \, s^{l^{h-1}(l-1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Het priemgetal $l$ kan in 't lichaam in de $l^{h-1}(l-1)$-de macht van een priemideaal $\mathfrak{L}$ onthouden worden [2]):

$$l = \mathfrak{L}^{l^{h-1}(l-1)} \qquad \mathfrak{L} = (1-Z)$$

$\mathfrak{L}$ is een hoofdideaal en van den eersten graad.

Met het oog op 't geen volgt, hebben we noodig:

*Theorema* 1.

De ontbindingsgroep van $\mathfrak{L}$ bestaat uit alle substituties (1). De traagheidsgroep eveneens. De vertakkingsgroep is

$$s^{l-1}, \; s^{2(l-1)}, \ldots \, s^{l^{h-1}(l-1)}$$

De eenmaal gestreepte vertakkingsgroep is

$$s^{l(l-1)}, \quad s^{2l(l-1)}, \ldots \ldots \, s^{l^{h-2}l(l-1)} .$$

. . . . . . . . . . . . .

De $h$-maal gestreepte vertakkingsgroep is

$$s^{l^{h-1}(l-1)}$$

dus bestaat alleen uit de identieke substitutie. ('t Gedeelte dat betrekking heeft op de vertakkingsgroep en de gestreepte vertakkingsgroepen heb ik verder niet noodig. Ik heb het er bij gevoegd omdat 't bij HILBERT een vergissing bevat. Satz 129).

Bewijs: De ontbindingsgroep van een priemideaal bestaat uit alle substituties die het onveranderd laten. Nu geldt voor iedere substitutie van (1):

$$s^a \, \mathfrak{L} = s^a \, (1-Z)\mathfrak{G} = (1-Z^{r^a})\mathfrak{G}$$
$$= (1-Z)\mathfrak{G} = \mathfrak{L}$$

---

1) H. Satz 128.
2) H. Satz 120.

wanneer $\mathfrak{G}$ aanduidt het ideaal van alle geheele getallen van K. Hiermede is 't eerste deel van 't theorema bewezen.

De traagheidsgroep van een priemideaal bestaat uit alle substituties van de ontbindingsgroep waarvoor, voor alle geheele getallen $\Omega$ van 't lichaam,

$$s^a\Omega \equiv \Omega \,(mod\, \mathfrak{L}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nu geldt voor ieder geheel getal $\Omega$:

$$\Omega = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_{l^{h-1}(l-1)-1} Z^{l^{h-1}(l-1)-1}$$

zoodat aan (2) voldaan zal zijn als

$$s^a Z \equiv Z \,(mod\, \mathfrak{L})$$

Maar

$$s^a Z = Z^{r^a}$$

en dus is

$$s^a Z - Z = Z\,(Z^{r^a-1} - 1) \equiv 0 \,(mod\, \mathfrak{L})$$

voor alle waarden van $a$; zoodat het 2de deel van 't theorema bewezen is.

We gaan nu over tot de vertakkingsgroep.

De graad van de vertakkingsgroep is een macht van $l$, stel $l^a$ [1]) en

$$h' = \frac{r_t}{r_v} = l^{h-a-1}(l-1)$$

moet een deeler zijn van $l-1$ omdat de graad $f$ van $\mathfrak{L}$ gelijk is aan 1. Dus moet $a = h-1$, zoodat de graad $r_v$ van de vertakkingsgroep

$$r_v = l^{h-1}$$

Nu moet nog worden aangetoond dat voor ieder geheel getal $\Omega$ geldt:

$$s^{a(l-1)}\,\Omega \equiv \Omega \,(mod\, \mathfrak{L}^2).$$

Noodig en voldoende is daartoe, dat we aantoonen dat

$$s^{a(l-1)}\,Z \equiv Z \,(mod\, \mathfrak{L}^2)$$

dus dat

$$Z^{r^{a(l-1)}} - Z \equiv 0 \,(mod\, \mathfrak{L}^2).$$

We weten dat $r^{a(l-1)} \equiv 1 \,(mod\, l)$. Stel

$$r^{a(l-1)} = 1 + bl$$

dan is

$$Z^{r^{a(l-1)}} - Z = Z(Z^{bl} - 1) = Z(Z^b - 1)(Z^{b+l^{h-1}} - 1) \ldots (Z^{b+(l-1)l^{h-1}} - 1). \quad . \quad (3)$$

---

[1]) H. Satz 71.

Hieruit volgt

$$s^{a(l-1)}Z - Z \equiv 0 \; (mod\; \mathfrak{l}^{l})$$

omdat iedere factor van het rechterlid van (3) door $1-Z$ deelbaar is. Hiermede is 't gestelde bewezen.

Om de gestreepte vertakkingsgroep te vinden, maken we gebruik van (3). We moeten bepalen de hoogste exponent $L$ van $\mathfrak{l}$ zoodat voor iedere substitutie van de vertakkingsgroep geldt: [1])

$$s^{a(l-1)}\,\Omega \equiv \Omega \; (mod\; \mathfrak{l}^{L})$$

dus

$$s^{a(l-1)}Z - Z \equiv 0 \; (mod\; \mathfrak{l}^{L}).$$

Daar voor de getallen $a = 1, 2, \ldots . l^{h-1}$ niet alle getallen $b$ door $l$ deelbaar zijn, kan niet voor ieder getal $a$ het rechterlid van (3) in nog meer factoren $1-Z$ ontbonden worden. Hieruit volgt dat

$$L = l.$$

Alleen als $b = l$voud, dus als $a = l$voud, kan iedere factor van 't rechterlid van (3) weer in $l$ factoren ontbonden worden, zoodat voor die waarden van $a$ het getal $\overline{L} = l^2$. De eenmaal gestreepte vertakkingsgroep is dus

$$s^{l(l-1)}, \quad s^{2l(l-1)}, \ldots . s^{l^{h-1}l(l-1)}$$

dus

$$r_{\overline{v}} = l^{h-2}$$

De tweemaalgestreepte is

$$s^{l^2(l-1)}, \quad s^{2l^2(l-1)}, \ldots . s^{l^{h-3}l^2(l-1)}$$

$$r_{\overline{\overline{v}}} = l^{h-3}$$

Zoo voortgaande met de ontbinding van 't rechterlid van (3), bewijst men volledig hetgeen in 't theorema gezegd is.

*Theorema* 2: De ontbindingsgroep van een van $\mathfrak{l}$ verschillend priemideaal $\mathfrak{P}$ van $K(Z)$ is:

$$s^{e}, \quad s^{2e}, \ldots . s^{fe}$$

als $f$ de graad van 't priemideaal voorstelt en $ef = l^{h-1}\,(l-1)$.

De traagheidsgroep van $\mathfrak{P}$ bestaat alleen uit de identieke substitutie [2]).

Bewijs: Zij $p$ het priemgetal waarvan $\mathfrak{P}$ een factor is, dan is

$$p = \mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2 \ldots . \mathfrak{P}_e$$

waarbij $\mathfrak{P}_i$ $e$ verschillende priemidealen zijn van den graad $f$. Hieruit

[1]) H. § 421.

[2]) H. Satz 129 (zonder bewijs gegeven).

[3]) H. Satz 122.

volgt dat er $e$ en niet meer dan $e$ substituties zijn die het priemideaal $\mathfrak{P}$ veranderen, de identieke substitutie meegerekend. Dus bestaat de ontbindingsgroep uit $f$ substituties. Het moet dus zijn, de in 't theorema aangegeven groep.

Zij nu $s^{ae}$ een substitutie van de traagheidsgroep dan moet voor alle geheele getallen $\Omega$ van $K(Z)$:

$$s^{ae}\,\Omega \equiv \Omega \; (mod\; \mathfrak{P}).$$

Hiertoe is noodig en voldoende dat

$$s^{ae}\,Z \equiv Z \; (mod\; \mathfrak{P}).$$

Maar

$$s^{ae}\,Z - Z = Z^{r^{ae}} - Z = Z\,(Z-1)\,\frac{Z^{r^{ae}-1}-1}{Z-1}$$

Dit getal is niet door $\mathfrak{P}$ deelbaar, tenzij $a = 0$, omdat $(1 - Z = \mathfrak{L}$ en de breuk een eenheid voorstelt [1]). De traagheidsgroep bestaat dus alleen uit de identieke substitutie $s^0 = 1$.

## § 2. *De deellichamen van $K(Z)$.*

Zooals reeds gezegd is, is $K(Z)$ een cyclisch lichaam. En omdat iedere ondergroep van een cyclische groep weer een cyclische groep is, is ieder deellichaam van het cirkellichaam $K$, weer een cyclisch lichaam. We kunnen nu echter volstaan met het beschouwen van primaire deellichamen [2]) d. z. zulke, die niet tegelijk deellichamen zijn van een cirkellichaam van lageren graad.

Zij

$$s^a, \quad s^{2a}, \ldots . \, s^{ba} \qquad ab = l^{h-1}(l-1)$$

een ondergroep van (1). Om na te gaan, wanneer deze primair is, moet men beschouwen de groep $\mathfrak{R}$ der getallen:

$$r^a, \quad r^{2a}, \ldots . , \, r^{ba}.$$

Deze is primair [1]) als

$$r^{ak} \not\equiv 1 \; (mod\; l^{h-1})$$

dus als

$$ak \not\equiv 0 \; mod\; \varphi\,(l^{h-1}) \quad \text{voor} \quad k = 1, 2, \ldots . \, b-1.$$

Aan deze voorwaarde zal alleen dan voldaan zijn als $a$ deelbaar is door $l^{h-1}$. We kunnen dus iedere primaire deelgroep voorstellen door

$$s^{al^{h-1}}, \quad s^{2al^{h-1}}, \ldots s^{abl^{h-1}} \qquad ab = l-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en we beschouwen nu het deellichaam dat bij deze groep behoort [3]). We zullen het aanduiden door $k$.

*De graad van $k$* is [3]) gelijk aan $al^{h-1}$.

---

[1]) H. Bewijs van Satz. 120.

[2]) WEBER, Lehrbuch der Algebra II (2te Aufl.) pag. 77 etc.

[3]) H. § 38.

Het *voortbrengend getal* van $k$ is[1])

$$\eta = Z^{r^{a l^{h-1}}} + Z^{r^{2al^{h-1}}} + \ldots + Z^{r^{abl^{h-1}}}$$

De substituties van 't deellichaam $k$ zijn

$$s, \quad s^2, \ldots, s^{al^{h-1}}.$$

We zullen nu eerst nagaan hoe de priemgetallen in 't lichaam $k$ in priemidealen kunnen ontbonden worden.

*Theorema* 3.

Een van $l$ verschillend priemgetal $p$ kan in $k$ ontbonden worden in een product van $\frac{e\,a\,l^{h-1}}{v}$ priemidealen van den graad $\frac{v}{e}$. Hierbij is $v$ het kleinste gemeene veelvoud van $e$ en $al^{h-1}$, terwijl $f$ de exponent is van $p$ (*mod* $l^h$) en $ef = l^{h-1}(l-1)$.

Bewijs:

De substituties, die de ontbindingsgroep van een priemideaal $\mathfrak{P}$ van $p$ in $K$ gemeen heeft met de ondergroep (4), zijn volgens 2 § 1:

$$s^v, \quad s^{2v}, \ldots, s^{ef} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Om de geheele ondergroep (4) te krijgen moet men deze substituties vermenigvuldigen met

$$s^{al^{h-1}}, \quad s^{2al^{h-1}}, \ldots, s^v$$

Deze substituties behooren dus niet tot de ontbindingsgroep.

De getallen die $\mathfrak{P}$ en $k$ gemeen hebben, vormen blijkbaar een ideaal $\mathfrak{p}$. Stel dat $\mathfrak{p}$ in $k$ geen priemideaal was, dus dat $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}.\mathfrak{r}$. dan zou dus $\mathfrak{p}$ deelbaar zijn door $\mathfrak{p}$ en in $K$ zou $\mathfrak{q}\mathfrak{G} = \mathfrak{q}\mathfrak{G}.\mathfrak{r}\mathfrak{G}$. Omdat $\mathfrak{p}\mathfrak{G}$ door $\mathfrak{P}$ deelbaar is, zou dus bijv. $\mathfrak{q}\mathfrak{G}$ ook door $\mathfrak{P}$ deelbaar zijn, dus in $k$ zou $\mathfrak{q}$ deelbaar zijn door $\mathfrak{p}$. Hieruit zou volgen $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ dus $\mathfrak{r} = \mathfrak{G}$ en dit is tegen de onderstelling, dus $\mathfrak{p}$ is in $k$ een priemideaal.

$\mathfrak{p}\mathfrak{G}$ is behalve door $\mathfrak{P}$ ook deelbaar door de priemidealen

$$s^{al^{h-1}}\,\mathfrak{P}, \quad s^{2al^{h-1}}\,\mathfrak{P}, \ldots s^v\mathfrak{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en omdat geen der toegepaste substituties tot de ontbindingsgroep behoort, zijn deze idealen alle verschillend, zoodat $\mathfrak{p}$ deelbaar is door hun product. We toonen nu aan dat $\mathfrak{p}$ door geen ander priemideaal $\mathfrak{P}'$ van $K$ deelbaar is. Stel dat dit wel zoo was. Zij $A$ een getal van $K$ dat deelbaar is door het product $\Pi$ der idealen (6) maar niet door $\mathfrak{P}'$

$$A = \Pi\,\mathfrak{Q}.$$

dan zou

[1]) Weber, pag. 85.

$$s^{al^{h-1}} A = s^{al^{h-1}} \Pi \,.\, s^{al^{h-1}} \mathfrak{Q}$$

$$s^{al^{h-1}} A = \Pi \,.\, s^{hl^{h-1}} \mathfrak{Q}.$$

Neemt men dus de relatieve norm dan vindt men

$$n_r(A) = \Pi^b \,.\, n_r(\mathfrak{Q})$$

Het linkerlid van deze gelijkheid stelt een getal van $k$ voor. Het is deelbaar door $\mathfrak{P}$ en daarom ook door $\mathfrak{p}$. Maar omdat $\mathfrak{p}$ ook nog deelbaar is door $\mathfrak{P}'$ en 't rechterlid van de gelijkheid niet, is volgens deze laatste $n_r(A)$ niet deelbaar door $\mathfrak{p}$. Dat kan niet, dus $\mathfrak{p}$ is door geen andere idealen deelbaar als (6).

Nu zou het nog mogelijk zijn dat $\mathfrak{p}$ deelbaar was door een hoogere macht van een of meer der idealen (6); dan zou hetzelfde gelden voor $p$ en dit is niet zoo, omdat in $K$

$$p = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots . \mathfrak{P}_e \qquad (7)$$

Uit dit alles volgt dus dat

$$\mathfrak{p} = s^{al^{h-1}} \mathfrak{P} \,.\, s^{2al^{h-1}} \mathfrak{P} \ldots . s^v \mathfrak{P} \qquad (8)$$

In verband met (7) volgt hieruit dat $p$ in $k$ ontbonden kan worden in

$$e : \frac{v}{al^{h-1}} = \frac{eal^{h-1}}{v}$$

priemidealen.

Om den graad van die priemidealen te bepalen merken we op dat uit (8) volgt:

$$N(\mathfrak{p}\,\mathfrak{S}) = N(\mathfrak{P})^{\frac{v}{al^{h-1}}} = p^{\frac{fv}{al^{h-1}}}$$

Maar

$$N(\mathfrak{p}\mathfrak{S}) = n(\mathfrak{q})^b$$

$$n(\mathfrak{p})^b = p^{\frac{fv}{al^{h-1}}}$$

De graad van $\mathfrak{p}$ is dus gelijk aan $\dfrac{fv}{ab\,l^{h-1}} = \dfrac{fv}{(l-1)l^{h-1}} = \dfrac{v}{e}$.

*Theorema* 4.

Het priemgetal $l$ is in $k$ gelijk aan de $al^{h-1}$-de macht van een hoofdideaal $\mathfrak{l} = (1-Z)^b \mathfrak{g}$ van den eersten graad.

Bewijs:

We weten dat in $K$ geldt

$$l = \mathfrak{L}^{l^{h-1}(l-1)}$$

waarbij $\mathfrak{L}$ een priemideaal van den eersten graad voorstelt

$$\mathfrak{L} = (1-Z)\,\mathfrak{S}.$$

De getallen die $\mathfrak{L}$ en $k$ gemeen hebben vormen een priemideaal $\mathfrak{l}$. Men bewijst dit op dezelfde manier als bij theoréma 3. Verder zijn alle getallen van $\mathfrak{L}$ die in $k$ liggen, deelbaar door

$$s^{al^{h-1}}(1-Z) \,.\, s^{2al^{h-1}}(1-Z) \,. \;\ldots\; s^{bal^{h-1}}(1-Z)$$

dus door

$$(1-Z)^b$$

Hieruit volgt

$$\mathfrak{l} = (1-Z)^b \mathfrak{G}.$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^b$$

$$l = \mathfrak{l}^{\frac{l^{h-1}(l-1)}{b}} = \mathfrak{l}^{al^{h-1}} \cdot$$

Ook blijkt gemakkelijk dat $\mathfrak{l}$ van den eersten graad is.

We gaan nu over tot het bepalen van het grondgetal van 't lichaam $k$.

*Theorema* 5.

Het grondgetal van $k$ is

$$d = \pm\, l^{\frac{l^{h-1}(lh-h-1)-b+1}{b}}$$

Bewijs:

We maken gebruik van de betrekkingen

$$D = d^b n(\mathfrak{d}_r)\ ^{1)}$$

$$\mathfrak{d}_r = N_k(\mathfrak{D}_r)\ ^{2)}$$

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{E}' \,.\, \mathfrak{E}'' \,.\,.\,.\,.\,.\, \mathfrak{E}^{(b-1)}\ ^{3)}$$

Het element

$$\mathfrak{E}^{(i)} = \left\{ (Z - Z^{r^{ial^{h-1}}}),\ (Z^2 - Z^{2r^{ial^{h-1}}}), \ldots, (Z^{l^{h-1}(l-1)} - Z^{l^{h-1}(l-1)r^{ial^{h-1}}}) \right\}.$$

Omdat $D$ een macht van $l$ is, moet de relatieve discriminant $\mathfrak{d}_r$ alleen door $l$ deelbaar zijn en dus het relatieve grondideaal $\mathfrak{D}_r$ alleen door $\mathfrak{L}$, dus ook $\mathfrak{E}^{(i)}$ alleen door $\mathfrak{L}$. Uit den vorm van het element $\mathfrak{E}^{(i)}$ blijkt dat alle getallen ervan door $\mathfrak{L}$ deelbaar zijn en dat niet alle deelbaar zijn door $\mathfrak{L}^2$ dus

$$\mathfrak{E}^{(i)} = \mathfrak{L}$$

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{L}^{b-1}$$

$$\mathfrak{d}_r = \mathfrak{l}^{b-1}\ .$$

$$n(\mathfrak{d}_r) = l^{b-1} \quad \text{dus} \quad \pm\, l^{l^{h-1}(lh-h-1)} = d^b l^{b-1}$$

waaruit het te bewijzen theorema volgt.

---

1) H. Satz 39.

2) H Satz 38.

3) H. pag. 205.

## § 3. *Het aantal klassen der equivalente idealen van 't deellichaam k.*

*Theorema* 6.

Als de relatieve graad $b$ van het deellichaam even is, dus als het deellichaam reëel is, heeft men voor het klassenaantal

$$h = \frac{\Delta}{R}$$

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}(a-2)(a-3)} \begin{vmatrix} \log \varepsilon_1 & \log \varepsilon_2 \ldots\ldots \log \varepsilon_{c-1} \\ \log \varepsilon_2 & \log \varepsilon_3 \ldots\ldots \log \varepsilon_c \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \log \varepsilon_{c-1} & \log \varepsilon_c \ldots\ldots \log \varepsilon_{2c-3} \end{vmatrix}$$

$$c = al^{h-1}$$

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{(1-Z^{r^g})(1-Z^{r^{g+c}})\ldots(1-Z^{r^{g+(b-1)c}})}{(1-Z^{r^{g-1}})(1-Z^{r^{g-1+c}})\ldots(1-Z^{r^{g-1+(b-1)c}})}}$$

$R$ is de regulator.

Als de relatieve graad $b$ oneven is, dus als 't deellichaam $k$ imaginair is, is

$$h = \frac{\prod\limits_u \sum\limits_{t=1}^{c} e^{\frac{2\pi uti}{c}} (r_t + r_{t+c} + \ldots + r^{t+(b-1)c})}{2^{\frac{1}{2}c-1}\, l^{\frac{1}{2}hc}} \; \frac{\Delta'}{R}$$

waarbij het product loopt over alle waarden van $u < c$ en die oneven zijn. $r_t$ is de kleinste positieve rest van $r^t$ (mod $(l^h)$.

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{8}(a-2)(a-4)} \begin{vmatrix} \log \varepsilon_1 & \log \varepsilon_2 & \ldots \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c-1} \\ \log \varepsilon_2 & \log \varepsilon_3 & \ldots \log \varepsilon^{\frac{1}{2}c} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c-1} & \log \varepsilon_{\frac{1}{2}c} & \ldots \log \varepsilon_{c-3} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{(1-Z^{r^g})(1-Z^{r^{g+\frac{1}{2}c}})\ldots(1-Z^{r^{g+(2b-1)\frac{1}{2}c}})}{(1-Z^{r^{g-1}})(1-Z^{r^{g-1+\frac{1}{2}c}})\ldots(1-Z^{r^{g-1+(2b-1)\frac{1}{2}c}})}}$$

$$R' = \begin{vmatrix} \log \eta_1 & \log \eta_2 & \log \eta_{\frac{1}{2}c-1} \\ \log \eta_1^{(1)} & \log \eta_2^{(1)} & \log \eta_{\frac{1}{2}c-1}^{(1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \log \eta_1^{(\frac{1}{2}c-2)} & \log \eta_2^{(\frac{1}{2}c-2)} & \log \eta_{(\frac{1}{2}c-1)}^{\frac{1}{2}c-2} \end{vmatrix}$$

$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{\frac{1}{2}c-1}$ is een systeem van fundamentale eenheden van 't deellichaam. $\eta_i^{(k)}$ zijn hunne geconjugeerden.

Om het bewijs van dit theorema te geven, maken we gebruik van de voor alle lichamen geldige uitdrukking:

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_{\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{P})^s}\right)^{-1} \text{[1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en we bewijzen eerst:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}\right) = \prod_{u} \left\{1 - \left[\frac{v}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}\right\}, p \neq l \quad . \quad . \quad (2)$$

In 't eerste product doorloopt $\mathfrak{p}$ alle priemidealen (van $k$) die in 't priemgetal $p$ opgaan en het tweede product loopt over alle getallen $u$ van de rij

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, (al^{h-1}-1).$$

Bewijs: Het karaktersymbool $\left[\frac{p}{l^h}\right]$ [2]) wordt gedefiniëerd door de vergelijking

$$\left[\frac{p}{l^h}\right] = e^{\frac{2\pi p' i}{l^{h-1}(l-1)}} \quad \text{waarbij} \quad r^{p'} \equiv p \ (mod\ l^h)$$

en $r$ een primitieve wortel is van $l^h$. Zij $d$ de grootste gemeene deeler van $p'$ en $l^{h-1}(l-1)$ dan volgt uit de laatste congruentie

$$r^{p' \frac{l^{h-1}(l-1)}{d}} \equiv p^{\frac{l^{h-1}(l-1)}{d}}$$

dus

$$1 \equiv p^{\frac{l^{h-1}(l-1)}{d}} \ (mod\ l^h)$$

zoodat $\frac{l^{h-1}(l-1)}{d} = f$ en dus $d = e$. Uit de definitie van 't symbool volgt dus dat het een $\frac{l^{h-1}(l-1)}{e} = f$ — de machts-wortel uit de eenheid is. Dan zal $\left[\frac{p}{l^h}\right]$ gelijk zijn aan een $\frac{f}{g}$ — de machts-wortel uit de eenheid, en geen lagere machts-wortel, als $g$ de grootste gemeene deeler is van $f$ en $b$, of anders gezegd: $g$ is de grootste gemeene deeler van $\frac{l^{h-1}l-1}{e}$ en $\frac{l^{h-1}(l-1)}{al^{h-1}}$. Zij $q$ een priemgetal dat in $l^{h-1}(l-1$ opgaat tot de macht $m$, in $e$ tot de macht $n$ en in $al^{h-1}$ tot de macht $n'$, dan gaat $q$ in $f$ en $b$ op tot de macht $m-n$ resp. $m-n'$. Hieruit volgt dat $q$ in $g$ opgaat tot een macht waarvan de exponent

1) H. Satz 56 en § 27.

2) H. § 116.

gelijk is aan het kleinste der beide getallen $m-n$ en $m-n'$. Dit geldt voor alle priemgetallen $\gamma$ die in $l^{h-1}(l-1)$ opgaan, zoodat

$$g = \frac{l^{h-1}(l-1)}{\textit{kleinste gemeene veelvoud van } e \textit{ en } al^{h-1}}$$

dus $g = \dfrac{l^{h-1}(l-1)}{v}$. Hieruit volgt dat $\left[\dfrac{p}{l^h}\right]^h$ gelijk is aan een $\dfrac{fv}{l^{h-1}(l-1)}$ $= \dfrac{v}{e}$ de machts-wortel uit de eenheid en geen lagere machts-wortel

Beschouwen we nu het product uit het rechterlid van (2). Uit de betrekking

$$\left[\frac{p}{l^h}\right]^{b\left(u+\frac{v}{e}\right)} = \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu}$$

volgt dat iedere $\dfrac{v}{e}$—de machts-wortel $al^{h-1} : \dfrac{v}{e} = \dfrac{eal^{h-1}}{v}$ malen in dat product voorkomt en omdat

$$\prod_{u=1}^{u=\frac{v}{e}} \left\{ 1 - \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s} \right\} = 1 - p^{-\frac{v}{e}s}$$

zal het product uit het rechterlid van (2) gelijk zijn aan

$$\left(1-p^{-\frac{v}{e}s}\right)^{\frac{eal^{h-1}}{v}}.$$

Hieruit volgt door toepassing van theorema 3 van § 2 het te bewijzen theorema.

Dan volgt uit (1):

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \frac{1}{1-\dfrac{1}{n(\mathfrak{l})^s}} \prod_p \prod_u \left\{ 1 - \left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s} \right\}$$

waarbij de producten loopen over alle genoemde waarden van $u$ en over alle priemgetallen $p$ behalve $l$.

Volgens theorema 4 is $n(\mathfrak{l}) = l$ zoodat de laatste vergelijking overgaat in

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_p \prod_u{}' \frac{1}{1-\left[\dfrac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}}$$

Hierbij loopt het eerste product nu over alle priemgetallen; het tweede ook, want hoewel het eerst niet over $l$ liep mogen we de

factor $1-\left[\frac{l}{l^h}\right]^{bu}$ als $u \neq 0$ er bij voegen, daar $\left[\frac{l}{l^h}\right]=0$ en de factor dus de waarde 1 heeft. Het derde product loopt over de aangegeven waarden van $u$, waarbij echter het accent aanduidt dat de waarde $u=0$ is uitgesloten. We maken nu gebruik van de vergelijking.

$$\lim_{s=1}(s-1)\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}=1$$

waaruit volgt

$$h=\frac{1}{\varkappa}\lim_{s=1}\prod_p \prod_u{}' \frac{1}{1-\left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}}$$

Omdat de waarden van $u$ niet van $p$ afhangen, mogen we de teekens

$$\prod_p \prod_u{}'$$

verwisselen zoodat we hebben te beschouwen

$$\prod_u{}' \prod_p \left\{1-\left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}\right\}^{-1}$$

Iederen factor $\dfrac{1}{1-\left[\frac{p}{l^h}\right]^{bu} p^{-s}}$ ontwikkelen we in een reeks en vermenigvuldigen al deze reeksen.

Men vindt dan

$$\prod_u{}' \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu}\frac{1}{n^s}.$$

De hierin optredende reeks is een reeks van DIRICHLET, die op de bekende wijze te herleiden is tot een integraal. We substitueeren daartoe

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}\,dx$$

waaardoor we vinden:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} x^{s-1}\,dx\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{-nx}.$$

Nu is

$$\left[\frac{n}{l^h}\right]=\left[\frac{n'}{l^h}\right] \text{ als } n\equiv n' \pmod{l^h}$$

zoodat

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{l^h-1} + \sum_{n=l^h+1}^{2l^h-1} + \ldots = \frac{\sum\limits_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{-nx}}{1-e^{-l^h x}}$$

We moeten dus beschouwen de integraal

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{\sum\limits_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l_h}\right]^{bu} e^{-nx}}{1-e^{-l^h x}}\, dx.$$

voor de $\lim\limits_{s=1}$. Deze limiet kan worden verkregen door $s=1$ te stellen in den integrand omdat $\sum\limits_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} = 0$ zooals bekend is.

De integraal wordt dus, als we tevens $e^{-x} = t$ stellen:

$$\int_0^1 \frac{\sum\limits_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} t^n}{t(1-t^{l^h})}\, dt.$$

Zij nu $F(t) = \sum\limits_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} t^n$ dan krijgen we

$$\int_0^1 \frac{F(t)}{t(1-t^{l^h})}\, dt.$$

Deze kan geintegreerd worden na splitsing in enkelvoudige gebrokens. Op de bekende wijze vindt men dan:

$$-\frac{1}{l^h}\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)\int_0^1 \frac{dt}{t-e^{\frac{2\pi k i}{l^h}}}$$

en na integratie

$$-\frac{1}{l^h}\left[\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)\left\{\log\frac{e^{\frac{k\pi i}{l^h}}-e^{\frac{k\pi i}{l^h}}}{i} + \frac{1}{2}\pi i - \frac{k}{l^h}\pi i\right\}\right] \text{ of}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{l^h}\left[\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)\log\frac{e^{\frac{k\pi i}{l^h}}-e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}}{i} + \right.\\ &\left. \quad + \frac{\pi i}{2}\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) - \frac{\pi i}{l^h}\sum_{k=1}^{l^h-1} k\,F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)\right]\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan van den Heer DR. C. H. VAN OS over: *„Een involutie van puntenparen en een involutie van stralenparen in de ruimte"*.

(Mede aangeboden door den Heer CARDINAAL).

§ 1. *Inleiding*: Door verschillende schrijvers zijn involuties behandeld, bestaande uit groepen van punten in het platte vlak of in de ruimte. Involuties, bestaande uit groepen van *rechte lijnen*, schijnen daarentegen niet beschouwd te wezen. In het volgende zal zulk een involutie worden onderzocht. Deze involutie wordt afgeleid met behulp van een involutie van puntenparen, die zelf weer samenhangt met een zekere *bilineaire congruentie van kubische ruimtekrommen*.

De bedoelde congruentie $[\varrho^3]$ wordt gevormd door alle krommen $\varrho^3$, die door twee gegeven punten $A_1$ en $A_2$ gaan en drie gegeven rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ tot bisecanten hebben. Deze krommen zijn de bewegelijke doorsneden der quadratische oppervlakken uit twee gegeven bundels $(\varphi^2_{34})$ en $(\varphi^2_{45})$. De basiskromme van den bundel $(\varphi^2_{34})$ bestaat uit de rechten $a_3$ en $a_4$ en uit de gemeenschappelijke transversalen $b_{134}$ en $b_{234}$, die men door de punten $A_1$ en $A_2$ naar deze rechten kan trekken; die van den bundel $(\varphi^2_{45})$ bestaat uit de rechten $a_4$ en $a_5$ en haar door $A_1$ en $A_2$ gaande gemeenschappelijke transversalen $b_{145}$ en $b_{245}$ [1]).

Door een punt $P$ gaat één $\varrho^3$ van de congruentie; voegen wij aan $P$ het punt $P'$ toe, dat op de kromme $\varrho^3$ door de punten $A_1$ en $A_2$ harmonisch van $P$ wordt gescheiden, dan krijgen wij een involutie van *puntenparen* $(P, P')$.

Een rechte $t$ is koorde van één $\varrho^3$; laten $P$ en $Q$ haar steunpunten zijn. Door de zooeven gevonden involutie zijn aan de punten $P$ en $Q$ twee punten $P'$ en $Q'$ toegevoegd. Voegen wij nu de verbindingslijn $t'$ van de punten $P'$ en $Q'$ aan $t$ toe, dan krijgen wij een involutie van *stralenparen* $(t, t')$.

§ 2. *Ontaarde* $\varrho^3$ *der congruentie*. Wij zullen aantoonen, dat de

---

[1]) Deze congruentie $[\varrho^3]$ is onderzocht door M. STUYVAERT (*Étude de quelquès surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre*. Dissertation inaugurale, Gand 1902) en door J. DE VRIES (*Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen*. Proefschrift, Utrecht 1917).

congruentie $[\varrho^3]$ *zeven* stelsels van $\infty^1$ krommen $\varrho^3$ bevat, die ieder in een kegelsnede $k^2$ en een rechte $d$ ontaard zijn.

Ten eerste kan de kegelsnede $k^2$ door de punten $A_1$ en $A_2$ gaan, dus gelegen zijn in een vlak $\pi$ door de rechte $A_1A_2$. Zulk een vlak snijdt de rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ in drie punten $A_3$, $A_4$ en $A_5$, welke met de punten $A_1$ en $A_2$ één kegelsnede $k^2$ bepalen. Het regeloppervlak $\psi^2$, dat door de gemeenschappelijke transversalen der rechten $a_3$,$a_4$ en $a_5$ gevormd wordt, snijdt deze kegelsnede $k^2$ buiten de punten $A_3$, $A_4$ en $A_5$ nog in één punt $D$; de transversaal $d$, welke door $D$ gaat, vormt met $k^2$ een ontaarde $\varrho^3$.

Het oppervlak $\psi^2$ wordt door de rechte $A_1A_2$ in twee punten $B_1$ en $B_2$ gesneden; de beschrijvenden $b_1$ en $b_2$ van $\psi^2$, die door deze punten gaan, vormen elk met de rechte $A_1 A_2$ een ontaarde $k^2$ van het zooeven beschouwde stelsel. De transversaal $d$, welke de door de rechten $A_1A_2$ en $b_1$ gevormde ontaarde $k^2$ tot een $\varrho^3$ aanvult, is blijkbaar geen andere dan de rechte $b_2$. De drie rechten $b_1$, $A_1A_2$ en $b_2$ vormen dus samen een ontaarde $\varrho^3$.

Zooeven is gebleken, dat bij elke kegelsnede $k^2$ een bepaalde transversaal $d$ behoort; is ook het omgekeerde het geval? Om dit na te gaan, merken wij op, dat de rechte $A_1A_2$ tweemaal een bestanddeel van een ontaarde $k^2$, dus *dubbelrechte* is van het oppervlak, dat door deze kegelsneden $k^2$ gevormd wordt. Een vlak $\pi$ door $A_1A_2$ snijdt dit oppervlak volgens de dubbelrechte en volgens een kegelsnede $k^2$; het is dus van den vierden graad. Een transversaal $d$ snijdt dit oppervlak nu buiten de rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ nog in één punt $D$, en vormt dus met *één* kegelsnede $k^2$ een ontaarde $\varrho^3$.

§ 3. Om een tweede reeks ontaarde $\varrho^3$ te krijgen, trekken wij de in § 1 genoemde transversaal $b_{134}$, en brengen door het punt $A_2$ en de rechte $a_5$ een vlak $\alpha_{25}$. Dit vlak snijdt de transversaal $b_{134}$ in een punt $D_1$, de rechten $a_3$ en $a_4$ in twee punten $C_3$ en $C_4$. De punten $A_2$, $D_1$, $C_3$ en $C_4$ bepalen een bundel van kegelsneden, die elk met de rechte $b_{134}$ een ontaarde $\varrho^3$ vormen.

Daar men in de plaats van de transversaal $b_{134}$ een der transversalen $b_{135}$, $b_{145}$, $b_{234}$, $b_{235}$, $b_{245}$, kan nemen verkrijgt men in het geheel *zes* bundels van op deze wijze ontaarde $\varrho^3$.

Elk der bijbehoorende bundels van kegelsneden bevat drie lijnenparen; voor den in het vlak $\alpha_{25}$ gelegen bundel zijn dit de paren $(A_2 D_1,\ C_3 C_4)$, $(A_2 C_3,\ D_1 C_4)$ en $(A_2 C_4,\ D_1 C_3)$. Elk dezer paren vormt met de transversaal $b_{134}$ een $\varrho^3$, die in *drie rechte lijnen* ontaard is. De rechte $A_2 C_3$ snijdt, daar zij in het vlak $\alpha_{25}$ ligt, de rechte $a_5$, is dus niets anders dan de transversaal $b_{235}$; evenzoo is

de rechte $A_2\,C_4$ dezelfde als de transversaal $b_{245}$. De kromme ($b_{134}$, $A_2\,D_1$, $C_3\,C_4$) behoort blijkbaar alleen tot den bundel ontaarde $\varrho^3$, die de rechte $b_{134}$ als bestanddeel bevatten; de krommen ($b_{134}$, $b_{235}$ $D_1\,C_4$) en ($b_{134}$, $b_{245}$, $D_1\,C_3$) behooren elk tot *twee* bundels ontaarde $\varrho^3$. Er zijn dus zes exemplaren van de eerste en even zoovele van de tweede soort. Met de in § 2 gevonden kromme ($b_1$, $A_1A_2$, $b_2$) bevat de congruentie $[\varrho^3]$ dus samen *dertien* $\varrho^3$, die in drie rechte lijnen ontaard zijn.

§ 4 *Singuliere punten en bisecanten der congruentie.* De punten der drie rechten $a_3, a_4$ en $a_5$ zijn *singuliere punten* der congruentie.

Beschouwen wij bijv. een punt $A_3$ van de rechte $a_3$. Het oppervlak $\varphi^2{}_{45}$ door $A_3$ snijdt een willekeurig oppervlak $\varphi^2{}_{34}$ volgens een kromme $\varrho^3$, die door het punt $A_3$ gaat. Door $A_3$ gaat dus een bundel van krommen $\varrho^3$; alle deze krommen gaan ook door het tweede snijpunt van het oppervlak $\varphi^2{}_{45}$ met de rechte $a_3$.

Ook de punten der transversalen $b_{ikl}$ zijn *singuliere punten*; immers, elk dezer transversalen is bestanddeel van een bundel ontaarde $\varrho^3$.

De rechten door de punten $A_1$ en $A_2$ zijn *singuliere bisecanten*; want door een willekeurig punt van zulk een rechte gaat één $\varrho^3$, en, daar deze ook door de punten $A_1$ en $A_2$ gaat, heeft zij die rechte tot bisecante,

In de tweede plaats zijn *singuliere bisecanten* de rechten in de vlakken $\alpha_{13}$, $\alpha_{14}$, $\alpha_{15}$, $\alpha_{23}$, $\alpha_{24}$ en $\alpha_{25}$, door de punten $A_1$ en $A_2$ en de rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ gebracht. Elk dezer vlakken bevat nl. een bundel kegelsneden $k^2$, die ieder een bestanddeel zijn van een ontaarde $\varrho^3$, en een rechte in zulk een vlak is bisecante van al deze kegelsneden.

In de derde plaats zijn de beschrijvende lijnen $g_{34}$ der oppervlakken $\varphi^2{}_{34}$, die de rechten $a_3$ en $a_4$ kruisen, *singuliere bisecanten* der congruentie. Zulk een rechte $g_{34}$ wordt door de oppervlakken $\varphi^2{}_{45}$ gesneden in de puntenparen van een quadratische involutie, en de twee punten van zulk een paar zijn telkens de steunpunten van een kromme $\varrho^3$. Daar de oppervlakken $\varphi^2{}_{34}$ door de rechten $a_3$, $a_4$, $b_{134}$ en $b_{234}$ gaan, zijn de rechten $g_{34}$ de transversalen der rechten $b_{134}$ en $b_{234}$.

Evenzoo zijn de transversalen $g_{45}$ der rechten $b_{145}$ en $b_{245}$, en de transversalen $g_{35}$ der rechten $b_{135}$ en $b_{235}$ singuliere bisecanten der congruentie.

De *singuliere bisecanten* vormen dus twee stralenschooven, zes velden en drie bilineaire congruenties.

§ 5. *Puntenparen op een ontaarde* $\varrho^3$. Wij gaan nu over tot de

beschouwing der involutie $(P, P')$ en onderzoeken eerst, wat er van deze verwantschap wordt, indien de punten $P$ en $P'$ zich op een ontaarde $\varrho^3$ bevinden.

Hiertoe merken wij op, dat vier harmonische punten $P, A_1, P', A_2$ van een kromme $\varrho^3$ uit elke van haar koorden $s$ door vier harmonische vlakken geprojecteerd worden. Dit moet blijven gelden, indien men de $\varrho^3$ laat ontaarden in een kegelsnede $k^2$ en een rechte $d$.

Bij de in § 2 beschouwde ontaarding liggen de punten $A_1$ en $A_2$ beide op de kegelsnede $k^2$. De volgende twee gevallen zijn nu mogelijk:

1. Het punt $P$ ligt ook op de kegelsnede $k^2$. Nemen wij als koorde $s$ een gemeenschappelijke snijlijn van de kegelsnede $k^2$ en de rechte $d$, dan zien wij, dat het punt $P'$ eveneens op $k^2$ ligt en van $P$ door $A_1$ en $A_2$ harmonisch gescheiden wordt.

2. Het punt $P$ ligt op de rechte $d$. Nemen wij de koorde $s$ op dezelfde wijze, dan zien wij, dat het punt $P'$ op $k^2$ ligt en door $A_1$ en $A_2$ harmonisch gescheiden wordt van het snijpunt $D$ der beide bestanddeelen $k^2$ en $d$.

Aan het punt $D'$, dat van $D$ harmonisch gescheiden wordt, zijn dus *alle punten* der rechte $d$ toegevoegd; overigens behoort bij elk punt $P$ der ontaarde $\varrho^3$ een bepaald ander punt $P'$.

Bij de in § 3 beschouwde ontaarding ligt het punt $A_1$ op de rechte $d$, het punt $A_2$ op de kegelsnede $k^2$ (of omgekeerd). Er zijn weer twee gevallen mogelijk:

1. Het punt $P$ ligt op de kegelsnede $k^2$. Nemen wij als koorde $s$ weer een snijlijn van $k^2$ en $d$, dan zien wij, dat het punt $P'$ eveneens op de kegelsnede $k^2$ ligt en van $P$ harmonisch gescheiden wordt door de punten $A_2$ en $D$.

2. Het punt $P$ ligt op de rechte $d$. Nemen wij als koorde $s$ een rechte in het vlak van de kegelsnede $k^2$, dan zien wij, dat het punt $P$ eveneens op de rechte $d$ ligt en van $P$ harmonisch gescheiden wordt door de punten $A_1$ en $D$.

Bij elk punt van een dezer ontaarde $\varrho^3$ behoort dus een bepaald ander punt. Valt $P$ met het punt $D$ samen dan doet $P'$ dit eveneens.

Wanneer de $\varrho^3$ in drie rechte lijnen ontaard is, gelden soortgelijke beschouwingen.

§ 6. *Singuliere punten der involutie* $(P, P')$. De punten $A_1$ en $A_2$ zijn op elk niet-ontaarde $\varrho^3$ aan zichzelf toegevoegd; blijkens de vorige § geldt dit ook voor de ontaarde $\varrho^3$. Deze punten zijn dus *geen* singuliere punten der involutie.

De punten der rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ zijn daarentegen *wel* singuliere

punten. Beschouwen wij bijv. een punt $A_8$ der rechte $a_8$. Om het punt $A_8'$ te vinden, dat op een door $A_8$ gaande kromme $\varrho^3$ aan $A_8$ toegevoegd is, moeten wij door de bisecante $a_8$ dezer kromme $\varrho^3$ een vlak brengen, dat door de vlakken $\alpha_{18}$ en $\alpha_{28}$ harmonisch gescheiden wordt van het vlak, dat de kromme $\varrho^3$ in het punt $A_8$ *aanraakt* en door de rechte $a_8$ gaat; dat vlak zal de kromme $\varrho^3$ in het gezochte punt $A'_8$ snijden.

Het vlak $(A'_8, a_8)$ zal daar het door de rechte $a_8$ gaat, een raakvlak zijn van het oppervlak $\varphi^2{}_{84}$, dat de beschouwde kromme $\varrho^3$ bevat. Nu zijn de raakvlakken van een regeloppervlak in de punten van een beschrijvende lijn projectief aan de raakpunten toegevoegd; het raakpunt $B_8$ van het vlak $(A'_8, a)$ wordt dus van het punt $A_8$ harmonisch gescheiden door de raakpunten der vlakken $\alpha_{18}$ en $\alpha_{28}$. Daar deze twee vlakken door de rechten $b_{184}$ en $b_{284}$ gaan, zijn hun raakpunten $B_{18}$ en $B_{28}$ de snijpunten van deze transversalen met de rechte $a_8$.

Doorloopt het oppervlak $\varphi^2{}_{84}$ nu den bundel $(\varphi^2{}_{84})$, dan zal het vlak $(A'_8, a_8)$ dat het oppervlak $\varphi^2{}_{84}$ in het punt $B_8$ aanraakt, een bundel beschrijven, welke projectief aan den bundel $(\varphi^2{}_{84})$ is toegevoegd. Het voortbrengsel van deze projectieve bundels is een oppervlak van den derden graad. Nu behooren tot deze raakvlakken de vlakken $\alpha_{18}$ en $\alpha_{28}$, welke elk tevens een deel zijn van een ontaard oppervlak $\varphi^2{}_{84}$; deze vlakken behooren dus tot het voortbrengsel en de rest is een *plat vlak*.

Het voortbrengsel van twee projectieve bundels gaat door de basiskrommen van deze bundels. Het zooeven gevonden platte vlak bevat dus de rechte $a_4$, daar dit met geen der vlakken $\alpha_{18}$ en $\alpha_{28}$ het geval is. Het moet tevens gaan door het punt $B_8$, daar de doorsnede van een oppervlak $\varphi^2{}_{84}$ met zijn raakvlak in het punt $B_8$, behalve uit de rechte $a_8$, uit een beschrijvende lijn door het punt $B_8$ bestaat.

De meetkundige plaats der punten $A'_8$, die op de verschillende door het punt $A_8$ gelegde krommen $\varrho^3$ aan het punt $A_8$ zijn toegevoegd, behoort tot de doorsnede van het vlak $(B_8, a_4)$ met het oppervlak $\varphi^2{}_{45}$, waarop al deze krommen $\varrho^3$ gelegen zijn en dat door $A_8$ gaat. Die doorsnede bestaat, behalve uit de rechte $a_4$, uit een *rechte lijn* $\lambda$; deze is de gezochte meetkundige plaats.

Deze rechte $\lambda$ gaat door het snijpunt van het vlak $(B_8, a_4)$ met de rechte $a_5$. Dit snijpunt is blijkbaar projectief toegevoegd aan het punt $B_8$, dus ook aan het punt $A_8$. Hetzelfde zal moeten gelden voor het snijpunt van de rechte $\lambda$ met de rechte $a_4$.

Doorloopt het punt $A_8$ nu de rechte $a_8$, dan zullen de snijpunten

van de rechte $\lambda$ met de rechten $a_4$ en $a_5$ twee projectieve puntenreeksen beschrijven. De rechte $\lambda$ beschrijft dus een *quadratisch oppervlak* $\omega^2$, de meetkundige plaats van alle punten, die aan de punten der rechte $a_3$ zijn toegevoegd.

Bij elk der rechten $a_4$ en $a_5$ behoort natuurlijk een dergelijk oppervlak $\omega^2$.

§ 7. De punten der transversalen $b_{145}$ enz. zijn *geen* singuliere punten der involutie. Want uit de in § 5 gegeven constructie volgt, dat aan elk punt van zulk een transversaal een bepaald ander punt van dezelfde transversaal is toegevoegd, onverschillig van welke ontaarde $\varrho^3$ men de transversaal als een bestanddeel beschouwd.

Uit § 5 volgt verder, dat op elke ontaarde $\varrho^3$ van de eerste reeks *één* singulier punt $D'$ gelegen is. Wij zullen de meetkundige plaats van deze singuliere punten bepalen.

In § 2 is gebleken, dat tot deze reeks een $\varrho^3$ behoort, bestaande uit de rechte $A_1A_2$ en de beide transversalen $b_1$ en $b_2$ der vier rechten $A_1A_2$, $a_3$, $a_4$ en $a_5$. Daar men elk der beide transversalen met de rechte $A_1A_2$ tot een ontaarde kegelsnede $k^2$ kan samenvatten, liggen op deze $\varrho^3$ *twee* singuliere punten $D'_1$ en $D'_2$.

Een vlak $\pi$ door de rechte $A_1A_2$ bevat *één* kegelsnede $k^2$ en snijdt dus de gezochte meetkundige plaats, behalve in de punten $D'_1$ en $D'_2$, nog in één punt $D'$; de meetkundige plaats is dus een *kubische ruimtekromme* $\sigma^3$.

Een punt $D'$ is toegevoegd aan een rechte $d$, welke de drie rechten $a_3, a_4$ en $a_5$ snijdt. Tot de aan $D'$ toegevoegde punten behooren dus drie punten, welke op de drie genoemde rechten gelegen zijn; het punt $D'$ moet dus liggen op de drie oppervlakken $\omega^2$, die in de vorige § gevonden zijn. Deze drie oppervlakken gaan dus alle door de kromme $\sigma^3$.

§ 8. Doorloopt een punt $P$ een rechte $l$, dan zal het aan $P$ toegevoegde punt $P'$ een kromme $(l)$ beschrijven. De rechte $l$ heeft met elk der drie oppervlakken $\omega^2$ twee punten gemeen; de kromme $(l)$ heeft dus twee punten gemeen met elk der drie rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$. Een oppervlak $\varphi^2_{34}$ snijdt de rechte $l$ in twee punten en bevat de beide daaraan toegevoegde punten der kromme $(l)$, zoodat dit oppervlak $\varphi^2_{34}$ met de kromme $(l)$ in het geheel *zes* punten gemeen heeft. Dus is $(l)$ een *kubische ruimtekromme*.

In het algemeen hebben de rechte $l$ en de kromme $(l)^3$ *geen* punten gemeen. In het algemeen liggen nl. op de rechte $l$ geen twee toegevoegde punten der involutie $(P, P')$; verder heeft deze invo-

lutie slechts een eindig aantal coïncidenties, nl. de punten $A_1$ en $A_2$ en de in § 5 gevonden punten $D$, waarin de transversalen $b_{134}$, enz. de bijbehoorende vlakken $\alpha_{25}$, enz., snijden. De rechte $l$ bevat dus in het algemeen ook geen coïncidenties.

Doorloopt een punt $P$ een plat vlak $V$, dan zal het aan $P$ toegevoegde punt $P'$ een oppervlak $(V)$ beschrijven. Om den graad van dit oppervlak te vinden, trekken wij in het vlak $V$ een rechte $l$. De, aan deze rechte $l$ toegevoegde, kromme $(l)^3$ snijdt het vlak $V$ in drie punten, die elk aan een punt van $l$ zijn toegevoegd. De rechte $l$ snijdt dus de meetkundige plaats der in het vlak $V$ gelegen puntenparen $(P, P')$ in *drie* punten; deze meetkundige plaats is dus een kromme van den derden graad. Daar het vlak $V$ in het algemeen geen coïncidenties bevat, is deze kromme de volledige doorsnede van $V$ met het oppervlak $(V)$; dus is $(V)$ een oppervlak van den *derden* graad.

Het oppervlak $(V)^3$ bevat de rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$, want elk punt van een dezer rechten is toegevoegd aan een rechte $\lambda$, die het vlak $V$ in éen punt snijdt. Evenzoo gaat het oppervlak $(V)^3$ door de kromme $\sigma^3$.

Zij $Q$ een punt van het vlak $V$, $l$ een rechte van $V$ die door $Q$ gaat. Deze rechte bevat drie punten $P$, die aan een in het vlak $V$ gelegen punt $P'$ zijn toegevoegd. Verbinden wij deze punten $P'$ met $Q$, en voegen wij die verbindingslijnen aan de rechte $l$ toe, dan krijgen wij in den waaier der stralen door $Q$ een verwantschap (3, 3) met *zes* coïncidenties. Deze moeten afkomstig zijn van de door $Q$ gaande stralen $(P, P')$, en wel zal elk dezer stralen *twee* coïncidenties leveren, daar de verwantschap $(P, P')$ involutorisch is. Door $Q$ gaan dus *drie* stralen $PP'$, die in het vlak $V$ liggen, en de rechten $PP'$ vormen dus in het algemeen een *kubischen stralencomplex.*

§ 9. *Singuliere rechten der involutie* $(t, t')$. Wij gaan thans over tot de beschouwing der involutie $(t, t')$, en onderzoeken eerst haar *singuliere stralen.*

De rechte $A_1 A_2$ is bisecante van *alle* krommen $\varrho^3$. Op een willekeurige kromme $\varrho^3$ valt elk der beide steunpunten $A_1$ en $A_2$ met het daaraan toegevoegde punt samen; de rechte $A_1 A_2$ is dan aan *zichzelf* toegevoegd.

Volgens § 7 is de rechte $A_1 A_2$ een bestanddeel van één ontaarde $\delta^3$ en bevat als zoodanig twee singuliere punten $D'_1$ en $D'_2$; met deze punten komen alle punten overeen van de beide transversalen $b_1$ en $b_2$ der rechten $A_1A_2$, $a_3$, $a_4$ en $a_5$. Vat men de punten $D'_1$

en $D'_2$ als steunpunten op, dan is dus aan de rechte $A_1 A_2$ een *bilineaire stralencongruentie* toegevoegd, welke de rechten $b_1$ en $b_2$ tot richtlijnen heeft. Vat men een der punten $D'_1$ en $D'_2$ en een willekeurig ander punt der rechte $A_1 A_2$ als steunpunten op, dan vindt men, dat aan de rechte $A_1 A_2$ nog twee *stralenvelden* zijn toegevoegd, gelegen in de vlakken, die de rechten $b_1$ en $b_2$ met de rechte $A_1 A_2$ verbinden.

De rechte $a_3$ is eveneens bisecante van *alle* krommen $\varrho_3$. De steunpunten $E_3$, $F_3$ zijn telkens de beide snijpunten van de rechte $a_3$ met een oppervlak $\varphi^2_{45}$. De daaraan toegevoegde punten $E'_3$ en $F'_3$ zijn gelegen op de bij $E_3$ en $F_3$ behoorende beschrijvende $\lambda$ en $\mu$ van het oppervlak $\omega^2$.

Door elk puntenpaar $(E_3, F_3)$ gaan $\infty^1$ krommen $\varrho^3$; de bijbehoorende punten $E'_3$ en $F'_3$ beschrijven blijkbaar twee projectieve puntenreeksen. Verder vormen de puntenparen $(E_3, F_3)$ een involutie op de rechte $a_3$; ook de paren van beschrijvenden $(\lambda, \mu)$ vormen dus een involutie. De puntenparen $(E'_3, F'_3)$ vormen dus een involutie op het oppervlak $\omega^2$, en de verbindingslijnen van toegevoegde punten dezer involutie zijn de stralen, welke aan de rechte $a_3$ zijn toegevoegd.

Wij toonen nu eerst aan, dat elke beschrijvende $v$ van het oppervlak $\omega^2$, welke met de rechten $a_4$ en $a_5$ tot hetzelfde stelsel behoort, één puntenpaar $(E'_3, F'_3)$ bevat. Hiertoe merken wij op, dat twee punten $E'_3$ en $F'_3$ gelegen zijn op eenzelfde kromme $\varrho^3$; deze snijdt het oppervlak $\omega^2$ verder nog in de steunpunten der bisecanten $a_4$ en $a_5$. Daar de congruentie $[\varrho^3]$ bilineair is, behoort elke rechte $v$ als bisecante tot één $\varrho^3$; de bijbehoorende steunpunten zijn de gezochte punten $E'_3$ en $F'_3$.

Door een punt $E'_3$ van het oppervlak $\omega^2$ gaan nu twee stralen der gezochte congruentie, nl. de verbindingslijn met het toegevoegde punt $F'_3$, en de rechte $v$, die door het punt $E'_3$ gaat; de *orde* dezer congruentie is dus *twee*.

Een raakvlak van het oppervlak $\omega^2$ bevat één rechte $v$ en een rechte $\lambda$. De rechte $\mu$, die aan de rechte $\lambda$ is toegevoegd, snijdt dit raakvlak in een punt $F'_3$, en de verbindingslijn van dit punt met het toegevoegde punt $E'_3$ is een straal der beschouwde congruentie, welke met de rechte $v$ in dit raakvlak ligt. De *klasse* der congruentie is dus eveneens *twee*.

Analoge beschouwingen gelden voor de rechten $a_4$ *en* $a_5$. *Met elk der rechten* $a_3$, $a_4$ en $a_5$ *komt dus een congruentie* (2,2) *overeen.*

§ 10. Een rechte *l door het punt* $A_1$ is bisecante van $\infty^1$ krommen

$\varrho^3$. Het punt $A_1$ komt met zichzelf overeen; de meetkundige plaats der punten $P'$, die met de punten $P$ der rechte $l$ overeenkomen, is volgens § 8 een kromme $(l)^3$. Deze gaat door het punt $A_1$; want, als $P$ in $A_1$ komt, valt $P'$ met $P$ samen. De stralen, welke aan de rechte $l$ zijn toegevoegd, projecteeren de kromme $(l)^3$ uit het punt $A_1$ en vormen dus een *quadratischen kegel.*

Hetzelfde geldt voor een rechte door het punt $A_2$.

Een rechte $l$ *in het vlak* $\alpha_{23}$ is bisecante van $\infty^1$ kegelsneden $k^2$. Laten $E$ en $F$ de snijpunten van de rechte $l$ met zulk een kegelsnede zijn. De punten $E'$ en $F'$, die aan deze punten $E$ en $F$ zijn toegevoegd, liggen volgens § 5 eveneens op de kegelsnede $k^2$, en de rechte $E'F'$ is aan de rechte $l$ toegevoegd.

De meetkundige plaats der punten $E'$ en $F'$ is een kegelsnede $\varkappa^2$. Immers, de rechte $l$ heeft met de rechte $a_3$ één punt gemeen. Met dit punt komt overeen een rechte $\lambda$, zoodat de kromme $(l)^3$, die bij de rechte $l$ behoort, moet ontaarden in deze rechte $\lambda$ en in een kegelsnede $\varkappa^2$, die de meetkundige plaats der puntenparen $(E', F')$ is. Deze puntenparen vormen een involutie op de kegelsnede $\varkappa^2$; de rechte $E'F'$ gaat dus door een vast punt, zoodat aan de rechte $l$ een *waaier* van het vlak $\alpha_{23}$ is toegevoegd.

Hetzelfde geldt voor een rechte in een der vlakken $\alpha_{24}$, $\alpha_{25}$, $\alpha_{13}$, $\alpha_{14}$ en $\alpha_{15}$.

Volgens § 4 bevat elke transversaal $g_{34}$ der rechten $b_{134}$ en $b_{234}$ een involutie van puntenparen $(G, H)$, welke telkens de steunpunten zijn van een kromme $\varrho^3$. De toegevoegde punten $G'$ en $H'$ liggen op de kromme $(l^3)$, welke door de involutie $(P, P')$ aan de rechte $g_{34}$ is toegevoegd. De puntenparen $(G', H')$ vormen een op deze kromme gelegen involutie met twee coïncidenties, en de verbindingslijnen $G'H'$ bepalen een *quadratisch regeloppervlak,* dat aan de singuliere rechte $g_{34}$ is toegevoegd.

Evenzoo behoort bij elk der rechten $g_{45}$ en $g_{35}$ een *quadratisch regeloppervlak.*

De gezamenlijke rechten, die aan alle rechten $g_{34}$ zijn toegevoegd, vormen een *stralencomplex,* waarvan wij den graad later zullen bepalen.

§ 11. In § 5 is gebleken, dat op elke ontaarde $\varrho^3$ van het eerste stelsel een singulier punt $D'$ is gelegen, dat aan alle punten der rechte $d$ is toegevoegd. Een bisecante $l$ dezer $\varrho^3$ door het punt $D'$ komt dus overeen met een *waaier,* welke de rechte $d$ projecteert uit het punt, dat aan het tweede steunpunt der bisecante is toegevoegd.

Deze bisecanten $l$ vormen twee waaiers, welke beide het punt $D'$ tot basispunt hebben; de eerste is gelegen in het vlak der kegel-

snede $k^2$, de tweede projecteert de rechte $d$ uit het punt $D'$.

Daar het vlak der kegelsnede $k^2$ door de rechte $A_1A_2$ gaat, zijn de bisecanten $l$ van de eerste soort de gemeenschappelijke snijlijnen van de rechte $A_1 A_2$ en van de meetkundige plaats $\sigma^3$ der punten $D'$. Daar $A_1A_2$ en $\sigma^3$ twee punten $D'_1$ en $D'_2$ gemeen hebben, vormen hun gemeenschappelijke snijlijnen *een congruentie* (1, 3).

Een vlak $V$ snijdt de kromme $\sigma^3$ in drie punten; door elk dezer punten gaat één in het vlak $V$ gelegen bisecante $l$ van de tweede soort; deze bisecanten vormen dus een *congruentie* van de *derde* klasse.

Uit een punt $P$ wordt de kromme $\sigma^3$ door een kubischen kegel $K^3$ geprojecteerd. De vlakken, welke de bijbehoorende rechten $d$ uit $P$ projecteeren, omhullen een quadratischen kegel, waarvan de raakvlakken projectief aan de beschrijvenden van den kegel $K^3$ zijn toegevoegd; het gebeurt dus *vijf* maal, dat zulk een vlak door de bijbehoorende rechte gaat, zoodat deze rechte een door $P$ gaande bisecante $l$ van de tweede soort is. De *orde* der door deze bisecanten gevormde congruentie is dus *vijf*.

Met elken straal $l$ van een der congruenties (1, 3) en (5, 3) komt een waaier overeen van rechten $l'$, die een rechte $d$ uit een punt der bijbehoorende kegelsnede $k^2$ projecteeren. Voor de rechten $l$ van de tweede soort valt dit punt met $D'$ samen, zoodat de congruentie (5, 3) *in zichzelf* wordt omgezet; voor die van de eerste soort is het een willekeurig punt der kegelsnede $k^2$.

Een vlak $V$ snijdt de kegelsneden $k^2$ in de punten eener kromme $c^4$, die een dubbelpunt heeft in het snijpunt van het vlak $V$ met de rechte $A_1 A_2$, de rechten $d$ in de punten eener kegelsnede $c^2$. Tusschen de punten der krommen $c^4$ en $c^2$ bestaat blijkbaar een verwantschap (1, 2). De drie snijpunten dezer krommen, welke gelegen zijn buiten de snijpunten van het vlak $V$ met de rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ en met de beide transversalen $b_1$ en $b_2$ der vier rechten $A_1A_2$, $a_3$, $a_4$ en $a_5$, zijn punten $D$, dus coïncidenties dezer verwantschap. De verbindingslijnen van overeenkomstige punten dezer verwantschap, m. a. w. de in het vlak $V$ gelegen stralen $l'$, omhullen dus een kromme van de vijfde klasse.

*De stralen $l'$ welke overeenkomen met de stralen $l$ der congruentie* (1, 3), *vormen dus een stralencomplex van den vijfden graad.*

De in § 3 gevonden ontaarde krommen $\varrho^3$ van de tweede reeks bevatten geen singuliere punten.

§ 12. *Coïncidenties.* Een rechte $t$ zal een coïncidentie opleveren, indien haar steunpunten $P$ en $Q$ met de daaraan toegevoegde punten $P'$ en $Q'$ samenvallen.

De punteninvolutie $(P,P')$ heeft een eindig aantal coïncidenties, n.l. de punten $A_1$, $A_2$, en de zes in § 5 gevonden punten $D$, waarin de transversalen $b_{134}$, enz. de bijbehoorende vlakken $\alpha_{25}$, enz. snijden. De rechte $A_1A_2$ en de verbindingslijnen der punten $A_1$ en $A_2$ met de punten $D$ zijn dus coïncidentiestralen.

Beschouwen wij verder een rechte $l$ door het snijpunt $D_1$ van de rechten $b_{134}$ met het vlak $\alpha_{25}$. Deze rechte is bisecante van een ontaarde $\varrho^3$, welke gevormd wordt door de rechte $b_{134}$ en een in het vlak $\alpha_{25}$ gelegen kegelsnede $k^2$; deze kegelsnede raakt in het punt $D_1$ aan het vlak, dat door de rechten $l$ en $b_{134}$ gebracht is. Immers, laat men van een bisecante $PQ$, waarvan het steunpunt $P$ op de rechte $b_{134}$, het steunpunt $Q$ op de kegelsnede $k^2$ gelegen is, beide steunpunten tot $D_1$ naderen, dan krijgt men zulk een rechte $l$. Het punt $P'$, dat aan het punt $P$ is toegevoegd, ligt op de rechte $b_{134}$ en is door de punten $A_1$ en $D_1$ harmonisch van $P$ gescheiden; het nadert dus eveneens tot $D_1$, en wel zoodanig, dat $lim\ PD:$ $:P'D_1 = -1$ is. Op dezelfde wijze nadert het punt $Q$ op de kegelsnede $k^2$ tot het punt $D_1$. Gemakkelijk ziet men hieruit, dat de rechte $P'Q'$ in de grens met $PQ$ samenvalt, zoodat de beschouwde rechte $l$ een *coïncidentiestraal* is.

De rechten door deze zes punten $D$ zijn dus eveneens coïncidentiestralen.

Een rechte $t$ zal eveneens een coïncidentiestraal zijn, indien $P'$ met $Q$, $Q'$ met $P$ samenvalt, zoodat de steunpunten $P$ en $Q$ aan elkaar zijn toegevoegd in de involutie $(P,P')$. Volgens § 8 vormen deze stralen een *kubischen complex*.

§ 13. Wanneer een rechte $t$ een *waaier* beschrijft, zal de toegevoegde straal $t'$ een *regeloppervlak* $R$ doorloopen, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Elke straal $t$ is bisecante van één kromme $\varrho^3$; de meetkundige plaats der steunpunten is een kromme $c$; deze heeft een dubbelpunt in het basispunt $B$ van den waaier, want op de beide stralen $t$, die $B$ verbinden met de twee andere doorgangen van de door $B$ gaande $\varrho^3$, valt een der beide steunpunten in $B$. De kromme $c$ is dus van den vierden graad.

De kromme $c^4$ heeft met elk der drie rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ één punt gemeen; want, indien een straal $t$ een van deze rechten snijdt, zal één der beide steunpunten in het snijpunt vallen.

Door de involutie $(P,P')$ is aan een rechte $l$ een kromme $(l)^3$ toegevoegd, dus aan een kromme van den vierden graad in het algemeen een van den twaalfden graad. De kromme $c^4$ heeft met elk der

rechten $a_3$, $a_4$ en $a_5$ één punt gemeen en aan elk dezer punten is een rechte $\lambda$ toegevoegd, zoodat verder aan de kromme $c^4$ een kromme $\varrho^9$ is toegevoegd.

De paren steunpunten vormen op de kromme $c^4$ een involutie met *zes* coïncidenties; deze zijn de raakpunten van de zes raaklijnen, die men uit het dubbelpunt $B$ aan de kromme $c^4$ kan trekken. De daaraan toegevoegde puntenparen der kromme $\varrho^9$ vormen dus eveneens een involutie met zes coïncidenties. De verbindingslijnen van toegevoegde punten dezer involutie vormen dus een regeloppervlak van den *zesden* graad, dat niets anders dan het oppervlak $R$ is.

Wij kunnen den graad van $R$ ook bepalen door het aantal snijpunten te zoeken van dit oppervlak met de rechte $a_3$. Hiertoe merken wij op, dat aan de rechte $a_3$ een oppervlak $\omega^2$ is toegevoegd, zoodat, als een der steunpunten van een straal $t$ op dit oppervlak $\omega^2$ gelegen is, een der steunpunten van den toegevoegden straal $t'$ op de rechte $a_3$ ligt. Nu gaat het oppervlak $\omega^2$ door de rechten $a_4$ en $a_5$; de kromme $c^4$ snijdt dit oppervlak buiten de punten, die zij met de rechten $a_4$ en $a_5$ gemeen heeft, nog in *zes* punten, zoodat de beschouwde waaier *zes* stralen $t$ bevat, waarvan een der steunpunten op het oppervlak $\omega^2$ ligt; er zijn dus *zes* stralen $t'$, die de rechte $a_3$ snijden.

Ten derde kunnen wij den graad van $R$ bepalen door het aantal snijpunten te zoeken met de rechte $A_1 A_2$. Hiertoe merken wij op, dat een straal $t'$, die de rechte $A_1 A_2$ snijdt, zoo hij geen singuliere straal is, bisecante moet zijn van een kegelsnede $k^2$. De beide steunpunten zijn aan twee punten van dezelfde kegelsnede toegevoegd, zoodat de toegevoegde straal $t$ de rechte $A_1 A_2$ eveneens snijdt. De beschouwde waaier bevat één straal $t$, welke de rechte $A_1 A_2$ snijdt; de daaraan toegevoegde straal $t'$ rust ook op de rechte $A_1 A_2$.

Volgens § 11 is er een complex van den vijfden graad, bestaande uit stralen $t$, welke toegevoegd zijn aan singuliere stralen $t'$, die een congruentie (1, 3) vormen, en alle de rechte $A_1 A_2$ snijden. De beschouwde waaier bevat 5 stralen van dezen complex, dus het oppervlak $R$ vijf stralen $t'$ der (1, 3).

Te zamen wordt dus de rechte $A_1 A_2$ door zes stralen $t'$ gesneden, zoodat het oppervlak $R$ van den *zesden* graad is.

§ 14. Wij kunnen nu ook den graad bepalen van den stralencomplex, welke toegevoegd is aan de congruentie der in § 10 gevonden singuliere stralen $g_{34}$.

Een niet-singuliere straal $t'$, die de rechte $b_{134}$ snijdt, is bisecante van een ontaarde $\varrho^8$, welke bestaat uit de rechte $b_{134}$ en uit een

$k^2$dkegelsneevan het vlak $a_{25}$, die door het snijpunt van dit vlak met de rechte $t'$ gaat. De steunpunten van den toegevoegden straal $t$ liggen eveneens op de rechte $b_{134}$ en op de kegelsnede $k^2$. Nu bevat de in de vorige § beschouwde waaier éen straal $t$, die de rechte $b_{134}$ snijdt; dus is er ook éen straal $t'$, die de rechte $b_{134}$ snijdt.

De vijf andere beschrijvenden van het regeloppervlak $R^6$, die de rechte $b_{134}$ snijden, moeten *singuliere* stralen zijn, dus rechten $g_{34}$. De beschouwde waaier bevat vijf stralen, die aan stralen $g_{34}$ zijn toegevoegd; deze stralen vormen dus een complex van den *vijfden* graad.

§ 15. Met een *schoof* van stralen $t$ komt een congruentie $[t']$ overeen. Teneinde graad en klasse van deze congruentie $[t']$ te bepalen, nemen wij het basispunt $B$ van de schoof op de rechte $A_1 A_2$.

In § 13 is reeds gevonden. dat aan een straal $t$, die de rechte $A_1 A_2$ snijdt, een straal $t'$ is toegevoegd, die de rechte $A_1 A_2$ eveneens snijdt. Wij zullen nu aantoonen, dat de stralen $t$ en $t'$ de rechte $A_1 A_2$ in *hetzelfde* punt snijden.

Zij $k^2$ de kegelsnede, die de rechte $t$ tot bisecante heeft, $P$ en $Q$ de bijbehoorende steunpunten, $P'$ en $Q'$ de hieraan toegevoegde punten. Door een lineaire transformatie van het vlak $\pi$ der kegelsnede $k^2$ kunnen wij de punten $A_1$ en $A_2$ in de oneindig verre cirkelpunten laten overgaan. Is $S$ nu een willekeurig punt der kegelsnede $k^2$, dan zullen de rechten $S P$ en $S P'$ door $S A_1$ en $S A_2$ harmonisch gescheiden worden, dus na de transformatie loodrecht op elkaar staan, zoodat $PP'$ een middellijn van den cirkel $k^2$ is; eveneens de rechte $Q Q'$. De koorden $P Q$ en $P' Q'$ loopen dus evenwijdig en snijden elkaar bijgevolg op de rechte $A_1 A_2$.

Met een willekeurigen straal $t$ door het punt $B$ komt dus een straal door hetzelfde punt overeen, zoodat tot de congruentie $[t']$ in de eerste plaats de beschouwde schoof zelf behoort.

Met de rechte $A_1 A_2$ komt een *bilineaire stralencongruentie* overeen, die eveneens behoort tot de congruentie $[t']$, benevens *twee stralenvelden.*

Door het punt $B$ gaat een kubische kegel van singuliere stralen der in § 11 beschouwde congruentie (1, 3). Met elk dezer stralen komt een waaier overeen, die een rechte $d$ uit een punt $Q'$ der bijbehoorende kegelsnede $k^2$ projecteert. Het punt $Q'$ is toegevoegd aan het tweede snijpunt $Q$ van den straal met de kegelsnede $k^2$.

De genoemde kubische kegel heeft de rechte $A_1 A_2$ tot dubbele beschrijvende. De beide beschrijvenden, die met $A_1 A_2$ samenvallen, behooren bij de beide ontaarde kegelsneden $k^2$, die uit de rechte

$A_1 A_2$ en uit een der beide rechten $b_1$, $b_2$ bestaan, en de twee bladen van den kegel $K^3$, die door de rechte $A_1 A_2$ gaan, raken dus de vlakken dezer ontaarde kegelsneden aan. Zij raken dus ook aan de beide door $A_1 A_2$ gaande bladen van het in § 2 gevonden oppervlak van den vierden graad, dat door de kegelsneden $k^2$ beschreven wordt; de rechte $A_1 A_2$ behoort dus *zesmaal* tot de doorsnede van den kegel $K^3$ met dit oppervlak. De verdere doorsnede bestaat uit de kromme $\sigma^3$, die door den kegel $K^3$ geprojecteerd wordt, en uit de meetkundige plaats $\tau^3$ der punten $Q$. De kegel $K^3$ heeft met elk der drie rechten $a_3, a_4$ en $a_5$, die op het genoemde biquadratische oppervlak liggen, *drie* punten gemeen; daar de kromme $\sigma^3$ deze rechten tot bisecanten heeft, liggen twee dezer punten telkens op de kromme $\sigma^3$, terwijl het derde op de kromme $\tau^3$ moet liggen.

Verder vindt men gemakkelijk, dat de krommen $\sigma^3$ en $\tau^3$, die op eenzelfden kubischen kegel gelegen zijn, *drie* punten gemeen hebben.

In het algemeen is door de involutie $(P, P')$ aan een kubische kromme een kromme van den negenden graad toegevoegd. Daar de kromme $\tau^3$ echter met elk der rechten $a_3, a_4$ en $a_5$ één punt gemeen heeft, behooren tot deze toegevoegde kromme drie rechten $\lambda$; en daar zij drie punten gemeen heeft met de kromme $\sigma^3$, dus drie singuliere punten $D'$ bevat, behooren er toe drie rechten $d$. De eigenlijke meetkundige plaats der punten $Q'$ is dus een kromme $\tau_1^3$.

De gezochte stralen, welke aan de beschrijvenden van den kegel $K^3$ zijn toegevoegd, projecteeren de rechten $d$ uit de bijbehoorende punten $Q'$ der kromme $\tau_1^3$. Op dezelfde wijze als in § 11 zou men dus vinden, dat deze stralen een congruentie (5, 3) vormen. Nu gebeurt het echter *driemaal*, dat het punt $Q'$ met het punt $D$ samenvalt, dus op de bijbehoorende rechte $d$ ligt; deze punten zijn toegevoegd aan de drie snijpunten der krommen $\sigma^3$ en $\tau^3$, want in deze valt het punt $Q$ met het punt $D'$ samen. In dit geval zullen *alle* stralen door het punt $Q'$ de rechte $d$ snijden. Van de congruentie (5, 3), die men in het algemeen zou vinden, worden dus drie schooven afgesplitst, en men vindt dus slechts een congruentie (2, 3).

Aan de schoof der stralen door een punt $B$ der rechte $A_1 A_2$ zijn dus toegevoegd een stralenschoof, twee stralenvelden, een bilineaire congruentie en een congruentie (2, 3). In het algemeen komt dus met een *stralenschoof* een congruentie (4, 6) overeen.

§ 16. Met een *stralenveld* komt eveneens een zekere congruentie overeen. Om deze te onderzoeken, beschouwen wij de stralen, gelegen in een vlak $\pi$ door de rechte $A_1 A_2$.

Een niet-singuliere straal van dit veld is bisecante van een in dit

vlak $\pi$ gelegen kegelsnede $k^2$, dus toegevoegd aan een andere bisecante dezer kegelsnede. Tot de gezochte congruentie behoort dus ten eerste het stralenveld *zelf*.

Met de, in het vlak $\pi$ gelegen, rechte $A_1 A_2$ komen overeen een bilineaire stralencongruentie, benevens twee stralenvelden.

Met een willekeurige rechte door het punt $A_1$ komt een quadratische kegel overeen, die het punt $A_1$ tot top heeft. Deze snijdt het vlak $\pi$ volgens twee rechte lijnen. De schoof der stralen door het punt $A_1$ behoort dus ook tot de gezochte congruentie, en wel moet elk dezer stralen *tweemaal* geteld worden, daar hij aan *twee* stralen van het vlak $\pi$ is toegevoegd. Hetzelfde geldt voor de schoof der stralen door het punt $A_2$.

Het vlak $\pi$ snijdt de kromme $\sigma^8$ buiten de punten $D'_1$ en $D'_2$ nog in één punt; door dit punt gaat een waaier van singuliere stralen van de congruentie (1,3). Met elk dezer stralen komt een waaier overeen, die de rechte $d$, welke bij de kegelsnede $k^2$ behoort, uit een punt dezer kegelsnede projecteert; met den genoemden waaier komt dus overeen de congruentie der rechten welke op $k^2$ en $d$ rusten. Daar deze een punt $D$ gemeen hebben, vormen die snijlijnen een congruentie (1,2). Een *stralenveld* wordt dus omgezet in een congruentie (6,6).

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Prof. W. H. KEESOM aan: Mededeeling N°. 2*a* uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: A. J. BIJL en N. H. KOLKMEIJER: „*Onderzoek met behulp van Röntgen-stralen naar de kristalstructuur van wit en grauw tin.* II. *De structuur van wit tin*".

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

In Meded. N°. 1 (Juni 1918) deelden wij mede, dat wij volgens de methode van DEBIJE en SCHERRER Röntgenogrammen van wit en van grauw tin hadden opgenomen en beschreven wij verschillende bizonderheden van de inrichting dier metingen. Verder gaven wij in eene figuur voor beide genoemde toestanden van tin de plaats der interferentie-maxima in een vlak loodrecht op de lengterichting der staafjes, waarbij tevens de intensiteiten der betreffende interferentielijnen aangeduid werden. Het fotogram van het grauwe tin deed zien, dat dit gekristalliseerd is, terwijl uit de vergelijking van de fotogrammen voor de beide toestanden bleek, dat het grauwe tin een andere kristalstructuur bezit dan het witte. Wij hebben nu uit die fotogrammen de kristalstructuur zoowel van wit als van grauw tin afgeleid en zullen in deze mededeeling onze uitkomsten voor wit tin mededeelen, terwijl Mededeeling N°. 2*b* (deze Verslagen) zal handelen over grauw tin.

In tabel I vindt men in kolom 1 de intensiteiten der betreffende interferentielijnen aangegeven: zz beteekent zeer zwak, z zwak, m matig, s sterk, zs zeer sterk.

In kolom 2 zijn opgenomen, in 0,1 mm uitgedrukt, de afstanden van de doorsneden der interferentielijnen met het vlak, gaande door de as van den invallenden RÖNTGEN-bundel en loodrecht op de lengterichting van het preparaat tot het punt, waar het verlengde van die as het film zou treffen, gemeten, terwijl het film in een plat vlak ontwikkeld is. In kolom 3 zijn gerangschikt de waarden van $sin^2 \frac{1}{2} \theta$, berekend uit bovengenoemde afstanden en de in Meded. N°. 1 genoemde gegevens van het apparaat.

Aan de in kolom 3 gegeven waarden moet nu in verband met

TABEL I.

| Intensiteit | Halve diameter interferentielijn | $\sin^2 {}^1/_2\,\theta$ | $\sin^2 {}^1/_2\,\theta$ gecorrigeerd | gecorr. $\sin^2 {}^1/_2\,\theta \times \frac{1}{0.01734}$ | afgerond | Indicestripletten met $h_3 = 0$ | Indicestripletten met $h_3 = 1$ | Indicestripletten met $h_3 = 2$ | Indicestripletten met $h_3 = 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| m | 168 | 0.0924 | 0.0790 | 4.6 | 4.5 | *2.0.0.* | | | |
| zz | 208 | 0.1393 | 0.1243 | 7.2 | 7 | | 1.0.1. | | |
| zs | $228^5$ | $0.1663^5$ | 0.1502 | 8.7 | 9 | 3.0.0.<br>*2.2.0.* | *1.1.1.* | | |
| z | 280 | 0.2424 | 0.2253 | 13.0 | 13 | 3.2.0. | | | |
| s | 311 | 0.2928 | 0.2762 | 15.9 | 16 | 4.0.0. | 3.1.1. | | |
| z | 322 | 0.3114 | 0.2945 | 17.0 | 17 | 4.1.0. | | | |
| zz | $349^5$ | 0.3591 | 0.3433 | 19.8 | 20 | 4.2.0. | | | |
| m | 362 | 0.3813 | 0.3653 | 21.1 | 21 | | | | |
| zs | 390 | 0.4319 | 0.4173 | 24.1 | 24 | | 3.3.1. | 0.0.2. | |
| zz | 416 | 0.4794 | 0.4666 | 26.9 | 27 | | | *2.0.2.* | |
| m | $438^5$ | 0.5208 | 0.5079 | 29.3 | 29.5 | | | | |
| s | 464 | 0.5675 | 0.5565 | 32.1 | 32 | 4.4.0. | 5.1.1. | 2.2.2. | |
| s | $500^5$ | 0.6332 | 0.6243 | 36.0 | 36 | 6.0.0. | | | |
| zs | $538^5$ | 0.6990 | 0.6922 | 39.9 | 40 | 6.2.0. | 5.3.1. | 4.0.2. | |
| zz | 554 | 0.7248 | 0.7182 | 41.4 | 41.5 | | | | |
| s | $586^5$ | 0.7687 | $0.7640^5$ | 44.1 | 44 | | | 4.2.2. | |
| zz | 597 | 0.7923 | 0.7878 | 45.4 | 45.5 | | | | |
| zs | 627 | 0.8352 | 0.8325 | 48.0 | 48 | | | | |
| z | 640 | 0.8525 | 0.8499 | 49.0 | 49 | 7.0.0. | | 4.3.2.<br>5.0.2. | |
| m | 690 | 0.9114 | 0.9104 | 52.5 | 52.5 | *6.4.0.* | | | |
| z | $721^5$ | 0.9415 | 0.9406 | 54.2 | 54 | | | | 0.0.3. |
| m | $757^5$ | 0.9686 | 0.9686 | 55.9 | 56 | | 5.5.1.<br>7.1.1. | 4.4.2. | 1.1.3. |
| zz | $790^5$ | 0.9863 | 0.9863 | 56.9 | 57 | | | | |

de dikte van het preparaat eene correctie[1]) aangebracht worden. Deze correctie is niet noodig, als de absorptie der karakteristieke stralen in het preparaat te verwaarloozen is, wat bij vele der tot nu toe volgens de methode van DEBIJE en SCHERRER onderzochte stoffen het geval was. Dit geldt echter niet in ons geval (*Cu*-stralen), waarin de straling slechts tot zeer geringe diepte, praktisch in 't geheel niet, in het preparaat doordringt. De verbeterde waarden van $sin^2\, {}^1/_2\, \theta$ vindt men in kolom 4 van de tabel.

Gedurende de berekeningen voor het opstellen van eene formule voor $sin^2\, {}^1/_2\, \theta$ bleek nu, dat de groote meerderheid der waarden van kolom 4 bij deeling door 0,01734 een quotient oplevert, dat niet veel van een geheel getal verschilt. Men vindt deze quotienten in kolom 5. De tot ${}^1/_2$ eenheid afgeronde waarden dier quotienten zijn in kolom 6 opgenomen.

Door MILLER[2]) is aan kristallen, verkregen door electrolyse, de kristalvorm opgemeten. Deze bleek tot het tetragonale kristalsysteem te behooren met een assenverhouding $a : a : c = 1 : 1 : 0{,}3857$. Het lag dus voor de hand, te beproeven, aansluiting der waarden in kolom 4 te vinden aan een formule van den vorm:

$$sin^2 \frac{\theta}{2} = A\,(h_1^2 + h_2^2) + Bh_3^2 = A\,(h_1^2 + h_2^2 + qh_3^2),$$

waarin $A = \dfrac{\lambda^2}{4a^2}$ en $B = Aq = \dfrac{\lambda^2}{4c^2}$. Hierin stellen $a$ en $c$ nu voor de ribben van het elementair-parallelepipedum of van de *elementair-cel*. Ook ligt het zeer voor de hand, voor $A$ de bovengegeven waarde 0.01734 te kiezen en dus verder aansluiting van de getallen in kolom 6 te zoeken aan een uitdrukking $h_1^2 + h_2^2 + qh_3^2$, waarbij dan blijkbaar $q$ dicht bij een geheel getal moest liggen.

Door $q = 6$ te kiezen blijkt nu een behoorlijke aansluiting verkregen te worden. Om dit in te zien doet men het best een tabel samen te stellen van de waarden van $h_1^2 + h_2^2$ voor de verschil-

---

[1]) Vergel. ook P. DEBIJE, Physik. Z. S. 18 (1917) p. 5. Voor het bedrag dier correctie vonden wij (van de waarde van $sin^2\, {}^1/_2\, \theta$ af te trekken):

$$\frac{r}{4R} \sin\theta \left\{ \frac{R}{d} + \cos\theta + \sqrt{\frac{R^2}{d^2} + \frac{R}{d}\cos\theta + 1} \right\}$$

Hierin stelt $r$ voor den straal van de cirkelvormige doorsnede van het staafje, $R$ dien van de camera, $d$ den afstand van het middelpunt der camera tot de opening van het diafragma, waar de stralen invallen. Tweede en hoogere machten van $r/R$ en $r/d$ zijn verwaarloosd.

[2]) W. H. MILLER, Ann. d. Phys. u. Ch. 58 (1843), p. 660. Zie ook H. VON FOULLON. Jahrb. d. Kais.-Kön. Geol. Reichsanst. Wien 34 (1884), p. 367.

lende combinaties van $h_1$ en $h_2$, gerangschikt naar opklimmende waarden van $h_1^2 + h_2^2$. Vergelijkt men die reeks van waarden van $h_1^2 + h_2^2$ met de getallen van kolom 6, dan vindt men de in kolom 7 aangegeven indicestripletten met $h_3 = 0$, die voldoen, waarbij alleen op de niet-cursief gedrukte indicestripletten te letten is. Door alle waarden van $h_1^2 + h_2^2$ met 6 te vermeerderen, en weer te vergelijken met de getallen in kolom 6 vindt men op dezelfde wijze de in kolom 8 aangegeven indicestripletten met $h_3 = 1$. Op dergelijke wijzen worden de kolommen 9 en 10 samengesteld.

Ziet men nu, in verband met de voor kleine waarden van $\vartheta$ optredende afwijkingen (vergl. p. 356), af van de eerste vier lijnen, dan zijn er van de overblijvende 19 lijnen slechts 2, die niet behooren tot (niet cursief gedrukte) indicestripletten, waarvan niet alle indices òf even, òf oneven zijn. Gaat men na, of alle te verwachten lijnen, die aan deze voorwaarde voldoen, aanwezig zijn, dan blijkt, dat er nog 5 zouden moeten voorkomen. De betreffende indicestripletten zijn, cursief gedrukt in de tabel (kolom 7—10) opgenomen en toegewezen aan die lijnen, wier plaats het dichtst de voor deze lijnen verwachte plaats nabijkomt.

Het verschil tusschen de plaats, waar die lijnen gevonden worden en die, waarop zij verwacht zouden worden, is in al die gevallen gering en kan voor twee gevallen daaraan toegeschreven worden, dat de betreffende lijn van eene naburige lijn niet gescheiden gezien kan worden; het overtreft in alle gevallen in verband met de kleine waarde van $A$ niet de onzekerheid der waarneming.

Er is dus genoeg aanwijzing voor het aannemen van een structuur, die vereenigbaar is met het bij voorkeur optreden van interferentielijnen, die toe te schrijven zijn aan terugkaatsingen op netvlakken met enkel even of oneven indices-tripletten.

Het ontbreken van indicestripletten, waarvan niet alle indices òf even, òf oneven zijn, wijst op gecenterde zijvlakken.

Uit het atoom-gewicht (119.0), het soortelijk gewicht (7.285 bij 18°), het getal van AVOGADRO ($6{,}06.10^{23}$) en de golflengte voor $Cu_{K\alpha}$ ($1{,}541.10^{-8}$) volgt met $A = 0.01734$ en $q = 6{,}06$ (wat later bleek nog beter te voldoen dan 6), voor het aantal atomen per cel de waarde 3,02.

Wij komen tot het aantal 3 door atomen aan te brengen in de hoekpunten van de cel en in de centra der prismavlakken.

Dit is voor zoover ons bekend is, het eerste voorbeeld, waarbij wel in de centra der opstaande vlakken, evenwel niet in die der bases atomen gevonden worden.

Behalve de bovenbehandelde tripletten moeten bij deze structuur nog andere tripletten tot interferentielijnen aanleiding geven. Dan

wordt nl. de structuurfactor $S = 1 + e^{\pi i (h_2 + h_3)} + e^{\pi i (h_3 + h_1)}$. De waarde hiervan is 3, als alle indices òf even, òf oneven zijn en in de andere gevallen 1 of —1. Het blijkt dus, dat de vlakken, wier indices niet aan de besproken voorwaarde voldoen, wel als interferentielijnen moeten voorkomen, echter onder overigens gelijke omstandigheden met slechts $^1/_9$ van de intensiteit der andere lijnen. Het kan dus niet verwonderen, dat enkele van deze soort van vlakken een voldoende intensiteit aan de interferentielijnen kunnen geven en hun indicestripletten in de kolommen 7—10 van tabel I vertegenwoordigd zijn.

Ten einde een oordeel te kunnen vellen over de mate van overeenstemming van de op grond van de aangegeven structuur te verwachten plaats en intensiteit der interferentielijnen met de waargenomene is eene tabel opgemaakt, waarin de waarden van $\sin^2 {}^1/_2\, \theta$, zoowel voor $Cu_{K\alpha}$- als voor $Cu_{K\beta}$-straling, berekend voor alle in aanmerking komende indicestripletten, met de bijbehoorende relatieve intensiteiten zijn opgenomen. Tabel II vormt daarvan een uittreksel, waarin in de eerste plaats zijn weggelaten alle tripletten, waarvoor de structuurfactor niet $= 3$ is en waarin verder van elke groep van indicestripletten, welke kunnen geacht worden zoo dicht bij elkander liggende lijnen te leveren, dat deze tezamen op ons Röntgenogram slechts eene enkele lijn zullen geven, slechts dat triplet is aangegeven, dat tot de meest intensieve van die groep lijnen aanleiding geeft. Bevat een zoodanige groep zoowel $\alpha$- als $\beta$-lijnen, dan is van beide soorten de sterkste opgenomen [1]).

Afwijkingen tusschen berekende en waargenomen waarden van $\sin^2 \frac{\theta}{2}$, die grooter zijn dan met den nauwkeurigheidsgraad der metingen overeenkomt, komen in tabel II slechts voor bij de eerste drie lijnen. Hieromtrent zij opgemerkt, dat deze lijnen zeer wazig zijn, wat, in verband met de sluiering van het film als gevolg van de werking der remstraling in den Röntgenbundel, de aflezing eenigermate onzeker maakt, en dat verder de correctie wegens de dikte

---

[1]) Tijdens het drukken van Meded. No. 1 werd ons bekend, dat Dr. SCHERRER en Prof. JOHNSEN een Röntgenogram van wit tin hadden opgenomen en stelde Prof. JOHNSEN ons voor de waarnemingsgetallen wederkeerig te wisselen. De ons daarop door Prof. JOHNSEN welwillend medegedeelde uitkomsten geven, vooral bij de kleinere waarden, alle iets kleinere bedragen voor $\sin^2 {}^1/_2\, \theta$ dan de onze. Misschien is dit daaraan toe te schrijven, dat de door ons aangebrachte correctie wegens de dikte van het staafje nog iets te klein genomen is. In de noten bij tabel II worden enkele van de verschillen tusschen de uitkomsten van SCHERRER en JOHNSEN en die van ons besproken.

TABEL II.

| Intensiteit | $\sin^2 \frac{\theta}{2}.10^3$ waargenomen | $\sin^2 \frac{\theta}{2}.10^3$ berekend voor $Cu_{K\alpha}$ | Relatieve intensiteit (berekend) der $\alpha$-lijnen | $h_1\ h_2\ h_3$ | $\sin^2 \frac{\theta}{2}.10^3$ berekend voor $Cu_{K\beta}$ | Relatieve intensiteit (berekend) der $\beta$-lijnen | $h_1\ h_2\ h_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 79 [1] | 69 | 9.0 | 2 0 0 | | | |
| zz | 124 | | | | 113 | 9.0 | 1 1 1 |
| zs | 150 | 140 | 9.0 | 1 1 1 | | | |
| z | 225 | | | | 225 | 9.0 | 3 1 1 |
| s | 276 | 278 | 9.0 | 3 1 1 | 280 | 3.6 | 4 2 0 |
| z | $294^5$ | | zwakkere $\alpha$-lijn | | | | |
| zz | 343 | 347 | 3.6 | 4 2 0 | 337 | 3.0 | 3 3 1 |
| m | 365 [2] | | | | | zwakkere $\beta$-lijnen | |
| zs | 417 [3] | 417 | 3.0 | 3 3 1 | | | |
| zz | 467 | | | | 449 | 4.5 | 5 1 1 |
| m | 508 [4] | 490 | 2.6 | 2 0 2 | 504 | 1.0 | 6 0 0 |
| s | $556^5$ | 556 | 4.5 | 5 1 1 | 561 | 3.6 | 5 3 1 |
| s | 624 | 624 | 1.0 | 6 0 0 | 620 | 3.3 | 4 2 2 |
| zs | 692 | 695 | 3.6 | 5 3 1 | | | |
| zz | 718 | | | | 729 | 1.4 | 6 4 0 |
| s | 764 | 767 | 3.3 | 4 2 2 | | | |
| zz | 788 | | | | 785 | 2.6 | 7 1 1 |
| zs | $832^5$ | | | | | zwakkere $\beta$-lijnen | |
| z | 850 [5] | | | | 844 | 1.2 | 6 0 2 |
| m | 910 [6] | 902 | 1.4 | 6 4 0 | 897 | 2.25 | 7 3 1 |
| | | | | | 900 | 2.25 | 6 2 2 |
| | | | | | 904 | 2.25 | 3 1 3 |
| z | 941 | | | | 953 | 1.1 | 8 2 0 |
| m | 969 | 972 | 2.6 | 7 1 1 | | | |
| zz | 986 | | | | | zwakkere $\beta$-lijnen | |

[1]) Aan deze lijn gaat bij SCHERRER en JOHNSEN vooraf z 57, die als 56 9 200 $\beta$ beschouwd kan worden. De waarden, door S. en J. opgegeven voor de drie eerste lijnen, nl. zs 72, m 116 en zs 143 komen beter met de plaats der sterkste berekende lijnen overeen dan de onze.

[2]) De beide lijnen 343 en 365 zijn op onze film bijna niet te scheiden. Zij worden door S. en J. opgegeven als één lijn s 348.

[3]) Bij S. en J. s $404^5$, vermoedelijk door het sterker opkomen van 202 $\beta$ (op 396) intensiteit 2,6.

[4]) Bij S. en J. s 491.

[5]) Bij de lijnen $832^5$ en 850 vertoonen zich op onze film bijna onafgebroken stippen van 819 tot 866. S. en J. duiden de beide intensiteiten aan met s tot m en z.

[6]) S. en J. hebben s 906.

van het preparaat voor deze lijnen eene relatief groote onzekerheid medebrengt.

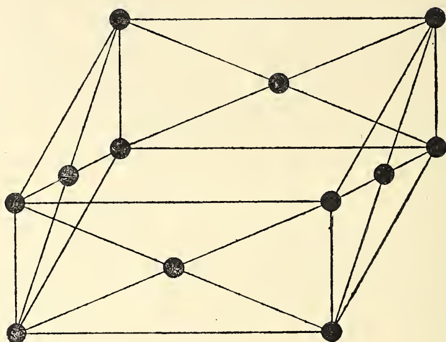


Fig. 1.

Uit de gevonden waarden van $A$ en $q$ volgt voor de ribben van de elementair-cel: $a = 5{,}84.10^{-8}$ en $c = 0{,}406a = 2{,}37.10^{-8}$ cm. In fig. 1 is eene voorstelling van eene elementair-cel gegeven.

In het uit deze cellen opgebouwde ruimtenet zien we afwisselende lagen van atomen op gelijke afstanden van $1{,}19.10^{-8}$ cM. De eerste laag heeft een net van vierkanten met zijde $5.84.10^{-8}$cM., de volgende een net van vierkanten met zijde $4{,}13.10^{-8}$ cM., welke vierkanten zich juist bevinden boven de symmetrisch ingeschreven vierkanten in die der eerste laag.

De dichte opeenvolging dier lagen wijst op sterke krachtwerking in eene richting loodrecht op de lagen; wellicht staat met dit laatste in verband het voorkomen van naaldvormige combinaties.

Röntgenometrische onderzoekingen leeren ons een blik slaan in den bouw van het kristal en kunnen aldus voeren tot een meer rationeele keuze betreffende het kristallografische assenkruis dan de vroegere kristallografische methoden. Het witte tin levert hiervan een voorbeeld. Zoo zou b.v. de door MILLER als (111) aangenomen bipyramide (assenverhouding $a : a : c = 1 : 1 : 0{,}03857$) volgens het door ons voorgestelde assenkruis, gevormd uit de ribben van de elementair-cel, worden aangeduid met (403); evenzoo de vlakken (110), (100), (101) van MILLER door resp. (100), (110), (223) volgens ons.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Prof. W. H. KEESOM aan: Mededeeling N°. 2*b* uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: A. J. BIJL en N. H. KOLKMEIJER: „*Onderzoek met behulp van Röntgen-stralen naar de kristalstructuur van wit en grauw tin.* III. *De structuur van grauw tin*".

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

In deze mededeeling zullen wij uit het door ons opgenomen en in mededeeling N°. 1 (Juni 1918, p. 191) in eene figuur tegelijk met dat voor wit tin weergegeven Röntgenogram de kristalstructuur van het grauwe tin afleiden. Daartoe zijn in de eerste kolom van tabel I opgenomen de afstanden van de doorsneden der interferentielijnen met het vlak, gaande door de as van den invallenden Röntgenbundel en loodrecht op de lengterichting van het preparaat, tot het punt, waar het verlengde van die as het film zou treffen, gemeten, terwijl het film in een plat vlak ontwikkeld is en gecorrigeerd wegens de dikte van het preparaat (vergel. Meded. N°. 2*a*, p. 354). De intensiteiten zijn aangegeven met zz zeer zwak, z zwak, m matig, s sterk, zs zeer sterk. Kolom 2 bevat de daaruit (straal der camera 27,3 m.m., te verminderen met de halve dikte van het film, d. i. 0,1 m.m.) afgeleide waarden van $sin^2 \frac{1}{2}\vartheta$.

Door deze getallen te vermenigvuldigen met 0,808, d. i. het quadraat der verhouding van de golflengten van $Cu_{K_\alpha}$ en $Cu_{K_\beta}$, is men in staat de getallen, die van de $\beta$-lijn afkomstig kunnen zijn, af te zonderen en daardoor eene lijst samen te stellen, die uitsluitend $\alpha$-waarden bevat.

Volgens eene algemeene methode van berekening, waarbij we van een willekeurig assen-systeem uitgingen, en waarover wij ons voorbehouden eene nadere mededeeling te doen, bleek het grauwe tin waarschijnlijk regulair te zijn. In dit geval moeten onze getallen voldoen aan de vergelijking:

$$sin^2 \frac{\vartheta}{2} = A\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = \frac{\lambda^2}{4a^2}\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2),$$

waarin $A$ eene constante, $h_1, h_2$ en $h_3$ de indices van MILLER, $\lambda$ golflengte Röntgenlicht, $a$ ribbe elementaire kubus.

TABEL I.

| Afstanden in 0.1 mm. | $sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot 10^3$ | $Cu_{K_\alpha}$-straling | | | | $Cu_{K_\beta}$-straling | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot 10^3$ berekend | Intensiteit | $h_1\, h_2\, h_3$ | $h_1^2+h_2^2+h_3^2$ | $sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot 10^3$ berekend | $h_1\, h_2\, h_3$ | $h_1^2+h_2^2+h_3^2$ |
| z 112 | 41 | | | | | 34 | 1 1 1 | 3 |
| z $144^5$ | 69 | 43 | 1.3 | 1 1 1 | 3 | | | |
| zz 168 | 92 | | | | | 92 | 2 2 0 | 8 |
| m 191 | 118 | 114 | 1.5 | 2 2 0 | 8 | 126 | 3 1 1 | 11 |
| m 221 | 156 | 156 | 1.1 | 3 1 1 | 11 | | | |
| zz 239 | 181 | | | | | 184 | 4 0 0 | 16 |
| z 272 | 230 | 231 | 0.4 | 4 0 0 | 16 | | | |
| m 300 | $274^5$ | 270 | 0.6 | 3 3 1 | 19 | $275^5$ | 4 2 2 | 24 |
| s 342 | 346 | 341 | 1.0 | 4 2 2 | 24 | | | |
| m 370 | $395^5$ | 384 | 0.6 | 3 3 1<br>5 1 1 | 27 | 402 | 5 3 1 | 35 |
| z 406 | 461 | 455 | 0.4 | 4 4 0 | 32 | 459 | 6 2 0 | 40 |
| m 426 | 498 | 497 | 0.7 | 5 3 1 | 35 | | | |
| s 464 | 567 | 568 | 0.6 | 6 2 0 | 40 | | | |
| z 488 | 611 | 611 | 0.3 | 5 3 3 | 43 | | | |
| z 509 | 648 | | | | | 643 | 6 4 2 | 56 |
| z 530 | 684 | 682 | 0.2 | 4 4 4 | 48 | 677 | 5 5 3<br>7 3 1 | 59 |
| m 554 | 725 | 725 | 0.5 | 5 5 1<br>7 1 1 | 51 | | | |
| zs 596 | 791 | 796 | 0.9 | 6 4 2 | 56 | | | |
| zs 626 | 834 | 838 | 0.6 | 5 5 3<br>7 3 1 | 59 | | | |
| zz 655 | $871^5$ | | | | | 862 | 5 5 5<br>7 5 1 | 75 |
| z 678 | 898 | 909 | 0.1 | 8 0 0 | 64 | | | |
| z 694 | 915 | | | | | 918 | 8 4 0 | 80 |
| m $730^5$ | 949 | 952 | 0.2 | 7 3 3 | 67 | | | |

We hebben nu slechts de konstante $A$ te bepalen en daaruit het aantal atomen in den elementairen kubus $a^3$. Eene voorloopige berekening duidde op ongeveer acht atomen per kubus, wat op diamantstructuur wijst. We gingen dus na of onze interferentiestrepen met diamantstructuur overeenstemmen.

Met behulp van het atoomgewicht (119,0) en het soortelijk gewicht van grauw tin bij 18° (5,751), het getal van AVOGADRO ($6{,}06.10^{23}$) en de golflengte van de $K$-reeks van de koperstralen ($\alpha$ $1{,}541.10^{-8}$, $\beta$ $1{,}385.10^{-8}$) vindt men: $A_\alpha = 0{,}0141$ ; $A_\beta = 0{,}0114$. Nagenoeg hiermede in overeenstemming vinden we als gemiddelde uit de waargenomen lijnen voor $A_\alpha = 0{,}01422$ en voor $A_\beta = 0{,}01149$. Kolom 3 geeft de met behulp van de laatstgenoemde waarde van $A_\alpha$ berekende getallen voor $sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, voorzoover zij tot interferentiestrepen aanleiding geven.

Uit den structuurfactor van DEBIJE volgt namelijk, dat voor diamantstructuur alleen interferentiestrepen verkregen worden als $h_1$,$h_2$ en $h_3$ alle even of alle oneven zijn, en zoo ze even zijn haar som deelbaar is door 4. De uitdrukking $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ wordt dan 3, 8, 11 enz., zie kolom 6, terwijl in kolom 5 de bijbehoorende waarden van $h_1$,$h_2$,$h_3$ gegeven zijn.

De in kolom 4 opgegeven intensiteit vindt men door $64\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$ te deelen op het produkt van het aantal vlakken en het quadraat van het absoluut bedrag van den structuurfactor. Aan dit getal kenne men slechts in zooverre waarde toe, dat men alleen de intensiteit van drie naast elkaar liggende lijnen vergelijke.

De kolommen 7, 8 en 9 hebben op de $\beta$-waarden betrekking.

Uit vergelijking der waargenomen en der berekende waarden voor $sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ blijkt, mede in verband met de intensiteit een voldoende overeenstemming.

De twee kleinste sinusquadraten voldoen niet [1]). Hieromtrent zij verwezen naar Meded. N°. 2$a$ p. 356.

Gaat men na of alle lijnen, die op grond van de genoemde structuur verwacht moeten worden, aanwezig zijn, dan blijkt dat van de te verwachten $\alpha$-lijnen geen enkele ontbreekt; daarentegen hebben enkele der $\beta$-lijnen blijkbaar eene te geringe sterkte en worden dus niet op het Röntgenogram waargenomen.

Uit de boven uit de waarnemingen afgeleide waarden van $A_\alpha$ en $A_\beta$ vinden wij voor $a$, de ribbe van den elementairen kubus $6{,}46.10^{-8}$

---

[1]) Vergelijk P. DEBIJE, Physik. ZS. 18 (1917), p. 488 Noot.

c.M. bij 18° C. Voor den afstand van twee naburige atomen volgt hieruit $2{,}80.10^{-8}$ c.M.

In het grauwe tin met zijn diamantstructuur, die silicium ook bezit, zien we de tetravalentie duidelijk te voorschijn treden, terwijl in de tetragonale modificatie, waar elk atoom door twee naastliggende met kleineren afstand dan die der overige omringende atomen omgeven is, twee valenties in het bijzonder op den voorgrond treden.

In verband hiermede ware het interessant te onderzoeken of het afwijkend gedrag, dat GRÜNEISEN [1]) in den loop van het geleidingsvermogen bij lage temperatuur voor cadmium, tin en kwikzilver vond, en dat hij aan het niet-regulair zijn van het metaal toeschreef, bij het grauwe tin niet gevonden wordt, of wel dat de diamantstructuur nog eene afwijking in het geleidingsvermogen bij lage temperatuur van het gedrag der in kubi met gecenterde vlakken kristalliseerende metalen veroorzaakt.

Prof. KEESOM brengen wij onzen besten dank voor de groote belangstelling, die wij steeds van hem mochten ondervinden.

---

[1]) E. GRÜNEISEN. Verh. D. physik. Ges. 20 (1918), p. 36.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer A. D. FOKKER: „*Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan eene verplaatsing evenwijdig aan zichzelf, en over de Riemanniaansche kromtemaat.*"

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

(Aangeboden in de zitting van 26 April 1918).

1. *Inleiding.* Het ligt in mijne bedoeling, eene kinematische inkleeding te geven van eenige vindingen, onlangs door Prof. J. A. SCHOUTEN in het Wiskundig Genootschap te Amsterdam voorgedragen als „het zich geodetisch medebewegende assenstelsel" en den „geodetischen differentiaal", en daarvan een enkele toepassing te maken [1]). Het zal erop aankomen op een nieuwe manier in te zien wat het is, hetgeen wij in gekromde ruimten kunnen laten beantwoorden aan eene verplaatsing evenwijdig aan zichzelf, eene bewerking die men in elke vectoranalyse kennen moet om twee vectoren in verschillende punten met elkander te kunnen vergelijken.

Een der kenmerkende eigenschappen van de zuivere translatie is, dat elk punt van een vast lichaam daarbij over een even grooten afstand wordt verschoven. Men zou deze eigenschap kunnen gebruiken om een evenwijdige verplaatsing te definieeren. Weliswaar mag dan het aantal punten waaruit het vaste lichaam bestaat niet kleiner dan een zeker minimum zijn. Immers wanneer in een ruimte van 3 afmetingen een vast lichaam uit slechts twee, of uit drie punten bestaat is het niet ondubbelzinnig zeker, waar het zal komen te staan, indien wij aan een dier punten een voorgeschreven verplaatsing geven, en verlangen, dat het andere of de twee andere even ver verschoven worden. Zoodra men echter, in een Euclidische uitgebreidheid van $n$ afmetingen, voor een $n$-dimensionaal vast lichaam van $(2n—2)$ punten eischt dat alle punten een zelfden afstand zullen doorloopen, zijn andere dan zuivere translatiebewegingen uitgesloten.

Wij kunnen trachten hiervan uit te gaan om het analogon der evenwijdigheid voor gekromde ruimten te vinden. Het is echter bekend,

---

[1]) Vgl. het door Prof. SCHOUTEN voor de Verhandelingen der Kon. Akademie aangeboden werk: „*Die directe Analysis zur neueren Relativitätstheorie*"

dat een lichaam van eindige afmetingen in het algemeen zich in zoo'n ruimte niet kan bewegen zonder dat de onderlinge afstanden zijner punten veranderen. Om toch met een „vast lichaam" te werken zullen wij ons moeten beperken tot infinitesimale lichaampjes met afmetingen van de orde eener verdwijnend kleine $\varepsilon$.

Een tweede, ernstiger moeilijkheid ligt hierin, dat er geen verplaatsing te verwezenlijken zal zijn waarbij alle punten van een vast lichaampje precies even ver opschuiven. Bij een verplaatsing over een afstand $\Delta$ kunnen de verplaatsingen der verschillende punten wel bij eerste benadering gelijk worden, maar men moet een speling van de orde $\Delta\varepsilon^2$ blijven toelaten. Hierbij rijst de vraag, of, in een zekere richting, er maar één ondubbelzinnig bepaalde verplaatsing is bij welke deze benadering bereikt wordt. Dit is echter meer dan men verwachten mag. Immers, reeds in het bijzonder geval eener Euclidische ruimte, zijn bij de vrijgelaten speling nevens de zuivere translatie ook schroefbewegingen, met een wenteling van het lichaampje om de as van translatie, mogelijk. Wij moeten dus omzien naar een tweede eigenschap der ons bekende evenwijdige verplaatsing, die ons dergelijke schroefbewegingen kan helpen uitsluiten.

Deze eigenschap vinden wij in de eigenaardigheid der translatie, dat de doorloopen wegen niet slechts even lang, maar ook evenwijdig zijn. Dit komt neer op een zekere reciprociteit tusschen translaties in verschillende richtingen. Men kan op twee translaties letten, waarbij een punt $P$ onderscheidenlijk naar een naburig punt $Q$ of naar een ander punt $R$ wordt verschoven. Bij de eerste translatie zal het punt $R$ in dezelfde plaats terechtkomen, als het punt $Q$ bij de tweede translatie. Deze eigenschap sluit inderdaad schroefbewegingen uit.

Wij zullen nu in het volgende eerst een samenvatting geven van hetgeen dit opstel bereikt, om daarna (§ 6 e.v.) de toelichtende formules te ontwikkelen. Al zullen de voorbeelden veelal gekozen worden in een driedimensionale ruimte, de uitkomsten gelden onafhankelijk van het aantal ($n$) der afmetingen van de ruimte waarin wij verkiezen te werken.

2. *Geodetische verplaatsing.* Een infinitesimaal vast lichaampje worde gedefinieerd als een samenstel van stoffelijke punten, welker onderlinge afstanden bij hun bewegingen onveranderd blijven. Een dezer punten kunnen wij tot „middelpunt" kiezen, en daarbij ons de andere punten voorstellen als de uiteinden van voerstralen uit het middelpunt, welke een onveranderlijke lengte (van de orde $\varepsilon$)

behouden en met elkander onveranderlijke hoeken blijven insluiten. Het aantal punten zij minstens $(2n-2)$, dus het aantal voerstralen $(2n-3)$, waarvan er geen $n$ in één ruimte van $(n-1)$ dimensies liggen.

Verbeelden wij ons, dat het lichaampje bewegingen uitvoert waarbij het middelpunt zich van een zeker uitgangspunt $P$ naar naburige punten verplaatst, telkens over een afstand van de orde $\Delta$.

Het blijkt mogelijk (§ 7) een zekere verscheidenheid van bewegingen aan te geven, waarbij, ten eerste, *alle andere punten van het vaste lichaampje*, behoudens een speling van de orde $\Delta\varepsilon^2$, *zich over een even grooten afstand verschuiven als het middelpunt*, en tusschen welke, ten tweede, een zekere *wederkeerigheid* bestaat die voor den dag komt wanneer men *twee willekeurige tot de verscheidenheid behoorende bewegingen* in het oog vat, die het middelpunt resp. van $P$ naar $Q$ en van $P$ naar $R$ brengen, en daarbij let op de verplaatsing der deeltjes van het lichaampje, die in $Q$ en $R$ hun uitgangspunten hebben. Het *deeltje uit $R$ zal bij de eene beweging $(PQ)$ in hetzelfde punt aankomen waarin bij de andere beweging $(PR)$ het deeltje uit $Q$ belandt.*

De genoemde twee voorwaarden bepalen ondubbelzinnig (§ 9) de bedoelde verscheidenheid van bewegingen, welke wij „geodetische verplaatsingen" van het lichaampje kunnen noemen. Zij treden in de plaats van de verplaatsingen evenwijdig aan zichzelf [1]) in Euclidische uitgebreidheden. Laten wij ons bij de verdere besprekingen van den term „kompaslichaampje" mogen bedienen om een klein vast lichaampje aan te duiden, dat zich slechts geodetisch kan verplaatsen. Wij stippen hierbij aan, om er aanstonds dieper op in te gaan, dat een kompaslichaampje, hetwelk, na een verplaatsing, langs denzelfden weg naar zijn uitgangspunt terugkeert, ook weer in zijn uitgangsstand zal aankomen. Keert het echter langs een omweg terug, dan zal het bij aankomst in het algemeen zich niet weer in zijn uitgangsstand bevinden.

3. *Geodetische differentiaal.* Willen wij nu vectoren in naburige punten $P$ en $Q$ met elkander vergelijken, dan kunnen wij als volgt te werk gaan. Wij zetten een kompaslichaampje met het middelpunt in $P$, en teekenen daarin, door een zijner punten te markeeren,

---

[1]) Van een ander uitgangspunt komt T. LEVI-CIVITA tot een definitie van evenwijdigheid, die op hetzelfde neerkomt: „*Nozione di parallelismo in una varieta qualunque, e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*. Rend. Circ. Mat. Palermo, XLII, p. 1, 1917. De interpretatie der kromtemaat waartoe hij geraakt, verschilt echter ten eenenmale van die welke in § 5 gegeven zal worden.

den vector. Wij verplaatsen het kompaslichaampje naar $Q$, en hebben nu alle reden om te zeggen, dat thans het gemarkeerde punt aangeeft den van $P$ naar $Q$ geodetisch verplaatsten vector. Door vergelijking van dezen verplaatsten vector met den in $Q$ staanden, kunnen wij dadelijk zien, wat de *geodetische differentiaal* is van den vector. Heeft men dezen, dan is onmiddellijk duidelijk, wat de covariante differentiatie van CHRISTOFFEL eigenlijk beteekent.

Op dezelfde wijze kunnen wij de vectoren-eenheden geodetisch van $P$ naar $Q$ verplaatsen. Zij zullen dan afwijken van de vectoren-eenheden in $Q$. Een stel geodetisch verplaatste vectoren-eenheden is wat Prof. SCHOUTEN definieerde als het zich geodetisch medebewegende assenstelsel.

4. *Geodetische lijn.* Ook kunnen wij gemakkelijk zien, wat het in heeft, een gegeven *lijnelement geodetisch te verlengen.* Wij zetten het middelpunt van het kompaslichaampje in het beginpunt, en markeeren het lijnelement als een pijl in het kompaslichaampje. Nadat het middelpunt langs het lijnelement verplaatst is, zal de pijl weer een bepaalde richting uitwijzen. Deze is het geodetisch verlengde van het lijnelement. Indien wij voortgaan het kompaslichaampje steeds in de richting van den pijl te verplaatsen, zal het middelpunt allengs een geodetische lijn beschrijven.

In dit geval, bij een verplaatsing langs een geodetische lijn, blijven geodetisch verplaatste vectoren steeds gelijke hoeken insluiten met de geodetische lijn. Deze hoeken zijn immers niets anders dan vaste hoeken in het kompaslichaampje.

5. *Kromtemaat van Riemann.* Verbeelden wij ons nu, dat wij met het kompaslichaampje een kleinen kringloop beschrijven, b.v. om een verdwijnend klein (quasi-)parallelogram. Wij merkten reeds op, dat het daarna, in het algemeen, *niet* in zijn uitgangsstand zal zijn teruggekeerd. Het verschil tusschen de standen voor en na den kringloop is er een zooals zou kunnen worden teweeggebracht door eene oneindig kleine wenteling [1]). Het bedrag dier wenteling is even-

---

[1]) H. WEYL heeft onlangs eene verhandeling geleverd (*Gravitation und Elektrizität*, Berl. Sitz. Mei 1918) welker grondgedachte neerkomt op de voorstelling, dat een vast lichaampje (= „Vektorraum") na een kringloopje van (een nog ietwat algemeener soort) „translaties" niet alleen een andere oriënteering, maar ook *andere afmetingen* heeft dan in den uitgangsstand. Daarbij zou in de 4-dimensionale werkelijkheid de lineaire dilatatie het halve scalaire produkt zijn van den alterneerenden electromagnetischen tensor en het omgetrokken oppervlakje. (Noot bij de correctie).

redig met het oppervlak van het omgetrokken parallelogram, terwijl de richting der „as" van wenteling (die in hoogere ruimten meerdimensionaal is) bepaald wordt door den stand van het vlak van het gekozen parallelogram. De wenteling houdt ten nauwste verband met de kromming der ruimte. Is deze krommingswenteling in alle punten voor alle willekeurige kringloopjes nul, dan is de ruimte Euclidisch.

De kentallen van den operator, die ons, uit de gegevens van het omgetrokken oppervlakje, de krommingswenteling van het kompaslichaampje leert kennen, zijn niet anders dan de vier-indices-symbolen van RIEMANN, van de 2e soort.

Indien wij voorts de as van wenteling — om in het drie-dimensionale te blijven — een lengte geven gelijk aan het bedrag der wenteling (in hoekmaat), en uit deze as en het omgetrokken parallelogram een parallelopipedum maken, dan is de inhoud van dit parallelopipedum gedeeld door het kwadraat van het oppervlak van het parallelogram, in de grens, wat RIEMANN aangeeft als de *maat voor de gekromdheid der ruimte volgens het vlak van den kringloop.* Hetzelfde geldt, mutatis mutandis, voor de hoogere uitgebreidheden.

6. Thans zullen wij overgaan tot de ontwikkeling der noodige formules. Wij moeten de definitie van het lijnelement vooropstellen,

$$ds^2 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, dx^a\, dx^b \,,$$

waarin $dx^a$ en $dx^b$ voorstellen de aangroeiïng der coördinaten langs het lijnelement **ds**, de $g_{ab}\,(=g_{ba})$ functiën der coördinaten van het beginpunt zijn, en waarin de indices loopen van 1 tot $n$, $n$ het aantal afmetingen der ruimte zijnde. Voor de algebraïsche complementen der $g_{ab}$ schrijven we $g^{ab}$, en merken op dat

$$\Sigma(b) g_{ab}\, g^{nb} = \begin{cases} 1 \text{ voor } n = a, \\ 0 \text{ voor } n \neq a \end{cases}$$

Voor den determinant die uit de $g_{ab}$ gevormd kan worden, schrijven wij ter afkorting $g$.

Voorts zullen wij ons hebben te bedienen van de haken- en accoladen-symbolen van CHRISTOFFEL:

$$\begin{bmatrix} l\,m \\ a \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{la}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^a}\right], \qquad \begin{Bmatrix} l\,m \\ b \end{Bmatrix} = \Sigma(a)\, g^{ab} \begin{bmatrix} l\,m \\ a \end{bmatrix}.$$

De definitie van het lijnelement brengt mede de definitie der lengte van een vector **v**, met de kentallen $v^a$:

$$v^2 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, v^a\, v^b,$$

24

en de definitie voor den hoek tusschen twee vectoren **v** en **w**:

$$vw \cos(vw) = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, v^a\, w^b.$$

7. Laat ons nu de punten van een vast lichaampje gegeven denken door hun relatieve coördinaten ten opzichte van een middelpunt: $u^a$, $v^a$, $w^a$ ... ($a = 1, 2, 3, 4$), die de kentallen zijn van vectoren **u, v, w** ... die van de orde van grootte eener oneindig kleine $\varepsilon$ zijn. Indien nu het middelpunt van $P$ verplaatst wordt naar een naburig punt $Q$, dat bepaald wordt door de oneindig kleine coördinatenverschillen $dx^a$ (van de orde $\Delta$) ten opzichte van $P$, zullen wij moeten vragen naar de nieuwe relatieve coördinaten die de punten van het lichaampje ten opzichte van $Q$ zullen moeten hebben, om aan den eersten, in § 2 gestelden eisch te voldoen: het lichaampje moet een „vast" zijn, en elk zijner punten moet voorts over een even grooten afstand verschoven zijn.

Stel voor de nieuwe relatieve coördinaten $u^a + du^a$, $v^a + dv^a$, enz., dan valt het niet moeilijk de laatste voorwaarde in formule te brengen. Immers, de coördinatenverschillen tusschen de begin- en eindstanden van het door **u** aangewezen punt zijn $dx^a + du^a$, Het beginpunt van het doorloopen lijnelement ligt daarbij een door **u** bepaald eind naast $P$. Moet nu het lijnelement even lang zijn als het door het middelpunt van $P$ naar $Q$ doorloopene,

$$ds^2 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, dx^a\, dx^b,$$

dan zullen dus nul moeten zijn uitdrukkingen als

$$0 = \Sigma\,(ab\,m)\,\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^m}\, u^m\, dx^a\, dx^b + \Sigma(ab)\, 2 g_{ab}\, dx^a\, du^b \quad . \quad . \quad (1)$$

De vastheids-voorwaarde brengt mede, dat zoowel de lengten der relatieve vectoren **u**, **v**,... in het lichaampje, als de door hen ingesloten hoeken onveranderd moeten blijven, zoodat dus uitdrukkingen als

$$u^2 = \Sigma(ab)\, g_{am}\, u^a\, u^m \quad , \quad uv \cos(uv) = \Sigma\,(am)\, g_{am}\, u^a\, v^m,$$

in $P$ en in $Q$ dezelfde waarde moeten hebben. Men ziet dat dit vereischt

$$0 = \Sigma\,(a\,m\,l)\,\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l}\, dx^l\, u^a\, u^m + \Sigma(am)\, 2 g_{am}\, u^a\, du^m\,, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$0 = \Sigma\,(a\,m\,l)\,\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l}\, dx^l\, u^a\, v^m + \Sigma(am)\, g_{am}\, \{u^a\, dv^m + v^m\, du^a\} \quad . \quad (3)$$

Dit zijn de vergelijkingen, waaraan de $du^a$, $dv^a$ ... enz. zullen hebben te voldoen bij de bedoelde verplaatsing. Het is niet moeilijk een uitdrukking voor $du^a$ te vinden, en analoge voor $dv^a$, $dw^a$, ... die al de vergelijkingen bevredigen. Wij kunnen n.l. bij (1) optellen de identiteit

$$0 \equiv \Sigma\,(a\,l\,m) \left(\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^a}\right) dx^a\, dx^l\, u^m\,,$$

en bij (2) een dergelijke identiteit

$$0 \equiv \Sigma\,(a\,l\,m) \left(\frac{\partial g_{al}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^a}\right) u^a\, dx^l\, u^m\,.$$

Veranderen wij nu in den eersten term, tweede lid van (1), en in den tweeden term, tweede lid van (2), den index $b$ in $l$, resp. $m$ in $b$, dan krijgen wij,

$$0 = \Sigma\,(a) \left[\Sigma\,(lm) \left(\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{al}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^a}\right) dx^l\, u^m + \Sigma(b)\; 2 g_{ab}\, du^b\right] dx^a,$$

en

$$0 = \Sigma\,(a) \left[\Sigma(lm) \left(\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{al}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^a}\right) dx^l\, u^m + \Sigma\,(b)\; 2 g_{ab}\, du^b\right] u^a.$$

Indien wij deze vergelijkingen door 2 deelen, kunnen wij ze in den vorm brengen

$$0 = \Sigma\,(ab)\, g_{ab}\, dx^a \left[du^b + \Sigma(lm) \begin{Bmatrix} l\,m \\ b \end{Bmatrix} dx^l\, u^m\right], \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

$$0 = \Sigma\,(ab)\, g_{ab}\, u^a \left[du^b + \Sigma(lm) \begin{Bmatrix} l\,m \\ b \end{Bmatrix} dx^l\, u^m\right], \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

hetgeen men gemakkelijk verifieert. Op dezelfde manier schrijven wij de derde vergelijking

$$0 = \Sigma(ab)\, g_{ab} \left[u^a \left[dv^b + \Sigma \begin{Bmatrix} l\,m \\ b \end{Bmatrix} dx^l\, v^m\right] + v^a \left[du^b + \Sigma \begin{Bmatrix} l\,m \\ b \end{Bmatrix} dx^l\, u^m\right]\right] \quad (3')$$

Wij kunnen dus aan de gestelde voorwaarden voldoen, door te nemen

$$du^b = - \Sigma\,(lm) \begin{Bmatrix} l\,m \\ b \end{Bmatrix} dx^l\, u^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze vergelijking verandert haar vorm niet bij coördinaten-transformaties.

Zij stelt, met dergelijke voor $dv^b$, $dw^b$ .. enz. ons in staat, om aan te geven, waar de punten van het vaste lichaampje zich bevinden, wanneer zij, bij eerste benadering, alle denzelfden afstand hebben afgelegd.

Men ziet, in vgl. (1) dat bij de aangevangen reeksontwikkeling voor $g_{ab}$ verwaarloosd zijn de termen met producten $u^m\, u^n$. Het

kwadraat van den doorloopen afstand kan dus nog van $PQ$ afwijken met een bedrag van de orde $\varepsilon^2\ \Delta^2$, zoodat de doorloopen afstanden zelf gelijk mogen heeten tot op een bedrag van de orde $\varepsilon^2 \Delta$, dat wij verder verwaarloozen.

8. Het zal blijken, dat de gevonden beweging niet de eenige is die aan de tot dusver gestelde voorwaarden voldoet. De door form. (4) bepaalde „correcties" die ons de plaats der verschoven punten leeren, zijn van de orde van grootte $\Delta\varepsilon$. Wij vragen ons af, in hoeverre nog aan de voorwaarden voldaan kan worden door hiervan afwijkende correcties, stel $du^a + \delta u^a$, waarin $\delta u^a$ van dezelfde orde $(\Delta\varepsilon)$ is als $du^a$.

Indien deze gewijzigde correcties moeten voldoen aan de voorwaarden (1), (2) en (3), dan kan het niet anders of men moet ook hebben

$$0 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, dx^a\, \delta u^b\ ,$$
$$0 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, u^a\, \delta u^b\ ,$$
$$0 = \Sigma(ab)\, g_{ab}\, u^a\, \delta v^b + g_{ab}\, v^a\, \delta u^b\ , \text{ enz.}$$

Bestaat het vaste lichaampje, behalve uit het middelpunt, nog uit $p$ andere punten, dan staan er $2p + \frac{1}{2}p(p-1)$ vergelijkingen voor de $pn$ onbekenden $\delta u^a$, $\delta v^a$, enz.

Voor $p = 2n-3$ staan er dus evenveel homogene lineaire vergelijkingen als er onbekenden zijn. Vandaar dat bij de definitie van het kompaslichaampje een minimum aantal punten verlangd werd. Aan deze vergelijkingen kan men steeds voldoen door oplossingen van den vorm (b.v. voor $n = 3$):

$$\delta u^a = \frac{\omega}{\sqrt{g}} \Sigma\,(ij) \begin{vmatrix} g_{bi} & g_{ci} \\ g_{bj} & g_{cj} \end{vmatrix} dx^i\, u^j = \frac{\omega}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} dx_b & dx_c \\ u_b & u_c \end{vmatrix}, \text{ enz.} \qquad (5)$$

Hierin is $\omega$ een willekeurige evenredigheidsfactor, en worden met $a$, $b$ en $c$ een drietal indices bedoeld, die een even permutatie vormen van 1, 2, 3; de $dx_b$ en $u_b$ met omlaag geplaatsten index beteekenen de covariante combinaties

$$dx_b = \Sigma(m)\, g_{mb}\, dx^m \quad , \quad u_b = \Sigma(m)\, g_{mb}\, u^m\ .$$

Men overtuigt zich gemakkelijk dat deze oplossingen voldoen. De opgeschreven $\delta u^a$, en de analoge $\delta v^a$, $\delta w^a$, met dezelfde waarde van $\omega$, stellen de verplaatsingscomponenten voor bij een oneindig kleine rotatie om $\mathbf{dx}$ als as. Immers alle vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ enz. blijven bij deze verplaatsingen met elkander en met $\mathbf{dx}$ gelijke hoeken vormen en zij blijven even lang.

Nu de tot dusver gestelde voorwaarden niet voldoende blijken om een beweging ondubbelzinnig te bepalen, nemen wij de in § 2 genoemde reciprociteitsvoorwaarde in acht.

Bij de verplaatsing van het middelpunt van het kompaslichaampje van $P$ naar $Q$ geraakt het door den vector **u** gekenmerkte deeltje van het punt $R$ in een punt bepaald door de coördinaten:

$$x^a_P + dx^a + u^a + du^a + \delta u^a \,,$$

of,

$$x^a_P + dx^a + u^a - \Sigma(lm) \left\{ {lm \atop a} \right\} dx^l u^m + \frac{\omega}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} dx_b & dx_c \\ u_b & u_c \end{vmatrix} .$$

Indien wij nu het middelpunt van $P$ naar $R$ verplaatsen, en na willen gaan, waar volgens de aangegeven verplaatsingswet het deeltje uit het punt $Q$ zou belanden, dan hebben wij in den bovenstaanden regel slechts de vectoren **dx** en **u** met elkander te verwisselen.

Maar men ziet, aangezien daarbij de determinant van teeken wisselt, dat $Q$ bij verplaatsing $PR$ nooit hetzelfde punt zal bereiken als $R$ bij een verplaatsing $PQ$, indien niet $\omega = 0$.

De toepassing dezer reciprociteitsvoorwaarde [1]) sluit dus schroefbewegingen uit.

9. Dat de voorwaarde omtrent de vastheid van het lichaampje en de gelijkheid der doorloopen afstanden met de reciprociteitsvoorwaarde ook voldoende is om de bedoelde verscheidenheid der bewegingen ondubbelzinnig te bepalen, kan men als volgt inzien.

De vergelijkingen (1) en (2) leeren reeds, dat de gezochte „correcties" $du^a$ evenredig moeten zijn zoowel met de componenten der verplaatsing **dx** als met die van den vector **u**. Laat ons daarom stellen

$$du^a = \Sigma \, h^a_{st} \, dx^s u^t \text{ [2])} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

De beteekenis van „de correcties" $du^a$ is, dat zij ons leeren moeten,

---

[1]) Dr. DROSTE deed mij opmerken, dat men ook op andere wijze een schroefbeweging kan uitsluiten. Laat $PQ$ een eindig stuk zijn eener geodetische lijn. Men brenge in $P$ en $Q$ vlakjes aan, loodrecht op $PQ$. Vervolgens trekke men de geodetische lijnen, die loodrecht staan op het eerste dwarsvlakje en dit snijden in de punten van een klein lijnelement $PR$. Deze vormen met elkander een „geodetische strook", die het tweede dwarsvlakje snijden moet in een lijnelementje $QR'$. Men kan dan $PR$ en $QR'$ evenwijdig noemen, en evenzoo alle andere elementjes, die, in dezelfde „geodetische strook" gelegen, gelijke hoeken maken met de geodetische lijn $PQ$.

In den gedachtengang van mijn opstel worden echter geodetische lijnen eerst gedefinieerd met behulp der geodetische verplaatsing (zie de volgende §), zoodat daarvan hier geen gebruik mocht gemaakt worden.

[2]) $a_3 s$ en $t$ hebben hier niet de beteekenis van aanwijzers, die een co- of contra-variantie aanduiden.

waar wij, uitgaande van het punt ($x^a{}_P + dx^a + u^a$) het punt $S$ kunnen vinden, waarheen het punt $R$ (uiteinde van **u**) bij de verplaatsing $PQ$ (langs **dx**) verhuist. Volgens de reciprociteitsvoorwaarde moet dit het zelfde zijn als het punt waarin $Q$ (uiteinde van **dx**) bij de verplaatsing $PR$ (langs **u**) belandt. Hieruit volgt, dat zijn moet

$$h^a_{st} = h^a_{ts}.$$

Substitutie van (4′) in verg. (3) leert ons

$$0 = \Sigma\,(alm)\,\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l}\,dx^l\,u^a\,v^m + \Sigma\,(a\,m\,s\,t)\,g_{am}\,\{h^m_{st}\,u^a\,dx^s\,v^t + h^a_{st}\,dx^s\,u^t\,v^m\}.$$

Door de indices anders te noemen, en te schrijven

$$h_{a,lm} = \Sigma(b)\,g_{ab}\,h^b_{lm}\,, \qquad (h_{a,lm} = h_{a,ml}),$$

krijgen wij dit in den vorm

$$0 = \Sigma\,(a\,l\,m)\,dx^l\,u^a\,v^m \left\{\frac{\partial g_{am}}{\partial x^l} + h_{a,lm} + h_{m,la}\right\}.$$

In deze homogene vergelijking kunnen wij de vormen die wij in de accoladen hebben, als onbekenden beschouwen, waarvan wij er, tengevolge van de symmetrie wat de indices $a$ en $m$ betreft, $\frac{1}{2}\,n^2\,(n-1)$ hebben. Daar zoo'n vergelijking gelden moet voor alle combinaties van 3 vectoren **dx, u, v,** moeten de onbekenden nul zijn, dus

$$0 = \frac{\partial g_{am}}{\partial x^l} + h_{a,lm} + h_{m,la}.$$

Eveneens heeft men

$$0 = \frac{\partial g_{la}}{\partial x^m} + h_{l,ma} + h_{a,ml}$$

$$0 = \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^a} + h_{m,al} + h_{l,am}.$$

Door de laatste van de som der eerste twee af te trekken, en in acht te nemen, dat b.v. $h_{l,am} = h_{l,ma}$, vindt men

$$h_{a,lm} = -\begin{bmatrix} lm \\ a \end{bmatrix}.$$

Aangezien

$$h^b_{lm} = \Sigma\,g^{ab}\,h_{a,lm} = -\Sigma\,g^{ab}\begin{bmatrix} lm \\ a \end{bmatrix} = -\begin{Bmatrix} lm \\ b \end{Bmatrix},$$

levert substitutie in (4′) de waarde die wij reeds voor $du^b$ kenden

$$du^b = -\Sigma\,(lm)\begin{Bmatrix} lm \\ b \end{Bmatrix} dx^l\,u^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als eenige oplossing, die aan alle voorwaarden voldoet.

10. Ter toelichting van de toepassingen der §§ 3 en 4 hebben wij het volgende op te merken. Laat een in $P$ aanwezige vector $\mathbf{V}$ in het kompaslichaampje geteekend zijn. Bij de geodetische verplaatsing naar $Q$ zal de geteekende vector de kentallen gekregen hebben

$$V^a - \Sigma(lm) \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx^l \, V^m ,$$

zooals uit verg. (4) volgt. Is nu in $Q$ een vector aanwezig met de kentallen $V^a + dV^a$, dan is blijkbaar de *geodetische differentiaal*

$$dV^a + \Sigma(lm) \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx_l \, V^m .$$

Wordt het lijnelementje $PQ$ zelf in het kompaslichaampje geteekend en als een vector met kentallen $dx^a$ mede verschoven, dan zal in $Q$ het elementje de kentallen hebben

$$dx^a - \Sigma(lm) \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx^l \, dx^m .$$

Dit elementje hebben wij de *geodetische verlenging* van $PQ$ genoemd. Men ziet gemakkelijk hoe hieruit voor de geodetische lijn de vergelijking volgt

$$0 = d^2 x^a + \Sigma(lm) \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx^l \, dx^m .$$

Deze (covariante) vergelijking voor de geodetische lijn stemt volkomen overeen met die welke volgt uit de gewone definitie der geodetische lijn als de kortste tusschen twee gegeven punten.

11. Wij willen nu een punt $P'$, ten opzichte van $P$ bepaald door $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, in twee stappen geodetisch mede verplaatsen naar een punt $S'$ bij $T$, maar den eener keer langs $PQ$ en $QT$, den anderen keer langs $PK$ en $KT$, waarbij $PQ\,TK$ een (quasi-) parallelogram is met de zijden $\mathbf{dx}$ ($PQ$ en $KT$) en $\delta\mathbf{x}$ ($PK$ en $QT$). Ten opzichte van $Q$ zijn de coördinaten van het verplaatste $P'$:

$$u^a - \Sigma(lm) \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx^l \, u^m .$$

Bedenken wij, dat bij den tweeden stap de waarden van de $\left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\}$ moeten genomen worden, zooals die zijn in $Q$, dan vinden wij voor de coördinaten ten opzichte van $T$, na den weg $PQT$,

$$u^a - \Sigma \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx^l u^m - \Sigma \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} \delta x^l \left[ u^m - \left\{ \begin{matrix} pq \\ m \end{matrix} \right\} dx^p u^q \right] - \Sigma \frac{\partial}{\partial x^p} \left\{ \begin{matrix} lm \\ a \end{matrix} \right\} dx^p \delta x^l u^m .$$

Indien de weg echter genomen wordt langs $PKT$, worden de coördinaten ten opzichte van $T$:

$$u^a - \Sigma \left\{ {lm \atop a} \right\} \delta x^l u^m - \Sigma \left\{ {lm \atop a} \right\} dx^l \left[ u^m - \left\{ {pq \atop m} \right\} \delta x^p u^q \right] - \Sigma \frac{\partial}{\partial x^p} \left\{ {lm \atop a} \right\} \delta x^p \, dx^l u^m .$$

Nemen wij het verschil tusschen deze beide, dan vinden wij, rangschikkende,

$$\zeta^a = \Sigma(lmp) \left[ \frac{\partial}{\partial x^p} \left\{ {lm \atop a} \right\} - \left\{ {l\,n \atop a} \right\} \left\{ {pm \atop n} \right\} \right] (dx^l \delta x^p - dx^p \delta x^l)\, u^m .$$

of

$$\zeta^a = \tfrac{1}{2}\, \Sigma(lmp) \left[ \frac{\partial}{\partial x^p} \left\{ {lm \atop a} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ {pm \atop a} \right\} + \left\{ {pn \atop a} \right\} \left\{ {lm \atop n} \right\} - \left\{ {ln \atop a} \right\} \left\{ {pm \atop n} \right\} \right] \times$$
$$\times\, (dx^l \delta x^p - dx^p \delta x^l)\, u^m .$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, (lmp)\, \{ma,\, lp\}\, (dx^l \delta x^p - dx^p \delta x^l) u^m \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Dezelfde verplaatsing $\zeta^a$ zouden wij tusschen begin- en eindstand vinden bij een rondgang langs $TKPQT$.

Deze formule geeft ons een zekere wenteling van het kompaslichaampje. Immers, de lengten en hoeken zijn bij de geodetische verplaatsingen niet veranderd. Wij zien hoe de Riemanniaansche vier-indices-symbolen $\{ma,\, lp\}$ leeren, waar de door $u^m$ bepaalde punten na den kringloop om het door $\mathbf{dx}$ en $\delta\mathbf{x}$ gegeven parallelogram, als door een wenteling komen te liggen

12. Ons rest thans nog met eenige formules toe te lichten hetgeen in § 5 over de interpretatie der Riemanniaansche kromtemaat werd opgemerkt. De kromtemaat volgens het vlak van $\mathbf{dx}$ en $\delta\mathbf{x}$ wordt gedefinieerd door [1])

$$K = \frac{\Sigma(a\, lp\, mq)\, g_{aq}\, \{ma,\, lp\}\, (dx^l \delta x^p - dx^p \delta x^l)(dx^m \delta x^q - px^q \delta x^m)}{\Sigma(lp\; mq)(g_{lm} g_{pq} - g_{lq}\, g_{pm})(dx^l \delta x^p - dx^p \delta x^l)(dx^m \delta x^q - dx^q \delta x^m)} .$$

De noemer geeft vier maal het kwadraat van het op $\mathbf{dx}$ en $\delta\mathbf{x}$ beschreven parallelogram, in „natuurlijke” maat gemeten. Immers men ziet dat er vier keeren ontstaat

$$\Sigma\, (lp\; mq) \begin{vmatrix} g_{lm} & g_{lq} \\ g_{pm} & g_{pq} \end{vmatrix} dx^l dx^m \delta x^p \delta x^q,$$

wanneer men de indices telkens passend noemt, zonder aan de som iets te veranderen. Noemen wij de lengte van $\mathbf{dx}$ eens $d$, en $\delta$ die van $\delta\mathbf{x}$, dan vinden wij dus voor den noemer

$$4 \begin{vmatrix} d^2 & d\delta \cos{(d\delta)} \\ d\delta \cos{(d\delta)} & \delta^2 \end{vmatrix},$$

hetgeen viermaal het kwadraat is van het parallelogram.

Wij zullen den teller behandelen voor het geval eener driedimen-

[1]) Vgl. b.v. Bianchi's lessen over differentiaalmeetkunde, § 319.

sionale uitgebreidheid, en laten zien dat hij vier malen de inhoud is van het parallelopipedum uit de as van wenteling en het parallelogram. In meerdimensionale gevallen vindt men met eenig overleg het overeenkomstige op eenzelfde manier. Wij willen eerst voor den teller schrijven

$$2\,\Sigma\,(\bar{a}\,m\,q)\,g_{aq}\,R^a_m\,(dx^m\,\delta x^q - dx^q\,\delta x^m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarin wij $R^a{}_m$ stellen in de plaats van de coëfficienten der krommingswenteling (6):

$$\zeta^a = \Sigma(m)\,R^a_m\,u^m = \Sigma(i)\,R^a_j\,u^j.$$

Hoe hangen de getallen $R^a{}_m$ samen met de kentallen der as l van wenteling? Stel deze laatste gelijk aan $l^i$, dan wordt, zooals wij aanstonds zullen zien, de wenteling voorgesteld door

$$\zeta^a = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\Sigma(ij)\begin{vmatrix} g_{bi} & g_{ci} \\ g_{bj} & g_{cj} \end{vmatrix} l^i\,u^j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarin, evenals vroeger in (5), met $b$ en $c$ die indices bedoeld zijn welke met $a$ een even permutatie vormen van 1 2 3. Met $pqr$ zullen wij een dergelijke trits bedoelen:

$$abc\,(=)\,pqr\,(=)\,123.$$

Dat een dergelijke verplaatsing een wenteling is, zagen wij reeds eerder. Om na te gaan, of werkelijk het bedrag der oneindig kleine rotatie, in hoekmaat, gelijk is aan de lengte van l, moeten wij controleeren of voor het uiteinde van een vector **u** die loodrecht staat op l, voor welken dus

$$\Sigma\,(ab)\,g_{ab}\,u^a\,l^b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

de verplaatsing $|\zeta|$ gelijk is aan $|\mathbf{l}|$ malen $|\mathbf{u}|$. Laat ons $\zeta^2$ uitrekenen:

$$\zeta^2 = \Sigma\,(ap)\,g_{ap}\,\zeta^a\,\zeta^p,$$

$$= \frac{1}{g}\,(ij\,v\,w\,p)\begin{vmatrix} g_{ap} & g_{bp} & g_{cp} \\ g_{ai} & g_{bi} & g_{ci} \\ g_{aj} & g_{bj} & g_{cj} \end{vmatrix} l^i\,u^j\,.\begin{vmatrix} g_{qv} & g_{rv} \\ g_{qw} & g_{rw} \end{vmatrix} l^v u^w.$$

Door het uitschrijven van den eersten determinant is de sommatie naar $a$ uitgevoerd. Willen wij nu naar $p$ sommeeren, dan zien wij, dat slechts die waarde van $p$ den determinant niet nul maakt, die als derde behoort bij $i$ en $j$. Deze waarde van $p$ maakt den determinant $+g$ of $-g$. Gebeurt het eerste, dan is $i = q, j = r$; bij het andere hebben wij $i = r, j = q$.

In beide gevallen mogen wij schrijven

$$\zeta^2 = \Sigma\,(qr\,vw)\begin{vmatrix} g_{qv} & g_{rv} \\ g_{qw} & g_{rw} \end{vmatrix} l^q\,l^r\,u^r\,u^w,$$

of, dank zij (9):

$$\zeta^2 = u^2\,l^2,$$

Onze formule (8) gaf dus de door **l** als as bepaalde wenteling correct weer.

Maar dan moet ook

$$R^a_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma(j) \begin{vmatrix} g_{bi} & g_{ci} \\ g_{bj} & g_{cj} \end{vmatrix} l^i ,$$

en wij kunnen controleeren of (7) ons viermaal den inhoud van het genoemde parallelopipedum levert. Wij schrijven (7) nog eens met een kleine wijziging der indices over, en vinden:

$$2\,\Sigma(a\,h\,j)\, g_{ah}\, R^a_j \;(dx^j\, \delta x^h - dx^h \delta x^j) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{g}}\; \Sigma(h\,i\,j) \begin{vmatrix} g_{ah} & g_{bh} & g_{ch} \\ g_{ai} & g_{bi} & g_{ci} \\ g_{aj} & g_{bj} & g_{cj} \end{vmatrix} (dx^j\, \delta x^h - dx^h \delta x^j)\; l^i .$$

Wij merken nu op, dat wanneer wij $h$ en $j$ alle waarden laten aannemen, een stel $h\,j$ juist evenveel levert als $j\,h$, en dat de determinant $g$ wordt of $-g$, al naar $h, i, j$ een even of oneven permutatie is van 123 en anders verdwijnt. Neemt men dit alles in aanmerking, dan vindt men voor de som juist

$$4\sqrt{g} \begin{vmatrix} dx^h & dx^j & dx^j \\ \delta x^h & \delta x^i & \delta x^j \\ l^h & l^i & l^j \end{vmatrix} ,$$

hetgeen 4 maal den inhoud voorstelt van het parallelopipedum uit **l**, **dx** en **δx**.

Hiermee is § 5 voldoende toegelicht. Slechts moge vermeld worden, dat door de keuze van het positieve teeken bij den factor $\frac{1}{\sqrt{g}}$ in (8) uitgedrukt wordt, dat wij de richting van $\zeta$ laten „passen" bij een draaiïng van **l** naar **u**, in overeenstemming daarmee, dat de richting van **l** passen moet bij een draaiïng van **u** naar $\zeta$. De inhoud van het parallelopipedum wordt positief, als de richting van **l** ook past bij een draaiïng van **dx** naar **δx**, d.i. past bij de omloopsrichting rond het parallelogram.

Aan het eind van dit opstel moge ik een woord van oprechte erkentelijkheid uitspreken jegens Prof. J. A. Schouten voor de vriendelijkheid waarmede hij mij inzage verleende van zijn verhandeling over de directe analyse, die weldra in de Verhandelingen der Academie gedrukt zal worden.

---

**Wiskunde.** — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer H. B. A. BOCKWINKEL: *„Opmerkingen over de ontwikkeling van een funksie in een fakulteitreeks."* II.

(Mede aangeboden door den Heer KLUYVER).

5. We willen nu nog een voorbeeld van de stelling van NIELSEN beschouwen dat niet behoort tot de onder opmerking 4° van de vorige paragraaf genoemde gevallen. We kiezen daartoe

$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{i\theta} - t}$$

waarin $\theta$ een getal is tussen 0 en $2\pi$, maar niet gelijk aan een van deze beide getallen. Voor deze funksie is

$$\lambda = -\infty \quad , \quad \lambda' = 0,$$

het eerste, omdat $t = 1$ een *gewoon* punt er van is. Men vindt gemakkelik

$$\frac{\varphi^{(n)}(t)(1-t)^{\delta+n-1}}{\Gamma(\delta+n)} = \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(\delta+n)} \left(\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right)^n \times \frac{(1-t)^{\delta-1}}{e^{i\theta}-t} \quad . \quad . \quad (21)$$

De modulus van de vorm $\dfrac{1-t}{e^{i\theta}-t}$ wordt bepaald door de gelijkheid

$$\left|\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right| = 1 - \frac{2t(1-\cos\theta)}{1-t+\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

en uit de meetkundige voorstelling in het komplekse vlak is gemakkelik te zien dat hij *monotoon* toeneemt van 0 tot 1, als $t$ afneemt van 1 tot 0.

We splitsen nu het interval (0,1) in twee stukken $(0, v)$ en $(v, 1)$, en kiezen daarbij $v$ afhankelik van $n$, en wel

$$v = n^{\delta_1 - 1} \qquad (0 < \delta_1 < 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

zodat $v$ tegelijk met $1/n$ onbepaald afneemt tot 0. Over $\delta_1$ beschikken we nog nader. De grootste waarde van de modulus (22) wijkt dan in het tweede interval nog met een bedrag groter dan

$$kn^{\delta_1 - 1}$$

af van 1, als $k$ een zeker van $n$ en $t$ onafhankelik getal is. Hieruit volgt dat in het interval $(v, 1)$

$$\left|\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right|^n < e^{-kn^{\delta_1}}$$

zodat het linkerlid van (21) in dat interval *uniform* tot nul nadert, voor $n = \infty$ (de faktor $n\,\Gamma(n) : \Gamma(\delta + n)$ is slechts equivalent met $n^{1-\delta}$ en verstoort dus deze uitspraak niet). De integraal

$$\int_{\nu}^{1} \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(\delta+n)} \left(\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right)^{n} \frac{(1-t)^{\delta-1}}{e^{i\theta}-t}\, dt$$

heeft dus, bij willekeurig klein vastgestelde $\delta > 0$, nul tot limiet voor $n = \infty$.

Wat het interval $(0, \nu)$ betreft, hierin is voor *alle* te pas komende waarden van $n$ en $t$

$$\left| \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(\delta+n)} \left(\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right)^{n} \frac{(1-t)^{\delta-1}}{e^{i\theta}-t} \right| < \frac{kn\,\Gamma(n)}{\Gamma(\delta+n)}$$
$$< kn^{1-\delta},$$

waarin $k$ weer een van $n$ en $t$ onafhankelik pozitief getal is.[1]) Dus is, lettende op (23),

$$\left| \int_{0}^{\nu} \frac{n\,\Gamma(n)}{\Gamma(\delta+n)} \left(\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right)^{n} \frac{(1-t)^{\delta-1}}{e^{i\theta}-t}\, dt \right| < kn^{1-\delta} \times \nu$$
$$< kn^{-(\delta-\delta_1)}$$

We hoeven dus $\delta_1$ maar kleiner dan $\delta$ gekozen te hebben om in te zien dat ook de integraal over het interval $(0, \nu)$ voor $n = \infty$ nul tot limiet heeft. Zo is dus de hele restintegraal (11) nul voor $n = \infty$, indien slechts $R(x) > 0$ is, d. i., daar $\lambda' = 0$ en $\lambda = -\infty$, indien $R(x) > \lambda'$ en $R(x) > \lambda$. Voor deze waarden van $x$ kan dus de integraal

$$\int_{0}^{1} \frac{(1-t)^{x-1}}{e^{i\theta}-t}\, dt$$

in een fakulteitreeks worden ontwikkeld; de stelling van Nielsen gaat hier dus door.

We kiezen verder het voorbeeld

$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{i\theta}-t} + \frac{1}{(1-t)^{\mu}}, \quad \begin{pmatrix} 0 < \theta < 2\pi \\ 0 < \mu < 1 \end{pmatrix}.$$

Hier is $\lambda' = 0$, wegens de eerste term, en $\lambda = \mu$, wegens de tweede. Was $\varphi(t)$ enkel gelijk aan de tweede term, dan zou er slechts ontwikkelbaarheid van de integraal (1) in een fakulteitreeks

[1]) We duiden met $k$ een vast, eindig en van nul verschillend positief getal aan, zonder met die letter telkens *hetzelfde* getal te bedoelen. Dat is gemakkelik en geeft geen verwarring, omdat het op de presiese waarde nooit aankomt. Wel zullen we er dikwijls, tot meerdere duidelikheid, bij zeggen waar $k$ *niet* van afhangt.

en *absolute* konvergentie van die reeks zijn voor $R(x) > \mu$. Er is dus nu ook ontwikkelbaarheid en konvergentie voor $R(x) > \mu$, d. i. voor $R(x) > \lambda$ en $\lambda'$, maar de konvergentie is wegens de eerste term slechts *voorwaardelik* voor $\lambda < R(x) < \lambda' + 1$. Dit is juist de stelling van NIELSEN.

6. Geeft men zich bij het eerste voorbeeld van de vorige paragraaf rekenschap van de „pointe" dan komt men tot het besluit dat die daarin gelegen is dat de uitdrukking

$$\left|\frac{1-t}{e^{i\theta}-t}\right|^n$$

voor een vaste waarde van $t > 0$ bij toename van $n$ afneemt als de $n^e$ macht van een getal kleiner dan 1, waardoor men bij de integratie slechts heeft rekening te houden met een interval dat, op geschikte wijze, met $1/n$ tot nul nadert. Daardoor kan de waarde van $R(x)$ waarvoor nog ontwikkeling mogelik is met 1 verlaagd worden.

Men krijgt daardoor het vermoeden dat iets dergelijks zich wel eens *als regel* zou kunnen voordoen, indien $\varphi(t)$ geen singulier punt heeft voor $t = 1$. Dat vermoeden wordt door het volgende onderzoek bevestigd.

We splitsen het interval (0,1) weer in twee delen, gescheiden door het punt $t = \nu$, met de bedoeling dat dit, evenals in het biezondere geval van de vorige paragraaf, afhankelik van $n$ gekozen wordt en voor $n = \infty$ naderende tot nul. We nemen ook, evenals daar, van zekere $n$ af voor $\nu$ de waarde (23) aan. Beschouwen we nu de sirkel met middelpunt $\nu$ en gaande door twee vaste punten $C$ en $C'$ op de omtrek van de konvergentiesirkel (0,1) van $\varphi(t)$. Deze punten kiezen we *binnen* een boog $DAD'$ waarop geen singulier punt van $\varphi(t)$ ligt; $A$ is het punt waar $t = 1$ is. Dan zal ook, van zeker rangnummer $n$ af, het getal $\nu$ zo klein zijn dat binnen de zo even genoemde sirkel met middelpunt $\nu$, gaande door $C$, geen enkel singulier punt van $\varphi(t)$ ligt, en van dat rangnummer af zal in alle punten op de omtrek van die sirkel, begrepen tussen de stralen $OD$ en $OD'$, d.i. in punten van de boog $EAE'$ als $E$ en $E'$ de snijpunten zijn van $OD$ en $OD'$ met sirkel ($\nu$), de modulus van $\varphi(t)$ beneden een van $n$ en $t$ onafhankelik bedrag $K$ blijven. Wat de punten op boog $EFE'$ van sirkel ($\nu$) betreft ($F$ is het tegenpunt van $B$ op die boog, en $B$ is het punt met argument nul) hiervan kan gezegd worden dat $\varphi(t)$ daar een modulus heeft niet groter dan

$$\bar{\varphi}(1-\nu''),$$

als $\overline{\varphi}(t)$ de natuurlike majorant van $\varphi(t)$ is, en $\nu''$ gelijk aan de afstand $DE$.

We merken verder op dat de straal van sirkel $(\nu)$ groter is dan $1-\nu$, stel $1-\nu+\nu'$; blijkbaar naderen de getallen $\nu'$ en $\nu''$ met $\nu$ tot 0, maar blijven in een *eindige, van nul verschillende* verhouding tot $\nu$.

In een punt $P$ van het interval $(\nu, 1)$ is nu volgens een bekende stelling

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(t)}{n!}\right| < \frac{M}{(1-t+\nu')^n},$$

als $M$ het grootste van de getallen $K$ en $\overline{\varphi}(1-\nu'')$ is. Hiervoor kunnen we ook schrijven

$$\left|\frac{(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)}{n!}\right| < \left(\frac{1-t}{1-t+\nu'}\right)^{n-1} M\nu'^{-1},$$

of, daar voor $0 \overline{<} t \overline{<} 1$, $\frac{1-t}{1-t+\nu'} < \frac{1}{1+\nu'}$,

$$\left|\frac{(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)}{n!}\right| < \frac{M\nu'^{-1}}{(1+\nu')^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Van $\overline{\varphi}(1-\nu'')$ kan nu het volgende gezegd worden. Is in de equivalentievergelijking

$$\lim_{n=\infty} a_n \backsim n^{\lambda'}$$

de grootheid $\lambda' > -1$, dan heeft men voor iedere vaste $\delta > 0$, volgens de stelling van Cesaro

$$\lim_{\nu''=0} (\nu'')^{\lambda'+1+\delta}\,\overline{\varphi}(1-\nu'') = 0,$$

dus ook, wegens het zo even opgemerkte omtrent de verhouding van $\nu''$ en $\nu$,

$$\lim_{\nu=0} \nu^{\lambda'+1+\delta}\,\overline{\varphi}(1-\nu'') = 0$$

en verder

$$\lim_{\nu=0} \nu^{\lambda'+1+\delta} \times M = 0$$

daar natuurlik ook $K \times \nu^{\lambda'+1+\delta}$ nul tot limiet heeft.

Men kan dus voor (24), in verband met de aanname (23) en de eindige, van nul verschillende verhouding tussen $\nu$ en $\nu'$, ook schrijven

$$\left|\frac{(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)}{\Gamma(n-1)}\right| < \frac{kn^k}{(1+kn^{\delta_1-1})^n}$$
$$< kn^k e^{-n^{\delta_1}},$$

als $k$ weer een van $n$ en $t$ onafhankelik pozitief getal is.

Er is dus bij ieder voorgeschreven, willekeurig klein getal $\varepsilon$ een

geheel getal $N$, zodanig dat, *uniform* in het interval $(\nu,1)$ van $t$, de modulus in het linkerlid van de laatste ongelijkheid kleiner is dan $\varepsilon$ voor $n > N$. Daarvoor is dus ook

$$\left| \int_\nu^1 \frac{(1-t)^{x+n-1}\varphi^{(n)}(t)}{\Gamma(x+n)}\, dt \right| < k\varepsilon \int_\nu^1 (1-t)^{R(x)}\, dt$$
$$< k\varepsilon$$

indien $R(x) > -1$. Voor iedere zodanige waarde van $x$, d. i. ook voor $R(x) > \lambda'$, daar we $\lambda' \gtrless -1$ onderstellen, heeft dus het deel van de integraal, in de restterm (11), dat genomen wordt over het interval $(\nu,1)$ nul tot limiet voor $n = \infty$.

Voor de integratie over het overblijvende interval $(0,\nu)$ passen we de beschouwingswijze uit § 3 en de ongelijkheid (17) toe. Volgens deze is er bij gegeven willekeurig kleine $\delta$ en $\varepsilon$ een getal $N$ zodanig dat, *uniform* in het interval $(0,1)$ en dus in $(0,\nu)$,

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{\lambda'+\delta+n+1}}{\Gamma(\lambda'+\delta+n+1)} \right| < \varepsilon, \text{ als } n > N.$$

Voor het interval $(0,\nu)$ volgt hieruit ook dat voor $n > N$

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{x+n-1}}{\Gamma(x+n)} \right| < k\varepsilon\, n^{1-R(x)+\lambda'+\delta}$$

dus

$$\left| \int_0^\nu \frac{\varphi^{(n)}(t)\,(1-t)^{x+n-1}}{\Gamma(x+n)}\, dt \right| < k\varepsilon\, n^{-R(x)+\lambda'+\delta+\delta_1}.$$

Indien nu $R(x) > \lambda'$, dan kunnen we $\delta$ en $\delta_1$ van de aanvang af zo klein gekozen denken dat $R(x) > \lambda' + \delta + \delta_1$, en dan leert de laatste ongelijkheid dat ook de integraal over het interval $(0,\nu)$ voor $n = \infty$ nul tot limiet heeft, indien slechts $R(x) > \lambda'$. *De stelling van* Nielsen *is daarmee voor het geval dat $t = 0$ een gewoon punt van $\varphi(t)$ is, bewezen.*

Heeft een funksie $\varphi(t)$ het punt $t = 1$ als enig singulier punt op de omtrek van de konvergentiesirkel $(0,1)$ en voldoet hij bovendien aan de eigenschappen van Hadamard, d. w. z. is hij op die sirkel kontinu en „à écart fini", of heeft een zekere afgeleide van negatieve orde $-\omega$ die eigenschap, dan is steeds

$$\omega = \lambda = \lambda' + 1,$$

en het spesiale in de stelling van Nielsen vervalt.

Het is ook mogelik dat $\varphi(t)$ te splitsen is in de som van twee funksies $\varphi_1(t)$ en $\varphi_2(t)$, waarvan de eerste regulier is in $t = 1$ en de tweede dit punt als enig singulier punt heeft, maar zodanig dat

$\lambda_2'$ voor die funksie kleiner is dan $\lambda_1'$, van $\varphi_1(t)$, welke laatste grootheid dus gelijk is aan $\lambda'$. In dat geval is er blijkbaar ontwikkelbaarheid van de integraal in een voorwaardelik konvergente fakulteitreeks voor

$$\lambda'_2 + 1 < R(x) < \lambda' + 1$$

indien $\lambda' < \lambda'_2 + 1$, en voor

$$\lambda' < R(x) < \lambda' + 1$$

indien $\lambda' > \lambda'_2 + 1$. Heeft $\varphi_2(t)$ tevens de eigenschappen van HADAMARD, dan is $\lambda'_2 + 1 = \lambda_2 = \lambda$, en dan geldt dus weer de stelling van NIELSEN, die in dit geval wèl iets zegt.

7. Als nevengevolg ligt in de stelling die we in § 6 bewezen hebben, opgesloten:

*Indien van een funksie*

$$\varphi(t) = \Sigma\, a_n t^n$$

*de koeffisienten van de machtreeksontwikkeling voor* $n = \infty$ *equivalent zijn met een macht van* $n$, *n.l.* $n^{\lambda'}$ *en de reeks*

$$\Sigma \frac{a_n}{n^{\lambda'+\theta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

*is divergent voor* $0 < \theta < 1$, *dan is* $t = 1$ *een singulier punt van* $\varphi(t)$.

Is nl. $t = 1$ een gewoon punt van $\varphi(t)$ dan is, volgens de zo even bewezen stelling, de fakulteitreeks

$$\Gamma(x)\, \Sigma \frac{n!\, a_n}{\Gamma(x+n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

konvergent voor $R(x) > \lambda'$, en daaruit volgt ook de konvergentie van (25). Want men kan schrijven

$$\frac{n!\, a_n}{n^{\lambda'+\theta}} = \frac{n!\, a_n}{\Gamma(x+n+1)} \times \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1) n^{\lambda'+\theta}}$$

Kiest men $x$ zo dat $\lambda' < R(x) < \lambda' + \theta$, dan konvergeert de reeks van de 1e faktoren, zoals gezegd is, terwijl gemakkelik te zien is dat de reeks bestaande uit de *eerste differenties naar* $n$ van de tweede faktoren *absoluut* konvergeert; bekend is dat hieruit de konvergentie van de reeks (25) volgt. Hetzelfde zou gelden van de reeks

$$\Sigma \frac{a_n}{\varphi(n)}$$

als

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) \backsim n^{\lambda'+\theta}, \quad \text{en} \quad \lim_{n=\infty} \Delta\, \varphi(n) \backsim n^{\lambda'+\theta-1}.$$

Zulk een reeks kan men dus in het „enoncée" van bovenstaande stelling eveneens gebruiken. We merken ook op dat $\lambda'$ gerust kleiner dan $-1$ mag zijn: de stelling van NIELSEN blijft gelden, al zouden we in dat geval onze redeneringen bij een integraal van de vorm (8) (in de noot op p. 384) moeten aansluiten.

Door de substitutie $t = t'e^{i\gamma}$ in de machtreeks voor $\varphi(t)$ krijgt men de algemenere stelling: *Zijn de koeffisienten* $a_n$ *van een machtreeks in* $t$ *voor* $n = \infty$ *equivalent met* $n^{\lambda'}$, *dan heeft de funksie* $\varphi(t)$, *door die reeks voorgesteld, op de omtrek van de konvergentiesirkel overal dààr singuliere punten, waar de reeks*

$$\Sigma \frac{a_n t^n}{n^{\lambda'+\theta}} \quad (0 < \theta < 1)$$

*divergeert.* Men kan hier zelfs aan toevoegen dat dit reeds geldt, als niet juist *alle* koeffisienten $a_n$ voor $n = \infty$ equivalent zijn met $n^{\lambda'}$, maar als dit van hun bovenste grens geldt; we bedoelen, als men heeft

$$\overline{lim}_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda' \pm \delta}} = \frac{0}{\infty}.$$

Eindelik merken we op dat het omgekeerde van de stelling niet waar is: Als de reeks (25) konvergeert, kan $t = 1$ heel goed een singulier punt zijn: daartoe hoeven we maar te denken aan het geval dat $a_n$ slechts van nul verschilt voor waarden van $n$ die met een bedrag van voldoende grootte uiteenliggen, in welk geval de reeks (25) absoluut konvergeert, maar $\varphi(t)$ de sirkel (0,1) als singuliere lijn heeft.

8. Zoals we reeds opgemerkt hebben, wij twijfelen er aan, of de stelling van NIELSEN wel algemene geldigheid heeft, ofschoon wij het tegendeel niet kunnen bewijzen. Er zullen, als $\lambda < \lambda' + 1$, naar wij vermoeden gevallen zijn waarin de integraal (1) niet voor alle waarden van $R(x) > \lambda$ in een fakulteitreeks kan worden ontwikkeld. Wel menen wij met zekerheid te kunnen aantonen dat ontwikkelbaarheid uitgesloten is voor $R(x) < \lambda$, iets wat nog niet onmiddellik duidelik is, indien $\lambda$ tussen $\lambda'$ en $\lambda' + 1$ inligt [1]).

Stel dat de reeks (25) konvergeert voor $\theta > \theta_1$ en divergeert voor $\theta < \theta_1$ en dat dus (26) konvergeert voor $R(x) > \lambda' + \theta$, en divergeert voor $R(x) < \lambda' + \theta_1$, dan zal de integraal (1) in ieder geval voor geen enkele waarde van $R(x) < \lambda' + \theta_1$ in een fakulteitreeks

[1]) Is $R(x) < \lambda'$, dan is de mogelikheid in eens duidelik, omdat dan de reekstermen niet nul tot limiet hebben.

kunnen worden ontwikkeld. We zullen nu bewijzen dat we voor nog zo kleine positieve $\delta$ hebben

$$\lim_{t=1} (1-t)^{\lambda'+\theta_1+\delta} \varphi(t) = 0 \text{ [1]}$$

en dus dat $\lambda \overline{\gtrless} \lambda' + \theta_1$; daarmee is dan het gevraagde aangetoond.

We stellen kortheidshalve

$$\lambda' + \theta_1 + \delta = \alpha$$

beschouwen de afgeleide van negatieve orde $-\alpha$ van $\varphi(t)$ [2], en schrijven

$$D^{-\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \varphi(u)du = t^\alpha \psi(t),$$

dan is $\psi(t)$ een in $t = 0$ reguliere funksie met dezelfde konvergentiesirkel (0, 1) als $\varphi(t)$, zoals volgt uit de formule

$$\psi(t) = \sum_0^\infty {}_n \frac{n! a_n t^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Uit deze formule volgt echter ook dat $\psi(t)$ voor $t = 1$ eindig blijft, krachtens de aangenomen onderstelling.

Omgekeerd hebben we

$$\varphi(t) = D^\alpha[t^\alpha \psi(t)].$$

Zij nu vooreerst

$$\lambda' + \theta_1 < 1.$$

Dan kunnen we $\delta$ zo klein kiezen dat ook $\alpha < 1$ en schrijven

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= D^{\alpha-1} D[t^\alpha\psi(t)] \text{ [3]} = D^{\alpha-1}[\alpha t^{\alpha-1}\psi(t) + t^\alpha\psi'(t)] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} [\alpha\psi(u)u^{\alpha-1} + \psi'(u)u^\alpha]\, du \end{aligned}\right\} . \quad (28)$$

Nu is $\psi(u)$ in het interval $0 \overline{\gtrless} u \overline{\gtrless} 1$ eindig en dus kleiner dan zeker getal $g$. Hieruit volgt

$$\left| \int_0^t \psi(u) u^{\alpha-1} (t-u)^{-\alpha} du \right| < g \int_0^t u^{\alpha-1} (t-u)^{-\alpha}\, du$$

of, $u = t\,v$ stellende,

$$\left| \int_0^1 \psi(u) u^{\alpha-1} (t-u)^{-\alpha} du \right| < g \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{-\alpha}\, dv,$$

---

[1]) Of voor negatieve $\lambda' + \theta_1$, $\lim (1-t)^{\lambda'+\theta_1+n+\delta} \varphi^{(n)}(t) = 0$, als $\lambda' + \theta_1 + n \overline{\gtrless} 0$.

[2]) Zie o.a. Borel, Leçons sur les séries à termes positifs, p. 75.

[3]) Eigenlik is het $D \,.\, D^{\alpha-1}$, maar dit is gelijk aan $D^{\alpha-1} \,.\, D$, omdat het operatie-object $= 0$ is voor $t = 0$.

zodat de integraal in het linkerlid van deze ongelijkheid voor alle waarden van $t$ in het gesloten interval $(0,1)$ eindig blijft. Verder splitsen we de tweede integraal in (28) als volgt, aannemende dat $t > \frac{1}{2}$,

$$\int_0^t \psi'(u)u^\alpha(t-u)^{-\alpha}\,du = \int_0^{t-(1-t)} + \int_{t-(1-t)}^t$$

Op de eerste van deze beide integralen passen we het tweede teorema van het gemiddelde toe; dat kan, omdat $u^\alpha(t-u)^{-\alpha}$ in het betreffende interval monotoon toeneemt. Er komt

$$\int_0^{t-(1-t)} \psi'(u)u^\alpha(t-u)^{-\alpha}\,du = (2t-1)^\alpha(1-t)^{-\alpha}\,[\psi(2t-1)-\psi(\beta)]$$

waarin $\beta$ een getal in het interval $(0, 2t-1)$ is. Dit gedeelte van de integraal is dus, daar $\psi(t)$ binnen eindige grenzen blijft, voor $t=1$ hoogstens equivalent met $(1-t)^{-\alpha}$. Om van de tweede integraal hetzelfde in te zien, maken we gebruik van het feit dat

$$\lim_{t=1}(1-t)^n\,\psi^{(n)}(t) = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

We zullen dit zo aanstonds bewijzen; men moet niet menen dat het een gevolg van de vroeger in een noot van § 1 genoemde stelling is: het volgt uitsluitend uit de konvergentie van de reeks (27) voor $t=1$.

Nemen we de formule een ogenblik aan, dan hebben we in 't hele interval $0 \leqq u \leqq 1$, als $K$ zeker pozitief, van $u$ onafhankelik getal is,

$$\psi'(u) < \frac{K}{1-u},$$

dus ook, in het integratie-interval $2t-1 \leqq u \leqq t$

$$\psi'(u) < \frac{K}{1-t},$$

en daaruit volgt

$$\left|\int_{2t-1}^t \psi'(u)u^\alpha(t-u)^{-\alpha}\,du\right| < \frac{K}{1-t}\int_{2t-1}^t (t-u)^{-\alpha}\,du = K(1-t)^{-\alpha},$$

zodat ook deze integraal voor $t=1$ hoogstens van de orde $(1-t)^{-\alpha}$ is. Hetzelfde geldt dus van $\varphi(t)$, en daar $\alpha$ willekeurig weinig groter dan $\lambda' + \theta$, gedacht kan worden, heeft men dus stellig voor *iedere* $\delta > 0$.

$$\lim_{t=1} (1-t)^{\lambda'+\theta_1+\delta} \varphi(t) = 0$$

en dus, zoals we ons voorstelden te bewijzen,

$$\lambda \overline{<} \lambda' + \theta_1.$$

Ligt in de tweede plaats $\lambda' + \theta_1$ tussen de gehele getallen $p$ en $p-1$ in, dan kunnen we $\delta$ zoo klein kiezen dat dit ook met $\lambda' + \theta_1 + \delta = \alpha$ het geval is. Stellen we dan

$$\alpha = p - 1 + \alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

dan is weer

$$0 < \alpha' < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

We kunnen nu herleiden

$$\varphi(t) = D^{\alpha'-1} D^p [t^\alpha \psi(t)] \text{ [1]}$$

$$= D^{\alpha'-1} \left[ \Gamma(\alpha'+p) \sum_0^p {}_m \frac{p_m t^{\alpha'+m-1} \psi^{(m)}(t)}{\Gamma(\alpha'+m)} \right]$$

Wegens (31) kunnen we nu op dezelfde manier als zo even, door van de gelijkheid (29) voor $n = m$ gebruik te maken, bewijzen dat de uitdrukking

$$D^{\alpha'-1} [t^{\alpha'+m-1} \psi^{(m)}(t)]$$

voor $t = 1$ hoogstens equivalent is met $(1-t)^{-(\alpha'+m-1)}$, en dus is, daar $m$ tot $p$ gaat, $\varphi(t)$ hoogstens van de orde $(1-t)^{-(\alpha'+p-1)}$, dat is volgens (30) van de orde $(1-t)^{-\alpha}$. Hiermee is het gevraagde rezultaat volledig verkregen.

9. We bewijzen nu de stelling waarvan we zo even gebruik gemaakt hebben. Deze kunnen we als volgt uitdrukken:

*Konvergeert de machtreeksontwikkeling van een functie* $\varphi(t)$ *in het punt* $t = 1$ *van de konvergentiesirkel* (0,1), *dan is voor alle gehele, pozitieve waarden van* $n$

$$\lim_{t=1} (1-t)^n \varphi^{(n)}(t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Deze stelling wordt natuurlik een trivialiteit, indien $t = 1$ geen singulier punt van $\varphi(t)$ is, maar zo ja, dan spreekt hij niet van zelf.

Daar, indien de koeffisienten van de bedoelde machtreeksontwikkeling kompleks zijn, zowel de reeks van de reële als die van de imaginaire delen van die koeffisienten moet konvergeren, kunnen we volstaan met te onderstellen dat de koeffisienten reëel zijn. We beschouwen dan naast de funksie

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

de hulpfunksie

[1] Eigenlik is het $D^p D^{\alpha'-1}$, maar dit is gelijk aan $D^{\alpha'-1} D^p$, omdat $t^{-(p-1)}$ maal het operatieobjekt nog nul is voor $t = 0$.

$$f(t)=\frac{\varphi(t)}{1-t}=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, s_n t^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

waarin

$$s_n=\sum_{0}^{n}{}_{p}\, a_p,$$

Daar $s_n$ voor $n=\infty$ tot een bepaalde limiet $s$ nadert, gedraagt zich de reeksontwikkeling (33) in zijn oneindig verre termen als die van de funksie

$$\frac{s}{1-t},$$

en volgens de redenering van CESARO heeft men niet alleen

$$\lim_{t=1}\left[f(t):\frac{1}{1-t}\right]=s,$$

maar ook

$$\lim_{t=1}\left[f^{(n)}(t):\frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\right]=s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Verder volgt uit

$$\varphi(t)=(1-t)f(t)$$

door $n$-malige differentiatie

$$\frac{(1-t)^n\varphi^{(n)}(t)}{n!}=\frac{(1-t)^{n+1}f^{(n)}(t)}{n!}-\frac{(1-t)^n f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}.$$

Blijkens (34) is nu voor iedere gehele, pozitieve $n$ de limiet van het rechterlid voor $t=1$ gelijk aan nul. Daarmee is de verlangde gelijkheid (32) bewezen.

Door de substitutie $t=t'e^{i\varphi}$ volgt hieruit: Konvergeert de machtreeksontwikkeling van een funksie $\varphi(t)$ in het punt $t=e^{i\varphi}$ van zijn konvergentiesirkel (0,1), dan is voor alle gehele, pozitieve waarden van $n$, en reële $t'$,

$$\lim_{t'=1}(1-t')^n\,\varphi^{(n)}(t'e^{i\varphi})=0$$

---

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer O. POSTMA: *„Over de wrijving in verband met de Brownsche beweging".*

(Mede aangeboden door den Heer ZEEMAN).

§ 1. De verschillende afleidingen van den middelbaren weg, door een gesuspendeerd deeltje ten gevolge van de Brownsche beweging in zekeren tijd afgelegd, kan men in twee rubrieken verdeelen. Bij de afleidingen van de *eerste* soort worden de krachten, op het deeltje werkende, verdeeld in drijvende en tegenwerkende, bij die van de *tweede* soort wordt die onderscheiding niet gemaakt.

Tot die van de eerste soort behooren de afleidingen van EINSTEIN, de tweede van VON SMOLUCHOWSKY, die van LANGEVIN en van DE HAAS—LORENTZ (volgens de methode van EINSTEIN en HOPF). Tot die van de tweede soort behoort de eerste afleiding van VON SMOLUCHOWSKY, die van VAN DER WAALS en SNETHLAGE en die van SNETHLAGE (in haar dissertatie gegeven)[1] [2]).

In de eerstgenoemde theoriën wordt een weerstandbiedende kracht (wrijving) aangenomen evenredig met den straal $a$ van het als bolvormig beschouwde deeltje en met de snelheid $v$. De gebruikte formule $W = 6\pi\zeta av$ wordt in de hydrodynamica afgeleid door er gebruik van te maken, dat de vloeistof aan de oppervlakte van het deeltje volledig mee beweegt. Al die theorieën van de eerste soort geven als uitkomst, dat de middelbare afwijking in het kwadraat ($\overline{\Delta^2}$) evenredig is met den tijd $t$ en omgekeerd evenredig met $a$.

De theorieën van de tweede soort geven als uitkomst: $\overline{\Delta^2}$ evenredig met $t$ en omgekeerd evenredig met $a^2$ en de dichtheid $\varrho$.[3])

De splitsing op zichzelf der krachten in drijvende en weerstand-

---

[1]) Zie: G. L. DE HAAS—LORENTZ: „Die Brownsche bewegung". Lpzg. 1913; J. D. VAN DER WAALS Jr. en Mej. A. SNETHLAGE: „Over de Theorie der Brownsche Beweging". Versl. Ac. v. Wet. XXIV p. 1272. 1916 en A. SNETHLAGE: Moleculair-kinetische verschijnselen in gassen, inzonderheid de Brownsche beweging." Amsterdam 1917.

[2]) VAN DER WAALS Jr. gaf onlangs nog een theorie, waarin men in gewijzigden vorm ook de verdeeling in twee soorten van krachten terugvindt. (Versl. Ac. v. Wet. XXVI p. 1319).

[3]) De eerste uitkomst geeft het beste de resultaten van de onderzoekingen van SNETHLAGE weer.

biedende is echter niet de oorzaak van deze verschillende uitkomsten, zooals blijkt uit de beschouwingen van VON SMOLUCHOWSKY, die bij de aanname van zulk een weerstand evenredig met $v$ toch ook de tweede uitkomst verkreeg, als hij dien weerstand maar tevens evenredig met $a^2$ en $\varrho$ nam.

De reden van het verschil ligt in de aanname van het meebewegen der vloeistof, waardoor de weerstand, in plaats van evenredig met $a^2$ en $\varrho$, evenredig met $a$ wordt. Zoolang de snelheden der moleculen als afhankelijk van die van het deeltje mogen beschouwd worden, is de aanname $W$ evenredig met $\varrho a^2 v$ de natuurlijke.

Het aantal botsingen is nu evenredig met het oppervlak van het deeltje en de dichtheid, terwijl de totale kracht ook evenredig met $v$ wordt door den gezamenlijken invloed van de elkaar tegenwerkende krachten aan voor- en achterkant, ieder evenredig met het kwadraat van de relatieve snelheid. Deze weerstand is berekend door CUNNINGHAM[1]), die er voor vond: $\frac{8}{3} a^2 vn \sqrt{\frac{\pi Mm}{(M+m)h}}$.

Is echter de snelheid der moleculen beïnvloed door die van het deeltje, dan kan de relatieve snelheid $v$ ook weer afhangen van $a$, zoodat de afhankelijkheid van $a$ een andere wordt dan in bovenstaande formule.

Hieruit blijkt dus dat het onjuist is, dat de aanname eener weerstandbiedende kracht, voorgesteld door $W = pv$ zou samenhangen met de aanname, dat de vloeistof met het deeltje meebeweegt.

Op deze laatste aanname komt het echter aan.

VAN DER WAALS en SNETHLAGE hebben tegen die aanname bezwaar. Als de vloeistof-moleculen met het deeltje meebewegen, zijn de snelheden der moleculen niet meer onafhankelijk van de snelheid van het deeltje, wat toch in den toestand van statistisch evenwicht, zooals die hier bestaat, het geval moet zijn. Dit meebewegen zou b.v. wel kunnen geschieden bij den val van een deeltje onder den invloed der zwaartekracht, maar niet hier bij de Brownsche beweging.

Hiertegen moet echter opgemerkt worden, dat juist door de splitsing der krachten in drijvende en weerstandbiedende een analoog geval is ontstaan. De drijvende krachten komen hier nu in de plaats van de zwaartekracht. De werking der moleculen op het deeltje wordt verdeeld gedacht in een toevallige, onregelmatige, die als oorzaak der beweging te beschouwen is en een regelmatige, weerstandbiedende, die de wrijving voorstelt.

---

[1]) E. CUNNINGHAM: „On the Velocity of Steady Fall of Spherical Particles through Fluid Medium". Proc. Roy. Soc. Ser. A Vol. 83 p. 357. 1910.

*Op den duur* is er statistisch evenwicht, maar toch wordt voortdurend het arbeidsvermogen der moleculen door de onregelmatige, drijvende, krachten omgezet in molair arbeidsvermogen van het deeltje en dit weer door de weerstandbiedende krachten in moleculair arbeidsvermogen.

Ook zijn *over het geheel* de moleculaire snelheden onafhankelijk van die van het deeltje, maar de moleculen kunnen verdeeld gedacht worden in een groote meerderheid waarvan de snelheid gemiddeld te weinig afwijkt van die van het deeltje en kleinere complexen waarvan de snelheid er te veel van afwijkt. Het eerste staat gelijk met meebewegen, het tweede veroorzaakt drijvende krachten. Deze laatste zijn trouwens niet alleen het gevolg van toevallige snelheidsafwijkingen, maar ook van toevallige dichtheids-afwijkingen. De onderlinge grootteverhouding van moleculen, deeltjes en vrije weglengte is wel met bovenstaande beschouwing in overeenstemming. Terwijl de orde van grootte der moleculen $10^{-7}$ is, wordt meestal voor die der deeltjes ongeveer $10^{-5}$ opgegeven, terwijl de vrije weglengte in de vloeistof van de orde $10^{-6}$ is. Men kan zich dus de afmetingen van de moleculen en de deeltjes op schaal als 1 m.M. en 1 d.M. voorstellen, terwijl dan de vrije weglengte 1 c.M. zou worden. Bij wijze van ruwe schatting kan men nu wel aannemen dat in een vloeistof tegelijk $10^4$ moleculen met het deeltje in wisselwerking zijn (van dezelfde orde als het aantal, dat het oppervlak geheel kan bedekken) en in een gas $10^2$ moleculen. De stooten, die het deeltje in beweging houden, gaan dus nu uit van toevallig op den voorgrond tredende complexen dezer moleculen.

§ 2. Men vindt nu voor de middelbare afwijking van een deeltje de formule van Einstein $\overline{\Delta^2} = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\zeta a} \cdot t$ als men voor den wrijvingsweerstand $W = 6\pi\zeta av$ neemt. Deze waarde is door Stokes afgeleid in de onderstelling, dat de vloeistof onsamendrukbaar is en aan den omtrek van het deeltje volledig meebeweegt, terwijl de snelheid niet te groot mag zijn. Het is echter de vraag of zulk een volledig meebewegen mag worden aangenomen.

Cunningham heeft de onderstelling beproefd, dat de snelheld van de vloeistof aan den omtrek $kv$ zou zijn, zoodat dus de relatieve snelheid van het deeltje ten opzichte van de aangrenzende vloeistof $v—kv$ zou zijn. De weerstand zou dan volgens de formule van Stokes $W = 6\pi\zeta akv$ worden. Hij berekent nu deze $k$ op de volgende wijze.

Zooals boven is opgemerkt vond hij voor den weerstand, met behulp van zuiver kinetische beschouwingen, als de relatieve snelheid $= v$ is, de waarde $\frac{8}{3} a^2 vn \sqrt{\frac{\pi M m}{(M+m)h}}$; dit zou dus nu worden $\frac{8}{3} a^2 (v-kv) n \sqrt{\frac{\pi m}{h}}$ (als tevens $m$ tegen $M$ verwaarloosd wordt). Hij stelt nu deze waarde gelijk aan de uit phenomenologische beschouwingen afgeleide waarde $6\pi\zeta akv$ en vindt zoo een vergelijking, waaruit $k$ berekend kan worden.

Op deze wijze van berekening zijn echter, naar mij voorkomt, gegronde aanmerkingen te maken. De onderstellingen waarvan men bij de afleiding der beide uitdrukkingen is uitgegaan zijn niet dezelfde; de uitkomsten gelden dus voor verschillende gevallen en behoeven niet gelijk te zijn. Bij de kinetische beschouwingen toch is door CUNNINGHAM aangenomen, dat de botsende moleculen de Maxwellsche snelheidsverdeeling bezitten, d. w. z. in het gas of de vloeistof bestaat geen inwendige wrijving (deze toch hangt af van de afwijkingen van de Maxwellsche verdeeling), terwijl ook de moleculen bij botsing tegen het deeltje alleen normale krachten uitoefenen, d. w. z. er is geen uitwendige wrijving.

Bij de formule van STOKES daarentegen is er inwendige wrijving en de vloeistof oefent op het lichaam ook zijdelingsche krachten uit. Door gelijkstelling der beide uitkomsten kan men dus m. i. geen betrekking verkrijgen, die beteekenis heeft. Daarbij komt nog de innerlijke tegenstrijdigheid, die er bestaat bij de kinetische afleiding tusschen de aanname van een gelijkmatige snelheids-overdracht $kv$ en het aannemen van zuiver veerkrachtige botsing.

Aan de einduitkomst $W = 6\pi\zeta av \left(1 + 1{,}63 \frac{l}{a}\right)^{-1}$ kan dan ook, dunkt mij, niet veel waarde toegekend worden.

Beter dan de aanname van een gelijkmatig meebewegen tot een bedrag $kv$ schijnt de onderstelling dat de normale snelheid van de vloeistof gelijk is aan die van het deeltje, terwijl de tangentieele verschillend is en er een wrijving bestaat evenredig met de relatieve tangentieele snelheid.

De weerstand, dien een bol bij die onderstelling ondervindt is berekend door LAMB en door BASSET [1]). De eerste maakt bij zijn afleiding gebruik van de dissipatiefunctie (met behulp der eigenschap:

---

[1]) Zie: HORACE LAMB: „A Treatise on the Math. Theory of the Motion of Fluids". Cambr. 1879 p. 230 (in de latere drukken niet meer opgenomen) en A. B. BASSET, „A Treatise on Hydrodynamics" Cambr. 1888 II p. 270.

de in de vloeistof in warmte omgezette energie = arbeid der krachten noodig om de beweging te onderhouden); de tweede volgt een directe methode door den druk aan het oppervlak te berekenen. De beide uitkomsten zijn echter niet geheel gelijk; de eerste vindt:

$$W = 6\,\pi\zeta a v \frac{1 + 4\dfrac{\zeta}{\beta a} + 6\left(\dfrac{\zeta}{\beta a}\right)^2}{\left(1 + 3\dfrac{\zeta}{\beta a}\right)^2}, \text{ de tweede: } W = 6\pi\zeta a v \frac{1 + \dfrac{2\zeta}{\beta a}}{1 + \dfrac{3\zeta}{\beta a}},$$

waarin $\beta$ = coefficiënt van uitwendige wrijving. De tweede uitdrukking is ook gelijk aan: $6\pi\zeta a v \dfrac{1 + 5\dfrac{\zeta}{\beta a} + 6\left(\dfrac{\zeta}{\beta a}\right)^2}{\left(1 + 3\dfrac{\zeta}{\beta a}\right)^2}$, zoodat het verschil der uitkomsten bedraagt: $6\pi z\zeta v \dfrac{\dfrac{\zeta}{\beta a}}{\left(1 + 3\dfrac{\zeta}{\beta a}\right)^2}$. Het ligt voor de hand hier een fout te vermoeden in de indirecte methode. Bij het zoeken daarnaar geeft leiding de opmerking dat beide waarden gelijk worden als $\beta = 0$ en $\beta = \infty$, dus als er geen wrijving is en als er geen glijden plaats vindt.

In beide gevallen nu verricht de wrijving geen arbeid; in het eerste geval niet omdat de kracht wegvalt, in het tweede niet omdat de weg wegvalt.

Waarschijnlijk zal dus de wrijvingsarbeid aan het grensvlak nog gevoegd moeten worden bij de warmte, uit de dissipatiefunctie berekend met de formule $\iiint F\,dx\,dy\,dz$, waarin $F = -\frac{2}{3}\zeta(a+b+c)^2 + 2\zeta\,(a^2 + b^2 + c^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2h^2)$ [1]). Inderdaad blijkt dit uit te komen.

De wrijvingskracht is n.l. in een punt, bepaald door den hoek $\vartheta$:

$$U = \beta\left\{\frac{A}{a^2} - \frac{B}{a} + v\right\} \sin\vartheta \text{ [2]), waarin } A = \frac{-\frac{1}{4} v a^3}{1 + 3\dfrac{\zeta}{\beta a}} \text{ en } B = \frac{\frac{3}{4} v a\left(1 + \dfrac{2\zeta}{\beta a}\right)}{1 + 3\dfrac{\zeta}{\beta a}}$$

dus $U = \beta \dfrac{\dfrac{3\zeta v}{2\beta a}}{1 + \dfrac{3\zeta}{\beta a}} \sin\vartheta$. Deze wrijving wordt uitgeoefend op een

[1]) Notatie van LAMB.

[2]) Zie LAMB p. 230 en BASSET p. 270.

oppervlak $2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$, terwijl de relatieve snelheid tegengesteld aan de kracht $\dfrac{\dfrac{3\zeta v}{2\beta a}}{1+\dfrac{3\zeta}{\beta a}} \sin\vartheta$ is. Voor de getallenwaarde van den per seconde verrichten wrijvingsarbeid vindt men dus:

$$\int_0^\pi 2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, \beta \left[\frac{\dfrac{3\zeta v}{2\beta a}}{1+\dfrac{3\zeta}{\beta a}} \sin\vartheta\right]^2 = \int_0^\pi 2\pi a^2 \sin^3\vartheta \frac{\dfrac{9\zeta^2 v^2}{4\beta^2 a^2}}{\left(1+\dfrac{3\zeta}{\beta a}\right)^2} d\vartheta =$$

$$= 6\pi\zeta v^2 a \frac{\dfrac{\zeta}{\beta a}}{\left(1+\dfrac{3\zeta}{\beta a}\right)^2}.$$

Voegt men dezen term bij de uit de dissipatiefunctie berekende warmte, dan komt bij de kracht, noodig om de beweging te onderhouden, dus ook bij den gezochten weerstand, juist de ontbrekende term.

Met behulp van deze laatste formule voor den weerstand vindt men voor de middelbare afwijking der deeltjes de formule:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\zeta a} \cdot \frac{1+\dfrac{2\zeta}{\beta a}}{1+\dfrac{3\zeta}{\beta a}} \cdot t.$$

§ 3. Dat de dissipatiefunctie met inachtneming van den bovengenoemden wrijvingsarbeid den weerstand, dien het deeltje ondervindt, kan opleveren, blijkt als volgt.

Wij denken ons de onsamendrukbare vloeistof ingesloten door een oppervlak $S$, waartoe ook behoort het oppervlak van een lichaam van willekeurige gedaante, dat zich door de vloeistof beweegt. Wij beschouwen nu de kinetische energie $T = \frac{1}{2}\iiint \varrho q^2\, dx\, dy\, dz$ (de molaire energie alleen, niet de warmte) en leiden uit de bewegingsvergelijkingen een energievergelijking af, die aangeeft hoe de kinetische energie met den tijd verandert. Wij vinden dan: [1])

$$\frac{dT}{dt} = \iiint \varrho (Xu + Yv + Zw)\, du\, dy\, dz - \tfrac{1}{2}\iint \varrho q^2 (lu + mu + nw)\, dS +$$
$$+ \iint (X_1 u + Y_1 v + Z_1 w)\, dS - \iiint F\, dx\, dy\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

[1]) Zie BASSET II l.c. p. 252 en HELMHOLTZ „Wissenschaftl. Abhandlungen" Lpzg. 1882 p. 225.

Hierin stellen $X, Y, Z$ de componenten voor van de uitwendige krachten per eenheid van massa werkende op de vloeistof; $X_1, Y_1, Z_1$ de drukcomponenten per eenheid van oppervlak werkende aan de oppervlakte van de vloeistof, $F$ de dissipatiefunctie. De eerste term rechts stelt dus voor de toename van de kinetische energie door de werking der uitwendige krachten, de tweede term de toename door het binnenstroomen van de vloeistof, de derde term de toename door de werking der drukkrachten, de vierde de afname door de omzetting der kinetische energie in warmte tengevolge van de inwendige wrijving. De laatste integraal is steeds positief, de andere kunnen positief of negatief zijn.

Denken we het oppervlak $S$ geheel gevormd door vaste lichamen, waarlangs de wrijving verwaarloosd wordt, uitgezonderd langs het bewegend lichaam, dan vervalt de tweede term, terwijl de derde alleen over dit lichaam genomen behoeft te worden. Is verder de toestand stationair, dan wordt de betrekking (1):

$$0 = \iint (X_1 u + Y_1 v + Z_1 w)\, dS - \iiint F\, dx\, dy\, dz \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor het bewegend lichaam geldt in dat geval de vergelijking:

$$\Sigma (X'u + Y'v + Z'w)\, dt + \iint (-X_1 u - Y_1 v - Z_1 w)\, dS\, dt = 0 \quad . \quad (3)$$

De sommatie moet geschieden over de punten, waar de uitwendige krachten ($X'$ enz.) aangrijpen, de integratie over het oppervlak. Door de notatie is uitgedrukt dat de krachten op de oppervlaktelaag werkend gelijk en tegengesteld zijn aan die daar ter plaatse op de vloeistof werkend.

Vindt er glijden plaats, dan zijn echter de snelheidscomponenten daar, voor zoover zij betrekking hebben op het lichaam, ter eene zijde en de vloeistof ter andere, niet gelijk. Noemen we de componenten in de vloeistof $u_v$ enz., die in het lichaam $u_l$ enz., dan is $u_v = u_l + u_r$ enz. (4), als $u_r$ de component van de relatieve snelheid voorstelt.

Nu wordt verg. (2):

$$\iint (X_1 u_v + Y_1 v_v + Z_1 w_v)\, dS - \iiint F\, dx\, dy\, dz = 0$$

en verg. (3):

$$\Sigma (X'u + Y'v + Z'w) - \iint (X_1 u_l + Y_1 v_l + Z_1 w_l)\, dS = 0.$$

Door optelling krijgt men:

$$\Sigma (X'u + Y'v + Z'w) +$$
$$+ \iint [X_1 (u_v - u_l) + Y_1 (v_v - v_l) + Z_1 (w_v - w_l)] dS - \iiint F\, dx\, dy\, dz = 0$$

of met behulp van (4):

$$\Sigma(X'u + Y'u + Z'w) = \iiint F\,dx\,dy\,dz - \iiint (X_1 u_r + Y_1 v_r + Z_1 w_r)\,dS.$$

Daar de normale krachten aan het oppervlak loodrecht staan op de relatieve snelheid dragen deze niet bij tot de laatste integraal; deze term stelt dus den wrijvingsarbeid voor. Het resultaat is derhalve: de arbeid per sec. verricht door de op het lichaam werkende uitwendige krachten is in den stationairen toestand gelijk aan de in de vloeistof gevormde warmte vermeerderd met de absolute waarde van den uitwendigen wrijvingsarbeid [1]).

Denkt men zich nu voor het lichaam een bol met snelheid $v$, welke door een kracht $K$ in het middelpunt in den toestand van eenparige beweging wordt gehouden, dan is de arbeid per sec. $Kv$. Daar deze $K$ gelijk is aan den weerstand $W$, die moet worden overwonnen, is dus ook:

$Wv = \iiint F\,dx\,dy\,dz$ + langs het oppervlak verrichte wrijvingsarbeid. Hieruit kan $W$ berekend worden.

**Natuurkunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer P. EHRENFEST: *„De afleiding der chemische konstante uit de theorie der quanta".*

(Deze mededeeling zal in een volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

---

[1]) „Absolute" waarde, want daar $X_1$ en $u_r$ beide betrekking hebben op de vloeistof zijn ze tegengesteld gericht, zoodat de vorm tenslotte positief wordt. Het resultaat zegt dus niet anders dan: uitwendige arbeid = totale gevormde warmte. Opgemerkt moet worden dat RAYLEYGH, die de dissipatiefunctie eerst invoerde, daarmee niet bovengenoemde $F$ bedoelde, maar de totale gevormde warmte. (Proc. Lond. Math. Soc. 1873 p. 363).

**Natuurkunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt een mededeeling aan namens de Heeren L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE over: *„Magnetische eigenschappen van cubische kristalnetten".*

(Mede aangeboden door den Heer W. H. JULIUS).

Het bekende model van EWING is door verschillende physici nader behandeld. Enkele hebben zich daarbij op het zeer onbevredigende standpunt geplaatst, dat de elementair magneten op toevallige wijze over de ruimte verdeeld zijn [1]). Meer in overeenstemming met de werkelijkheid is de onderstelling, waarvan W. PEDDIE [2]) en later ook HONDA en OKUBO [3]) zijn uitgegaan, dat de magnetische deeltjes in een cubisch net gerangschikt zijn. Hunne beschouwingen vertoonen echter twee belangrijke onjuistheden.

In de eerste plaats hebben zij de ontmagnetiseerende kracht in een bol verwaarloosd; daardoor meenen zij dat dipolen geen resultaat kunnen leveren, en gingen zij er onnoodig toe over magneetjes van eindige lengte te beschouwen. In de tweede plaats hebben zij bij het onderzoek van de stabiliteit slechts die draaiïngen beschouwd, waarbij de magnetische assen van alle deeltjes onderling evenwijdig verplaatst worden.

Zooals wij in het volgende zullen aantoonen is het gevolg van deze ongemotiveerde beperking in de vrijheid van beweging der deeltjes, dat de stabiliteit veel grooter gevonden wordt, dan in werkelijkheid het geval is.

Wanneer men deze beperking laat vallen, vindt men dat de rangschikking van magnetische atomen in een cubisch net labiel is als er geen uitwendig veld werkt. Een lichaam, dat een dergelijke structuur vertoont, kan dus geen coërcitief-kracht bezitten.

1. Wij beschouwen een cubisch net met ribbe $d$. In de hoekpunten denken wij vrij draaibare dipolen, die de sterkte $p$ bezitten. Laten deze dipolen door een sterk uitwendig veld $H$ alle evenwijdig aan een ribbe van het net gericht zijn. Wij stellen nu de vraag hoever het uitwendig veld verzwakt moet worden om de grens der

[1]) Gans u. Hertz, Zeitsch. für Mathematik und Physik.

[2]) Edinburgh Proc. 1905 en 1907.

[3]) Phys. Review, X, 1917, p. 705.

stabiliteit te bereiken. De veldsterkte $H_g$ waarbij dit het geval is, zal negatief zijn, indien het stelsel zonder uitwendig veld stabiel is. Maakt men het uitwendig veld dan nog sterker negatief, dan zullen de magneetjes plotseling geheel omdraaien en de magnetisatie dus van $+M$, $-M$ worden.

De magnetische eigenschappen van het beschouwde net zullen dus — wanneer $H_g$ negatief is — in ruwe trekken met die van een ferro-magnetisch lichaam met hysterese overeenkomen. Wanneer men daarentegen voor $H_g$ een positieve waarde vindt, dan heeft men te doen, met een lichaam zonder hysterese, dat pas door een veld sterk $H_g$ verzadigd gemagnetiseerd wordt. Bij zwakker uitwendig veld zullen de magnetische atomen niet meer geheel gericht blijven, en zal $M$ dus afnemen. Wij zullen voor dat geval het verband tusschen veldsterkte en magnetisatie m.a.w. de permeabiliteit afleiden.

Om uit $H_g$ de coërcitiefkracht $H_c$ te vinden, moet men bedenken dat deze gedefinieerd wordt als het negatieve *inwendige* veld, noodig om de magnetisatie van teeken te doen veranderen. Dit inwendige veld zal men steeds vinden door het veld $H_{con}$, dat door het gemagnetiseerde lichaam zelf veroorzaakt wordt, bij het uitwendige veld $H_e$ op te tellen. Het veld $H_{con}$ moet daarbij berekend worden in de onderstelling, *dat het lichaam een continue ruimte-magnetisatie heeft.* Men heeft dus

$$H = H_e + H_{con} \text{ en in 't bijzonder } H_c = - H_g - H_{con}.$$

Hierin is $-H_{con}$ de zoogenaamde ontmagnetiseerende kracht. $H_c$ zal door deze definitie onafhankelijk van den vorm van het beschouwde lichaam worden, wat dus voor $H_g$ niet het geval is. In de vorige alinea moet men dan ook overal voor $H_g$ lezen $H_g + H_{con}$. Wij zullen bij onze berekening steeds een bolvormige begrenzig aannemen. Daarover is $H_{con} = -\frac{1}{3}$ M.

Het is gemakkelijk aan te toonen dat $H_g = 0$ wordt wanneer men aan de draaiïng der atomen de boven besproken beperking oplegt dat hunne assen steeds evenwijdig blijven. Men heeft daartoe slechts de wederkeerige energie van twee dipolen over het geheele net te sommeeren. Uit symmetrie overwegingen vindt men dan dat deze som nul is [1]).

Wij zullen voor de genoemde stelling een ander bewijs geven waarvan het beginsel ook voor onze verdere berekening van dienst zal zijn.

Wij kiezen een assenstelsel evenwijdig met de ribben en nemen den oorsprong in een der netpunten. Wij denken ons in al de punten

[1]) H. A. Lorentz. Theory of Electrons. Noot 55, p. 208.

van het net, behalve in den oorsprong, Noordpolen van de sterkte één, terwijl wij het net begrensd denken door een zeer grooten bol om 0. Laat $V_0(x, y, z)$ de potentiaal voorstellen daardoor veroorzaakt in een punt $x, y, z$. De potentiaal van dipolen met moment $p$ in de $x$-richting is dan $p\frac{\partial V_0}{\partial x}$, de veldsterkte in 0 is dus $p\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}$, $p\frac{\partial^2 V_0}{\partial y \partial x}$, $p\frac{\partial^2 V_0}{\partial z \partial x}$ resp. in de $x$, $y$ en $z$-richting. De potentieele energie van een dipool met moment $p'$ in $O$ zal dus $pp'\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}$ zijn, wanneer deze dipool ook langs de $x$-as gericht is, terwijl zij $-pp'\frac{\partial^2 V_0}{\partial y \partial x}$ bedraagt, wanneer de laatste dipool volgens de $y$-as gericht is.

Wanneer wij nu in alle hoekpunten gelijk gerichte dipolen plaatsen, kunnen wij deze ontbinden in dipolen volgens de richting der assen met momenten $p_x$, $p_y$ en $p_z$. De potentieele energie van de dipool in den oorsprong is dus:

$$-\left\{p^2_x\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}+p^2_y\frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2}+p^2_z\frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}+2p_x p_y\frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y}+\right.$$
$$\left.+2p_x p_z\frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial z}+2p_z py\frac{\partial^2 V_0}{\partial z \partial y}\right\}.$$

Wegens de symmetrie zijn de drie gemengde differentiaal-quotiënten nul, terwijl verder ook $\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}$. Deze differentiaal-quotiënten zijn dus eveneens nul omdat $V_0$ aan de vergelijking van LAPLACE voldoet. Dientengevolge is de inwendige energie van het net nul, onafhankelijk van de richting der dipolen (mits alle dipolen evenwijdig zijn). Een zeer zwak uitwendig veld zal dus voldoende zijn om alle dipolen de richting van dit veld te doen aannemen, m. a. w. $H_g$ is hier nul.

Hetzelfde resultaat geldt voor de beide andere cubische rangschikkingen volgens BRAVAIS: het gecentreerd cubische en het vlakgecentreerd cubische net. De gebruikte beperking levert dus een coërcitief-kracht die gelijk aan één derde van de verzadigingsmagnetisatie is. Voor staal is de coercitief-kracht minstens 80 maal kleiner.

2. Wij zullen in het volgende de potentiaal $V$ noodig hebben van een rechthoekig net met ongelijke ribben $a$, $b$ en $c$ voor het geval dat ieder hoekpunt een eenheidspool draagt. Deze potentiaal is afhankelijk van den vorm der begrenzing, ook al denkt men deze zeer ver verwijderd. De daarmee samenhangende moeilijkheden zullen we vermijden door de volgende kunstgreep. Behalve de puntladingen 1 in de hoekpunten geven we het lichaam een homogene

ruimte-lading $-1$ per volume $a\ b\ c$. In totaal is het lichaam dan ongeladen en de deelen op grooten afstand van het beschouwde punt hebben een verdwijnenden invloed. De potentiaal $V'$ voor dit geval kunnen wij dus berekenen voor een in alle richtingen oneindig uitgestrekt net. Daaruit zullen wij vervolgens $V$ vinden bij bolvormige begrenzing door de potentiaal in een homogenen bol met ladingsdichtheid $+\frac{1}{abc}$ toe te voegen, die op een constante na gelijk aan $-\frac{x^2+y^2+z^2}{6abc}$ is.

Wij beginnen met de potentiaal $U$ te berekenen, die veroorzaakt wordt door de ladingen welke tusschen de vlakken $z = \pm \frac{1}{2}c$ liggen. $U$ is blijkbaar een periodieke functie van $x$ en $y$ met de perioden $a$ en $b$. Zij is dus voor te stellen door een dubbele reeks van FOURIER:

$$U = \Sigma\, Z_{mn} \cos \frac{2\pi m}{a} x \cos \frac{2\pi n}{b} y \qquad \begin{matrix} m = 0, 1, 2 \ldots. \\ n = 0, 1, 2 \ldots. \end{matrix},$$

waarin om reden van symmetrie alleen de cosinus voorkomt. De coefficienten $Z_{mn}$ zijn functies van $z$, die bepaald kunnen worden uit de vergelijkingen:

$$\Delta U = \frac{1}{abc} \text{ voor } |z| < \tfrac{1}{2}c \qquad \Delta U = 0 \text{ voor } |z| > \tfrac{1}{2}c$$

met de grenscondities

$$U_{z=\pm\infty} = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_2 \text{ voor } z = \pm \tfrac{1}{2}c.$$

Nu kan de FOURIER-reeks, voor $z \neq 0$, tweemaal gedifferentieerd worden, zoodat na substitutie in deze vergelijkingen elke term afzonderlijk aan de homogene vergelijkingen voldoen moet, en $Z_{00}$ aan $\Delta Z_{00} = \frac{1}{abc}$. Daaruit zal men vinden

$$Z_{00} = \begin{matrix} 0 & |z| > \tfrac{1}{2}c \\ \dfrac{(\frac{1}{2}c - |z|)^2}{2abc} & |z| < \tfrac{1}{2}c \end{matrix} \qquad Z_{mn} = B_{mn}\, e^{-l|z|} \qquad l = 2\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Om nu nog $B_{mn}$ te bepalen kan men $z = 0$ nemen en de gewone coefficienten-voorstelling gebruiken:

$$\frac{ab}{4} B_{mn} = \int_0^a dx \int_0^b dy\ U_{z=0} \cos \frac{2\pi m}{a} x \cos \frac{2\pi n}{b} y$$

waarin voor $m$ of $n$ nul $\frac{ab}{2}$ moet staan. Voor $U_{z=0}$ heeft men

$$U_{z=0} = \sum_i \sum_k \left(\frac{1}{4\pi r_{ik}} + C_{ik}\right)$$

waarin $r_{ik}$ de afstand tot het netpunt $(ia, kb)$ is en $C_{ik}$ de potentiaal van het homogeen gevulde parallelepipedum $abc$ met dat punt tot middelpunt. Terwille van de convergentie zullen wij hier een oogenblik als attractiewet $r^{-1}\, e^{-\varepsilon r}$ invoeren en in de uitkomst $\varepsilon = 0$ nemen. Dan kan men schrijven

$$U_{z=0}(\varepsilon) = C(\varepsilon) + \sum_i \sum_k \frac{e^{-\varepsilon r_{ik}}}{4\pi r_{ik}},$$

waarin $C(\varepsilon)$ de potentiaal van de oneindig uitgestrekte, homogeen gevulde ruimte is, dus een constante, alleen afhangend van $\varepsilon$.

Substitueert men de waarden van $U(\varepsilon)$ in de dubbele integraal, dan levert dus de term $C(\varepsilon)$ nul op. In den anderen term kan sommeeren en integreeren verwisseld worden. De verschillende integralen kunnen dan tot een enkele over alle rechthoeken vereenigd worden. Daardoor verkrijgt men:

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi m}{a} x \; \cos \frac{2\pi n}{b} y}{4\pi \sqrt{x^2+y^2}} e^{-\varepsilon \sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$$

Door het invoeren van poolcoordinaten is deze integraal te herleiden tot

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr e^{-\varepsilon r} \int_0^\pi \cos\,(l r \sin \varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty J_0(lr) e^{-\varepsilon r} dr = \frac{1}{2\sqrt{l^2+\varepsilon^2}}$$

en dus voor $\varepsilon = 0$

$$\frac{ab}{4} B_{mn} = \frac{1}{2l}.$$

De gevonden potentiaal is verder gemakkelijk te sommeeren voor al de lagen van dikte $c$ waarin men het net door vlakken loodrecht op de $z$-as verdeelen kan. Voor een punt waarvan $0 < z < \frac{1}{2}c$ geven alle lagen onder het punt

$$\frac{(\frac{1}{2}c - z)^2}{2abc} + \Sigma B_{mn} \{e^{-lz} + e^{-l(z+c)} + e^{-l(z+2c)} + \ldots\} \cos \frac{2\pi m}{a} x \; \cos \frac{2\pi n}{b} y =$$
$$= \frac{(\frac{1}{2}c - z)^2}{2abc} + \Sigma B_{mn} \frac{e^{-lz}}{1-e^{-lc}} \cos \frac{2\pi m}{a} x \; \cos \frac{2\pi n}{b} y$$

en alle vlakken er boven

$$\Sigma B_{mn} \frac{e^{-l(c-z)}}{1-e^{-lc}} \cos \frac{2\pi m}{a} x \; \cos \frac{2\pi n}{b} y$$

dus

$$V' = \frac{(\frac{1}{2}c - z)^2}{2abc} + \Sigma' \frac{2}{abl} \frac{e^{-lz} + e^{-l(c-z)}}{1-e^{-lc}} \cos \frac{2\pi m}{a} x \; \cos \frac{2\pi n}{b} y \; . \quad . \quad (1)$$

waarin $\Sigma'$ beteekent, dat men van de termen waarvoor $m=0$ of $n=0$ de helft moet nemen, terwijl er geen term is voor $m=n=0$.

Formule (1) geldt blijkbaar voor $0<z<c$.

Voor het bolvormig begrensde net zonder ruimtelading vinden wij ten slotte

$$V=-\frac{x^2+y^2+z^2}{6abc}-\frac{(\frac{1}{2}c-z)^2}{2abc}+S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wanneer $S$ de reeks $\Sigma'$ in (1) voorstelt.

Uit de aldus bepaalde potentiaal $V$ kunnen wij evenals boven de potentieele energie van een dipool met de componenten $p'_x$, $p'_y$ en $p'_z$ afleiden, wanneer die geplaatst is in een punt $(x, y, z)$ van het veld veroorzaakt door dipolen $p_x$, $p_y$, $p_z$ in de hoekpunten van het net.

De uitdrukking

$$-\left(p_x p'_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\ldots+(p_x p'_y+p_y p'_x)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}+\ldots\right)$$

zal die energie voorstellen.

Voor de hierin voorkomende tweede afgeleiden volgt uit (2)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{1}{3abc}\,,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-\frac{1}{3abc}\,,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+\frac{2}{3abc}\,,\quad \frac{\partial^2 V}{dy \partial z}=\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3. Om algemeen de stabiliteit te onderzoeken van het in (2) beschreven stelsel, moet men het gedrag van den kwadratischen vorm bestudeeren, die de potentieele energie voorstelt als functie van de grootheden, welke de richting van alle dipolen bepalen. De moeilijkheid van dit vraagstuk ligt niet zoozeer in het groote aantal der veranderlijken, als wel in de onmogelijkheid om een enkele reeks te vormen, waarin steeds veranderlijken die op naburige magneetjes betrekking hebben, dicht op elkaar volgen.

Deze moeilijkheid doet zich niet voor bij het geval dat men te doen heeft met dipolen die op één lijn geplaatst zijn op onderling gelijke afstanden. De stabiliteit is daarvoor op bekende wijze gemakkelijk te onderzoeken met behulp van een determinant. Wij zullen enkele der uitkomsten vermelden, daar zij ons leiden kunnen bij het geval dat ons bezig houdt. Zijn alle magneetjes door een veld evenwijdig aan de lijn gelijk gericht, dan is het stelsel nog stabiel als men het veld opheft. Brengt men een langzaam toenemend tegengesteld veld aan, dan is er een bepaald stel van kleine draaiingen der dipolen aan te geven, waarvoor het stelsel het eerst labiel wordt. Deze draaiingen zijn zoodanig dat daarbij de magneetjes in één vlak liggen en om den andere hoeken $+\varphi$ en $-\varphi$ met de richting van

het veld gaan maken. De bij deze verplaatsing der magneetjes gevonden coërcitief-kracht is slechts één derde van de kracht die men vindt uit de onderstelling, dat alle magneetjes evenwijdig draaien.

Voor het geval van het cubische net is de analoge algemeene methode om de reeds vermelde reden onbruikbaar, doch het is duidelijk dat ook daar naar de combinatie van draaiingen gezocht moet worden, die het eerst tot labiel worden van de magneetjes voert, dat deze combinatie bij het berekenen der coërcitief-kracht dienst moet doen, en dat ze daarvoor een kleinere waarde zal opleveren dan alle andere combinaties. Geleid door de analogie met het genoemde eenvoudige geval zullen wij die combinaties van draaingen onderzoeken, waarbij de dipolen van het net bij twee gelijke groepen ingedeeld worden, die een tegengestelde draaiing vertoonen. Verder zal het gunstig zijn wanneer de tegengesteld draaiende magneten zooveel mogelijk afwisselend geplaatst zijn.

Men kan een verdeeling in twee groepen verkrijgen door uit te gaan van een vlak door drie willekeurige netpunten, en daarbij het stelsel evenwijdige vlakken aanbrengen dat alle netpunten bevat. Van deze vlakken met de daarin gelegen dipolen kan men op systematische wijze het halve aantal aan elk der groepen toewijzen. Het meest voor de hand liggend is wel, ze om het andere tot de eerste en tot de tweede groep te rekenen. Laat de gekozen vlakken de drie cubus ribben resp. in $l$, $m$ en $n$ stukken verdeelen.

De dipolen op de $x$-as zullen dan afwisselend tot de beide groepen behooren, wanneer $l$ oneven is, daarentegen alle tot dezelfde groep als $l$ even is. Hieruit volgt dat er in beginsel slechts drie verschillende verdeelingen in groepen mogelijk zijn, te weten: afwisseling der dipolen langs drie, langs twee of slechts langs één as. Deze verdeelingen krijgt men resp. door van het octaëder, het rhombendodecaëder- of het cubus-vlak uit te gaan.

Op dezelfde wijze kan men de verdeeling van de punten van het gecentreerd cubische net onderzoeken, door op het al of niet afwisselen der punten op drie der cubus-diagonalen te letten. Van de drie gevallen blijken daarbij de twee laatste identiek te zijn. Er zijn dus slechts twee mogelijkheden, die resp. bij het octaëder- en het rhombendodecaeder-vlak behooren. Bij de beschouwing van de verdeelingen van het vlak-gecentreerde cubische net kan men drie zijvlak-diagonalen die in één hoekpunt te zamen komen nemen. Het eerste en derde geval blijken dan identiek te zijn en te behooren bij het octaëder-vlak, het tweede geval behoort bij het cubus-vlak.

Bij elk van de genoemde netten komt een verdeelingswijze voor die geen scherper criterium voor de stabiliteit zal opleveren, dan het

evenwijdig draaien van alle dipolen. Het zijn de verdeelingen die bij het octaëder-vlak behooren. Daarbij zal immers voor elke helft afzonderlijk de gelijkwaardigheid der drie assenrichtingen zijn blijven bestaan. Analoog aan het in 1. besprokene geldt dan niet alleen voor elk deel afzonderlijk, doch ook voor de deelen onderling, dat de energie nul is, voor elken stand der dipolen. De coercitief-kracht wordt dus weder een derde van de verzadigings-magnetisatie, terwijl voor andere verdeelingen in twee groepen een veel kleinere, ja zelfs een negatieve waarde gevonden wordt.

Er zijn nog allerlei andere verdeelingen in groepen denkbaar, die wellicht bij andere keuze van de richting van het uitwendige veld van belang kunnen zijn. Zoo bijvoorbeeld de verdeeling in drie groepen. Bij het hier uitsluitend behandelde geval dat het veld evenwijdig aan de cubusribbe loopt, bleek ons dat ze een grooter waarde voor $H_c$ geven dan de hieronder berekende.

4. Wij zullen de $y$-as in de richting van het uitwendige veld leggen, de $x$- en $z$-as langs de beide andere cubusribben. Bij een willekeurige verdeeling in twee helften, wier dipolen evenwijdig aan het $xy$-vlak gericht zijn, en hoeken $+\varphi$ en $-\varphi$ met de $y$-as maken, kunnen wij de energie als volgt aangeven. Elke dipool is te ontbinden in een $y$-component $p \cos \varphi$ en een $x$-component $p \sin \varphi$ voor de eene en $-p \sin \varphi$ voor de andere groep. De $y$-componenten vormen een volledig cubisch net en hun onderlinge energie is dientengevolge nul. Door het uitwendige veld $H_e$ heeft elk een energie $pH_e \cos \varphi$ en dus de dipolen te samen $\frac{p}{d^3} H_e \cos \varphi$ per volume-eenheid. Ook de wederkeerige energie van de $x$-dipolen en die der $y$-dipolen is nul wegens de cubische rangschikking van deze laatste. Blijft dus nog te berekenen de onderlinge energie van alle $x$-componenten. Om deze te bepalen denken wij ons de $x$-componenten van de dipolen der tweede helft van teeken omgekeerd.

Dan zijn alle gelijk gericht en hunne onderlinge energie is nul. Keert men nu de dipolen weer om dan verandert alleen de wederkeerige energie der beide helften van teeken. De gezochte energie van alle dipolen te zamen is dus gelijk aan twee maal de wederkeerige energie van beide groepen. Wij zullen nu deze met behulp van (2) berekenen.

Noem de potentiaal die eenheidspolen in de eerste helft geplaatst veroorzaken $V$, dan is de energie van een magneetje met moment $-p \sin \varphi$ in het veld van de eerste helft met dipolen $p \sin \varphi$ volgens het voorgaande

$$p^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

of per volume eenheid

$$\frac{p^2}{2d^3} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

De totale energie per volume-eenheid is dus voor het stelsel

$$-\frac{p}{d^3} H_e \cos \varphi + \frac{p^2}{d^3} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De tweede afgeleide naar $\varphi$ van deze uitdrukking is voor $\varphi = 0$

$$\frac{p}{d^3} H_e + \frac{2p^2}{d^3} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

De energie is dus een minimum en het evenwicht stabiel zoolang dit positief is. Voor het grensgeval is

$$H_g = -2p \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

De coërcitiefkracht wordt dus

$$H_c = \frac{p}{3d^3} + 2p \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2p \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

het laatste volgens (3), waarbij $abc = 2d^3$ is.

Wanneer deze formule een negatieve waarde levert is een positief veld sterker dan $-H_c$ noodig om den stand $\varphi = 0$ stabiel te maken. Voor een zwakker veld vinden wij den evenwichtsstand uit de eerste afgeleide van (3):

$$H \sin \varphi + 2p \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

of

$$\cos \varphi = -H / 2p \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

De magnetisatie is daarbij $I = \dfrac{p \cos \varphi}{d^3} = -\dfrac{1}{2d^3 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}} H = \beta$. Het magnetische veld binnen den bol is $H - \frac{1}{3} I = H(1 - \frac{1}{3}\beta)$ en de inductie $H + I = H(1 + \beta)$. De constante permeabiliteit van de stof is dus

$$\mu = \frac{1 + \beta}{1 - \frac{1}{3}\beta} = \frac{\dfrac{d^3 H_c}{p} + \frac{2}{3}}{\dfrac{d^3 H_c}{p} - \frac{2}{3}}.$$

Bij de regelmatige verdeelingen in twee groepen die wij in 3 besproken hebben kan men verder steeds $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ berekenen, volgens de

in 2 gevonden reeks en de betrekking (2), waarbij men in sommige gevallen de $x$ en $z$ as over een hoek van 45° draaien moet of de $x$, $y$, en $z$ as moet omwisselen. De reeks blijkt steeds sterk te convergeeren, voor de volgende getallen was slechts in één geval de berekening van 8 termen noodig.

De onderstaande tabel geeft de op deze wijze voor $H_c$ berekende waarden.

Voor de gevallen waarin het net labiel is, is de permeabiliteit in de labiele richting aangegeven. In de derde tot vijfde kolom zijn de bij de berekening gebruikte waarden van $a$ $b$ en $c$ vermeld.

| Net | Afwisselende vlakken | $\frac{a}{d}$ | $\frac{b}{d}$ | $\frac{z}{d}=\frac{c}{2d}$ | $\frac{H_c}{M}$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cubisch | 111 | | | | $^1/_3$ | |
| | | | | | +1.104 | |
| | 010 | 1 | 1 | 1 | −0.0521 | 14 |
| | | | | | −0.0521 | 14 |
| | | | | | +0.546 | |
| | 011 | 1 | $\sqrt{2}$ | $^1/_2\sqrt{2}$ | +0.546 | |
| | | | | | −0.0925 | 3.2 |
| Gecentreerd Cubisch | 111 | | | | $^1/_3$ | |
| | | | | | +0.440 | |
| | 011 | 1 | $\sqrt{2}$ | $^1/_2\sqrt{2}$ | +0.440 | |
| | | | | | +0.1209 | |
| Vlak-gecentreerd Cubisch | 111 | | | | $^1/_3$ | |
| | | | | | +0.668 | |
| | 001 | $^1/_2\sqrt{2}$ | $^1/_2\sqrt{2}$ | $^1/_2$ | +0.1610 | |
| | | | | | +0.1610 | |

Hierbij valt op te merken, dat voor de drie telkens optredende gevallen met gelijke waarden van $a$, $b$ en $c$, slechts één berekening noodig was. Men kan deze n.l. ook opvatten als bij één zelfde verdeeling in twee groepen te behooren, maar met het uitwendige veld achtereenvolgens in de drie assenrichtingen. Volgens (5) zullen de drie daarbij behoorende waarden van $H_c$ te zamen gelijk aan $\frac{p}{d^3}=M$

zijn. Bovendien zijn wegens symmetrie telkens twee daarvan aan elkaar gelijk, zoodat slechts één berekend behoeft te worden. De kleinste waarde van $H_c$ voor ieder net is vet gedrukt, de andere hebben slechts beteekenis voor de berekening. Het gecentreerde en het vlak-gecentreerde net vertoonen dus wel coërcitief kracht, en zelfs een, die voor staal bijv. veel te groot is.

Bij al onze beschouwingen hebben wij afgezien van de warmtebeweging. De hier gevonden magnetische eigenschappen worden blijkbaar steeds voorgesteld door magnetisatie-krommen die uit rechte stukken bestaan. Deze gebroken rechte lijnen zullen door de warmtebeweging ongetwijfeld afgerond worden, en daardoor meer op de waargenomene gaan lijken. Een andere oorzaak voor de afronding is te zoeken in het feit dat de werkelijke materialen aggregaten van in alle richtingen geöriënteerde kristallen zijn. Voor het effect hiervan willen wij voorloopig naar de bekende beschouwingen van Pierre Weiss verwijzen.

*Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

*Utrecht,* <br>
*Groningen,* } September 1918.

**Natuurkunde**. — De Heer H. A. LORENTZ biedt namens de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER een mededeeling aan: „*Over de theorie der Brownsche beweging*”.

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

De Heer J. D. v. d. WAALS Jr. heeft in deze Verslagen [1]) een nieuwe theorie der Brownsche beweging ontwikkeld. Wij zullen in deze mededeeling doen zien, dat hij bij zijne beschouwingen van verschillende onjuiste onderstellingen en stellingen gebruik maakt.

§ 1. VAN DER WAALS gaat uit van de bewegingsvergelijking van een Brownsch deeltje in den vorm:

$$\ddot{x} = w(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hierin is $w(t)$ de kracht die het deeltje ondervindt van de molekulen van de vloeistof. De kracht $w(t)$ is een aan het toeval onderworpen grootheid.

Om nu tot een theorie der Brownsche beweging te geraken voert v. d. WAALS de onderstelling in dat $\dot{x}_0 w(t)$ — het product van de snelheid op den tijd nul en de kracht op den tijd $t$ — „over alle deeltjes gemiddeld” [2]) nul is.

Men kan nu op twee wijzen middelen nl.:

*a*. bij gegeven beginsnelheid $\dot{x}_0$, dan is $\overline{w(\vartheta)} = 0$.

*b*. bij alle mogelijke beginsnelheden, waarbij de Maxwellsche snelheidsverdeeling in aanmerking genomen moet worden. De Heer v. d. WAALS bedoelt het middelen volgens de laatste wijze. Wij zullen ook nagaan waartoe de onderstelling voert als men daarbij de eerste wijze van middelen toepast en aantoonen dat zoowel middelen volgens (*a*), als het middelen gelijk v. d. WAALS dat bedoelt tot onmogelijke uitkomsten voert.

Daartoe schrijven we de eerste integraal van (1) op, die luidt

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \int_0^t w(\vartheta)\, d\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Middelen wij volgens (*a*) dan komt er

$$\overline{\dot{x}} = \dot{x}_0,$$

[1]) Deze versl. Deel XXVI. 1918. p. 1319.

[2]) cf. pag. 1323 van geciteerde verhandeling.

hetgeen physisch een onmogelijk resultaat is.

Verheffen wij (2) in het quadraat en middelen wij volgens ($a$) dan komt er

$$\overline{\dot{x}^2} = \dot{x}_0^2 + \overline{\left\{ \int_0^t w(\vartheta)\, d\vartheta \right\}^2}$$

een resultaat dat gelijk men onmiddellijk inziet, in strijd is met het theorema der aequipartitie, daar het gemiddelde in het tweede lid essentieel positief is, zoodat als bijv. $\dot{x}_0^2$ grooter dan de aequipartitiewaarde is, dat met $\overline{\dot{x}^2}$ ook het geval zou zijn. Middelt men het quadraat van (2) in de onderstelling ($b$) dan vindt men

$$\overline{\dot{x}^2} = \overline{\dot{x}_0^2} + \overline{\left\{ \int_0^t w(\vartheta)\, d\vartheta \right\}^2}$$

Daar nu $\overline{\dot{x}_0^2}$ in dit geval de aequipartitiewaarde heeft zou thans $\overline{\dot{x}^2}$ essentieel grooter dan deze waarde zijn, hetgeen een tegenstrijdigheid inhoudt, daar het gemiddelde quadraat der snelheid op elk oogenblik gemiddeld over alle deeltjes gelijk moet zijn.

Van der Waals heeft van de tweede integraal van (1) n.l.

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \int_0^t w(\vartheta)\,(t-\vartheta)\, d\vartheta$$

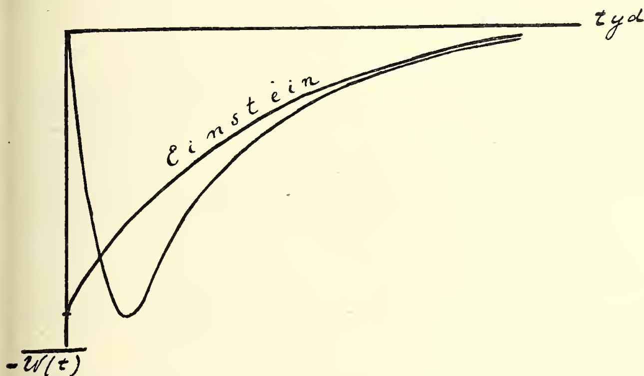
gebruik gemaakt om tot zijn theorie te komen. Op dezelfde wijze als boven kan men aantoonen dat deze gecombineerd met zijn onderstelling $\overline{\dot{x}_0\, w(t)} = 0$ tot onjuiste — met theorie en waarneming strijdige — resultaten voert. Maakt men nl. $\overline{x-x_0} = \overline{\Delta^2}$ op, dan levert onderstelling ($a$)

$$\overline{\Delta^2} = \dot{x}_0^2\, t^2 + \overline{\left\{ \int_0^t w(\vartheta)\,(t-\vartheta)\, d\vartheta \right\}^2}.$$

Daar nu het gemiddelde in het tweede lid positief is zal de hoogste macht van $t$ die in $\overline{\Delta^2}$ voorkomt minstens 2 zijn, dientengevolge is de onderstelling van v. d. Waals in strijd met de formule $\overline{\Delta^2} = bt$, die hij zelf toepast (pg. 1322 l.c.) Middelt men volgens ($b$) dan is het eenige verschil dat $\dot{x}_0^2$ door het gemiddelde snelheidsquadraat bij aequipartitie vervangen moet worden, zoodat ook bij het middelen volgens van der Waals de door hem gebruikte formule met zijn onderstelling $\overline{\dot{x}_0 w(t)} = 0$ gecombineerd tot een onjuist resultaat

voert. Behalve de negatieve conclusie, dat de theorie van v. D. WAALS te verwerpen is, kan aan onze berekeningen toch ook eenig positief resultaat ontleend worden.

De formule (1) is even vanzelf sprekend als juist, de onderstelling $\overline{\dot{x}_0 w(t)} = 0$ moet dus foutief zijn, en men ziet gemakkelijk in dat alles terecht komt wanneer deze grootheid voor bepaalde waarden van $t$ negatief kan worden. Wij zullen ons in deze paragraaf verder van het middelen volgens ($a$) bedienen. Daar $\dot{x}_0$ nu eens voor al gegeven is leert de bovenstaande beschouwing, dat $\overline{w(t)}$ voor zekere waarden van $t$ het tegengestelde teeken van $\dot{x}_0$, moet bezitten [1]. Nu heeft VAN DER WAALS er terecht op gewezen, dat volgens de statistische mechanica voor $t = 0$, $\overline{w(t)} = 0$ is. Verder is het evident dat voor $t$ oneindig de gemiddelde waarde van $w(t)$ geen invloed van $\dot{x}_0$ ondergaat en dus nul moet zijn. Het verloop van $w(t)$ kan men zich dus denken op een wijze zoo als die in nevenstaande figuur is




voorgesteld (waarbij $\dot{x}_0$ positief gesteld is). Natuurlijk kan het verloop van de kromme ingewikkelder zijn en zou $\overline{w(t)}$ om de as kunnen slingeren. Berekent men nu $\overline{w(t)}$ volgens de formule van EINSTEIN-LANGEVIN dan vindt men als men in aanmerking neemt dat $\overline{F(t)}$ gelijk aan nul is:

$$w(t) = -\overline{\beta \dot{x}} + \overline{F(t)} = -\beta e^{-\beta t}\, \dot{x}_0$$

[1]) Er zijn gevallen waar dit niet noodzakelijk is volgens het vorige, doch als $\dot{x}_0$-grooter dan de aquipartitiewaarde is, is het zeker het geval.

Voor $t = 0$ wijkt de lijn, die dit verloop voorstelt van de ware kromme af. De groote overeenstemming die tusschen het experiment en de theorie van EINSTEIN bestaat, doet nu vermoeden dat de ware $w(t) - t$ kromme en de kromme volgens EINSTEIN slechts gedurende korte tijden na het vertrekken van het deeltje met de snelheid $\dot{x}_0$ van elkaar afwijken, dat dus het maximum in de ware kromme dicht bij $t = 0$ ligt, en dat zij vanaf dit maximum vrijwel exponenteel volgens de kromme van EINSTEIN daalt. Natuurlijk zijn dit slechts beweringen, die een berekening der ware $\overline{w(t)}$ kromme uit de molekulaire theorie bevestigen moet. Wij meenen echter dat het de moeite waard is op deze mogelijke interpretatie van EINSTEIN's geniale greep in de theorie der Brownsche beweging te wijzen.

§ 2. De theorie van VAN DER WAALS berust verder op de stelling dat de grootheid

$$\overline{w(t)\int_0^t w(\vartheta)\,(t-\vartheta)\,d\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

essentieel negatief is mits $t$ niet te klein wordt genomen.

Het is wellicht na het bovenstaande niet geheel overbodig te doen zien dat deze stelling onjuist is; vooral daar een soortgelijke integraal door een onzer gebruikt op dezelfde wijze kan worden behandeld [1]).

Wanneer $w(t)$ een door het toeval bepaalde functie is, waarvan het karakter niet van den tijd afhangt, kunnen wij haar voor een groot interval door een FOURIER-reeks voorstellen de coefficiënten der FOURIER-reeks bepalen den aard van het toevallige gedrag [2]). Zij dus

$$w(t) = \Sigma_n \left( A_n \sin \frac{2\pi n t}{T} + B_n \cos \frac{2\pi n}{T} t \right),$$

wanneer $\overline{w(t)} = 0$ moet $B_0 = 0$ zijn.

De berekening van (3) wordt eenvoudiger wanneer we toepassen dat

---

1) Vergelijk L. S. ORNSTEIN. Over de BROWN'sche beweging. Deze verslagen, XXVI, 1917. p. 1009.

2) Wanneer men met een door het toeval bepaalde functie te doen heeft, kan nog zeer wel het gedrag van deze functie van den tijd afhangen. Beschouwt men bijv. den bij de BROWN'sche beweging afgelegden weg dan geldt voor alle tijden $\overline{\Delta} = 0$ doch $\overline{\Delta^2} = bt$, voor de snelheid daarentegen geldt $\overline{v} = 0$. $\overline{v^2} =$ constant onafhankelijk van den tijd. Voor de kracht moet men wel iets dergelijks als voor de snelheid onderstellen. Door nader in te gaan op het mechanisme der beweging kan men dit plausibel maken.

$$\int_0^t w(\vartheta)\,(t-\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^t dt \int_0^t w(\vartheta)\,d\vartheta$$

of daar het nulpunt van den tijd willekeurig is kan men dit vervangen door

$$\int_\xi^{t+\xi} w(\vartheta)\,(t+\xi+\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^t dt \int_\xi^{t+\xi} w(\vartheta)\,d\vartheta.$$

De middelwaarde in kwestie kan nu worden voorgesteld door

$$\overline{w(t) \int_0^t w(\vartheta)\,(t-\vartheta)\,d\vartheta} = \frac{1}{T} \int_0^T d\xi\, w(\xi+t) \int_0^t dt \int_\xi^{t+\xi} w(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Ter vereenvoudiging kan de tijdseenheid zoo gekozen worden dat de tijd $T$ gelijk aan $2\pi$ is, wij vinden dan

$$\int_\xi^{\xi+t} w(\vartheta)\,d\vartheta = \sum_n \left[ -\frac{A_n}{n} \{\cos n(t+\xi) - \cos n\,\xi\} + \frac{B_n}{n} \{\sin n(t+\xi) - \sin n\xi\} \right]$$

dat nog eens naar $t$ van $o$ tot $t$ geïntegreerd geeft

$$\sum_n \left[ -\frac{A_n}{n^2} \{\sin n(t+\xi) - \sin n\xi\} + \right.$$
$$\left. + \frac{A_n}{n}\, t \cos n\xi - \frac{B_n}{n^2} \{\cos n(t+\xi) - \cos n\xi\} - \frac{B_n}{n}\, t \sin n\xi \right].$$

Deze uitdrukking moet vervolgens vermenigvuldigd worden met $w(t+\xi) = \sum_n \{A_n \sin n\,(t+\xi) + B_n \cos n(t+\xi)\}$ en daarna geintegreerd naar $\xi$ van nul tot $2\pi$. Daarbij vallen alle termen van het product waarin $n$ ongelijke waarden heeft weg. Ten slotte wordt de gezochte gemiddelde waarde gegeven door

$$\overline{w(t) \int_0^t w(\vartheta)\,(t-\vartheta)\,d\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \sum \left( -\frac{C^2_n}{n} + \frac{C^2_n}{2n^2} \cos nt + \frac{C^2_n}{2n}\, t \sin nt \right)$$

waarbij $C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$. Men kan op de gebruikelijke wijze deze som in een integraal omzetten, waarbij dan de gewone middelwaarde $\frac{C_n^2}{2\pi}$ door $f(n)$ wordt voorgesteld. [1]) Voor de gezochte middelwaarde vindt men op deze wijze

[1]) Door PLANCK, EINSTEIN, LAUE e.a. zijn voor de discussie van toevallige grootheden (of hunne middelwaarden) reeksen van FOURIER toegepast.

$$\int_0^\infty \frac{f(n)}{2n^2} (nt \sin nt + \cos nt - 1)\, dn$$ [1].

Het teeken van deze integraal kan nu nog voor grootere waarden van $t$ geheel willekeurig gemaakt worden door $f(n)$ geschikt te kiezen, dat het daar essentieel negatief zou zijn is dus onjuist. [2])

§ 3. In de geciteerde mededeeling van ORNSTEIN is de eerste theorie der Brownsche beweging zooals die door Mej. Dr. SNETHLAGE en J. D. v. D. WAALS Jr. ontwikkeld is gekritiseerd op grond van het feit dat zij met het theorema der aequipartitie in strijd is.

Daarbij is de stelling gebruikt dat

$$\overline{\left\{ \int_0^t w(\xi) \sin \varrho (t-\xi)\, d\xi \right\}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

evenredig is met $t$. Hierin is $w(\xi)$ een van het toeval onderworpen functie, waarvoor de gemiddelde waarde nul is [3]). In een noot zegt VAN DER WAALS: „Deze teekenwissel (van $w(\theta)$ $w(\theta+\vartheta)$) is door ORNSTEIN over het hoofd gezien. Tengevolge hiervan komt hij tot de merkwaardige conclusie, dat het niet geoorloofd is aan te nemen, dat $\frac{d}{dt}\ \overline{u^2}=0$. Want hieruit volgt volgens zijn berekening dat $\overline{u^2}$ niet constant is doch de som van een lineaire en een periodieke functie van $t$!"

Daartegenover moet worden opgemerkt, dat de differentiaal vergelijking [4]) van v. D. WAALS-SNETHLAGE n.l.

---

[1]) Voor $t=\infty$ wordt deze uitdrukking gelijk aan $\frac{t}{4} f(0)$, is dus essentieel positief ($f$ is n.l. essentieel positief).

Voor zeer groote waarden van $t$ kan men eischen dat de middelwaardo $\varphi(t)$ is, dan krijgt men voor

$$\frac{f(n)}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \sin n\lambda\, d\lambda$$

voor zeer kleine waarden van $t$ is de middelwaarde ook positief.

[2]) Het bewijs dat v. D. WAALS van de bestreden stelling geeft door $\overline{\Delta^2}$ te differentieeren (p. 1331 van zijn mededeeling) is onjuist gelijk wij op een andere plaats zullen aantoonen, in een uitvoerige studie over frequentiefuncties.

[3]) Vergelijk ORNSTEIN, deze versl. XXVI. p. 1009.

[4]) De vergelijking die door beide schrijvers als een differentiaal vergelijking behandeld wordt, geldt niet gelijk zij onderstellen voor willekeurige tijden, doch slechts bij den aanvang van de beweging, vergelijk ORNSTEIN en ZERNIKE, deze versl. XXVI. p. 1229.

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\varrho^2 u + w \qquad \overline{w} = 0 \text{ (bij } \dot{u}_0 \text{ en } u_0 \text{ gegeven)}$$

tot onjuiste resultaten voert. Want men heeft volgens hun vergelijking.

$$\overline{u^2} = \left(u_0 \cos \varrho t + \frac{\dot{u}_0}{\varrho} \sin \varrho t\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \overline{\left\{ \int_0 w(\xi) \sin \varrho(t-\xi)\, d\xi \right\}^2}$$

en gelijk wij hieronder nog eens bewijzen zullen is de laatste middelwaarde evenredig met $t$. Uit de onderstellingen van VAN DER WAALS en Mej. SNETHLAGE volgt dus werkelijk het merkwaardige resultaat dat de snelheid van een Brownsch deeltje in het oneindige zou toenemen.

Het bewijs der stelling dat (5) evenredig is met $t$, dat weinig afwijkt van een reeds in ander verband door PLANCK gegeven afleiding loopt als volgt.

De integraal kan geschreven worden in den vorm

$$\overline{\int_0^t\int_0^t W(\xi)\, W(\eta) \sin \varrho\, (t-\xi) \sin \varrho(t-\eta)\, d\xi\, dy.}$$

Of als wij het integreeren en middelen verwisselen

$$\int_0^t\int_0^t \overline{W(\xi)\, W(\eta)} \sin \varrho(t-\xi) \sin \varrho(t-\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Voeren wij nu in $\eta = \xi + \psi$, dan gaat onze uitdrukking over in

$$\int_0^t d\xi \sin \varrho(t-)\xi \int_{-\xi}^{t-\xi} \overline{W(\xi)\, W(\xi+\psi)} \sin \varrho(t-\xi-\psi)\, d\psi$$

Hierin voeren wij voor $W$ weder een reeks van FOURIER in waarbij daar $\overline{W} = 0$ genomen wordt, $B_0 = 0$ genomen moet worden.

Wij vinden dan voor de middelwaarde

$$\overline{W(\xi)\, W(\xi+\psi)} = \sum_n (A^2{}_n + B^2{}_n) \cos \frac{2\pi}{T} n\psi$$

Zoodat de integraal in kwestie indien wij ter vereenvoudiging $\frac{2\pi n}{T} = \varrho_n$ stellen wordt

$$\int_0^t \sin \varrho\, (t-\xi) d\xi \int_{-\xi}^{t-\xi} \sum_n (A_n{}^2 + B_n{}^2) \sin \varrho\, (t-\xi-\psi) \cos \varrho_n\psi\, d\psi =$$

$$= \sum (A_n{}^2 + B_n{}^2) \int_0^t \sin \varrho(t-\xi) d\xi \int_{-\xi}^{t-\xi} \sin \varrho(t-\xi-\psi) \cos \varrho_n\psi\, d\psi.$$

Bij de berekening van deze integralen behoeft men slechts rekening te houden met termen, die de hoogste macht van $\varrho - \varrho_n$ in den noemer krijgen, daar deze slechts noemenswaard tot het resultaat bijdragen. Voert men de volkomen elementaire berekening uit dan komt men tot het resultaat

$$\overline{\left\{ \int_0^t W(\xi) \sin \varrho (t-\xi) d\xi \right\}^2} = \sum_n \frac{\sin^2 \frac{\varrho - \varrho_n}{2} t}{(\varrho - \varrho_n)^2} (A_n^2 + B_n^2)$$

Wanneer $\varrho t$ groot is kan men hiervoor schrijven

$$(A^2 + B^2) \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\varrho - \varrho_n}{2} t}{(\varrho - \varrho_n)^2} d\varrho_n = (A^2 + B^2) \frac{t\pi}{4};$$

waarin $A$ en $B$ de coefficienten zijn van de termen der reeks waarvoor $\varrho_n = \varrho$ dus $\frac{2\pi n}{T} = \varrho$, of beter het zoo dicht mogelijk daarbij gelegen geheelė getal.

Zoolang $A^2 + B^2$ van nul verschilt is de waarde van het gemiddelde in kwestie evenredig met den tijd. Is $A^2 + B^2$ *streng* nul dan geldt dit niet, doch er is geen enkele reden te onderstellen, dat bij de Brownsche beweging in de Fourier-reeks juist de term waarvan de frequentie door $\varrho$ bepaald wordt ontbreekt. Doch zelfs als zij ontbreken mocht zou men op grond van de onderstellingen van v. d. Waals en Mej. Dr. Snethlage tot het onwaarschijnlijke resultaat komen dat de middelbare waarde van de snelheid van een Brownsch deeltje de aequipartiewaarde nimmer bereikt.

§ 4. In de verhandeling van v. d. Waals wordt betoogd dat de afleiding van Langevin een inwendige inconsequentie zou bevatten. Deze inconsequentie zou in de theorie die Mevr. Dr. de Haas—Lorentz op den grondslag van de formule van Einstein heeft uitgewerkt niet voorkomen. Daar nu het uitgangspunt volgens Einstein en dat van Langevin identiek zijn, zou het verwonderlijk zijn als de eene theorie wel de andere niet inwendig inconsequent zou zijn, tenzij dan Langevin grove rekenfouten gemaakt zou hebben. Dit is echter niet het geval, indien men de grondslagen formuleert gelijk dit in de mededeeling van Ornstein geschiedt is, bestaat er geen tegenspraak. Zoowel de theorie van Einstein als die van Langevin berust op de volgende onderstellingen:

$$\frac{du}{dt} = - wu + F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

$$\overline{F} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\beta)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\xi)\,F(\xi+\psi)}\,d\psi = \frac{kT}{m}\,\beta = \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\gamma)$$

mits men uitgaat van deeltjes die op den tijd $t=0$, de snelheid $u_0$ hadden.

Aanvaarden wij dit kinetisch niet bewezen stel vergelijkingen dat echter de in § 1 uiteengezette inconsequentie inhoudt dan komt men *verder* tot geen tegenspraak.

Van der Waals heeft deze gezocht in de vergelijking die ontstaat wanneer men (2) met $u$ vermenigvuldigt en middelt, hij heeft geschreven [1])

$$\overline{u\frac{du}{dt}} = -w\overline{u^2}$$

hetgeen inderdaad onjuist is, doch daarbij vergeten dat $\overline{Fu}$ niet nul is, als men zich op het standpunt der onderstellingen 6 ($\alpha$, $\beta$ en $\gamma$) plaatst; gelijk Ornstein op p. 1011 van zijn mededeeling heeft aangetoond. Voert men voor $\overline{uF}$ de daar gevonden waarde in dan neemt de vergelijking den vorm

$$\overline{u\frac{du}{dt}} = \beta\left(u_0^2 - \frac{\vartheta}{2\beta}\right)e^{-2\beta t}$$

aan. Voor tijden groot t. o. z. van $\dfrac{1}{\beta}$ is dit nul, terwijl het gemiddeld over alle deeltjes steeds nul is daar $\overline{u_0^2} = \dfrac{\vartheta}{2\beta}$.

Nu wordt in het bewijs van Langevin ondersteld dat $\overline{xF}=0$ is. Men zou wellicht kunnen denken, dat ook deze grootheid niet gelijk aan nul is [2]). Doch dit is niet het geval. Men heeft toch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt} + F$$

dus

$$x = x_0 + \frac{u_0}{\beta}(1-e^{-\beta t}) + \int_0^t e^{-\beta\xi}\,d\xi \int_0^\xi e^{\beta\eta}\,F(\eta)\,dy$$

dus

---

[1]) Langevin heeft geen beschouwingen ontwikkeld die de onderstelling $\overline{Fu}=0$ bij hem doen vermoeden.

[2]) Op het feit dat $\overline{xF}=0$ berust de zeer eenvoudige theorie die Langevin van de Brown'sche beweging gegeven heeft.

$$\overline{Fx} = [x_0 + \frac{u_0}{\beta}(1-e^{-\beta t})]\overline{F} + \overline{F\int_0^t e^{-\beta\xi} d\xi \int_0^\xi e^{\beta\eta} F(\eta) dy}$$

De eerste term is nul volgens (6,$\beta$), voor den tweeden term kan men door partieele integratie schrijven

$$-\frac{1}{\beta}\overline{F(t) e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta\eta} F(\eta)\, dy} - \overline{F(t)\int_0^t F(\eta)\, dy}.$$

De beide laatste integralen zijn aan elkander gelijk, daar $F(t) F(\eta)$ slechts als $\eta$ in de onmiddellijke nabijheid van $t$ ligt, van nul verschilt. De waarde van beide integralen is, gelijk op p. 1011 van de mededeeling van ORNSTEIN bewezen is, $\frac{\vartheta}{2}$.

Het blijkt dus wel dat van inwendige tegenstrijdigheid geen sprake is, en dat slechts de door de aanvangstijden onjuiste onderstelling omtrent $W(t)$ aan de theorie van EINSTEIN en LANGEVIN als een fout aankleeft. Gelijk wij in § 1 van deze mededeeling hebben doen zien behoeft slechts gedurende een zeer korten tijd de waarde, die volgens de formule van EINSTEIN voor de gemiddelde kracht bij gegeven tegensnelheid $\overline{W(t)}$ verkregen wordt af te wijken van de ware waarde van deze grootheid. Het feit dat EINSTEIN's formule tot resultaten voert die met de werkelijkheid goed overeenstemmen, wekt het sterke vermoeden dat de betrekking

$$\overline{W(t)} = -\beta \dot{x}_0\, e^{-\beta t}$$

met zeer goede benadering reeds geldt zeer korten tijd na het tijdstip waarop alle emulsiedeeltjes de snelheid $\dot{x}_0$ bezitten. Een nadere kinetische theorie van de Brown'sche beweging zal wellicht van dit feit rekenschap kunnen geven.

*Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

*Utrecht,* Sept. 1918.

**Natuurkunde**. — De Heer LORENTZ biedt, namens de Heeren J. J. HAAK en R. SISSINGH een mededeeling aan: „*Experimenteel onderzoek naar den aard der oppervlakte-lagen bij de terugkaatsing door kwik en naar een verschil in de optische geaardheid van vloeibaar en vast kwik*".

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES).

1. *Inleiding*. Sedert L. LORENZ [1]) in 1860 de onderstelling opwierp, dat de elliptische polarisatie bij de terugkaatsing door doorschijnende lichamen het gevolg is van een geleidelijken overgang tusschen de beide aan elkaar grenzende middenstoffen en dit denkbeeld theoretisch uitwerkte, is de invloed dezer oppervlakte-lagen, zoowel bij de terugkaatsing door doorschijnende lichamen als metalen meermalen theoretisch onderzocht [2]). Er zijn echter slechts weinig experimenteele onderzoekingen verricht naar den aard dezer oppervlaktelagen en onze kennis daarvan beperkt zich tot minder of meer waarschijnlijke onderstellingen. Steeds wordt groote invloed toegekend aan het slijpen en polijsten, zoomede aan het slijp- en polijstmiddel zelve, waarmede deze bewerkingen geschieden. Een onderzoek van RAYLEIGH leert echter, dat men nog niet in staat is aan te geven, op welke wijze deze invloed ontstaat [3]).

Ook is vele malen een invloed der verdichte gaslagen ondersteld en onderzocht [4]). Echter heeft men tot nu den invloed eener verdichte gaslaag niet kunnen aantoonen.

2. *Doel van het onderzoek*. Ten einde de optische constanten van een metaal, geheel onafhankelijk van het slijpen en polijsten en de hiervoor gebruikte middelen te verkrijgen, werd kwik voor dit onderzoek gekozen. Zoowel het vloeibare kwikzilver als een spiegel van vast kwik kan worden onderzocht. Tevens blijkt alsdan of bij den overgang van vloeibaar tot vast kwik de optische constanten eene wijziging ondergaan. Bij het onderzoek van het vloeibare kwik vestigde zich evenwel de indruk, dat de luchtlagen, welke op het oppervlak verdicht worden, een merkbaren invloed op de elliptische

[1]) L. LORENZ, Pogg. Ann., **111**, 460, 1860; **114**, 238, 1861.

[2]) C. A. VAN RIJN VAN ALKEMADE, Proefschrift, Leiden, 1882; Wied. Ann., **20**, 22, 1883. P. DRUDE, Wied. Ann., **43**, 126, 1891; R. C. MAC LAURIN, Proc. Roy. Soc., (A), **76**, 49, 1905.

[3]) RAYLEIGH, Proc. Roy. Inst., **16**, 563, 1901.

[4]) J. J. SEEBECK, Pogg. Ann., **20**, 35, 1830; P. GLAN, Wied. Ann., 11, 464, 1880; R. SISSINGH, Proefschrift, Leiden, 1885; Arch. Néerl., 20, 171, 1886.

polarisatie bij de terugkaatsing uitoefenen, zoodat in de eerste plaats deze invloed nader is onderzocht.

3. *De gebruikte monochromator.* De bepaling der optische constanten geschiedde op geheel overeenkomstige wijze, als door een onzer is aangegeven [1]). Voor het onderzoek is gebruik gemaakt van een goniometer, waarvan de verdeelde cirkel vertikaal kan worden geplaatst. Vóór den goniometer bevindt zich een monochromator van zeer eenvoudigen bouw, die uit hulpmiddelen, in het laboratorium aanwezig, werd samengesteld. De monochromator bestaat uit een collimator met opening 1 : 6, een flintglas prisma van STEINHEIL met brekenden hoek van 60° en een tweeden collimator, die in het vervolg als de collimator van den goniometer aangeduid zal worden. De verlichting geschiedt met een booglamp van 18 Ampère. Eene lens van 7 dioptrieën vormt een beeld van den krater op de spleet van den collimator van den monochromator. Achter het prisma ontwerpt eene lens van 11 dioptrieën een spectrum op den collimator van den goniometer. De assen der beide collimatoren staan horizontaal, de collimatorspleten en de brekende ribbe van het prisma vertikaal. Er is steeds voor gezorgd, dat het kraterbeeld en het spectrum op het midden der collimatorspleten vallen. Aan den collimator van den goniometer is een verzilverde glazen spiegel bevestigd, die om een horizontale as kan draaien en een monochromatischen, cilindrischen lichtbundel onder den gewenschten invalshoek werpt op den spiegel in het midden van den goniometer. De golflengte der gebruikte stralen ligt tusschen 5790 en 5990 Ångström-eenheden. Meermalen wordt gedurende de waarnemingen de onveranderlijkheid van deze kleurschifting van den gebruikten lichtbundel nagegaan. De strepen in den compensator van BABINET zijn steeds ongekleurd. Monochromator en goniometer zijn op eene vaste fundeering, vrij van den vloer in het vertrek, waarin de waarnemingen verricht zijn, opgesteld. De drie voetschroeven van den goniometer staan, om den invloed van dreuningen op het vloeibare kwikoppervlak zooveel mogelijk tegen te gaan, ieder op twee dikke stukken gom-elastiek.

4. *De goniometer.* Voor de stelling en de centreering van de onderdeelen van den goniometer wordt naar het onderzoek van een onzer verwezen [2]). Slechts enkele punten worden hier aangestipt.

---

1) R. SISSINGH, t. a. p.

2) R. SISSINGH, t. a. p.

Het volgende hulpmiddel leverde bij de onderlinge stelling der deelen van den goniometer veel gemak. De slee, waarop de zilverspiegel staat, die voor deze stellingen diende, was bevestigd op een huls, die over een kegelvormigen tap in het midden van den goniometer-cirkel past. Deze tap kan met drie stelschroefjes gericht worden. De spiegel is met de huls op deze wijze gemakkelijk op den goniometer te plaatsen en hiervan te verwijderen [1]).

Als Polarisator is een Nicol met vrij groote, schuine eindvlakken gebruikt, die slechts eene kleine afwijking geeft aan de lichtstralen, welke er doorheen gaan. Deze bedraagt 2′.5.

Voor de stelling van den compensator wordt wederom naar het onderzoek van een onzer [2]) verwezen.

De polarisatievlakken van *ieder* der beide compensatorwiggen wordt in den juisten stand, d. i. evenwijdig aan het invalsvlak en loodrecht hierop gebracht [3]).

Om de verplaatsbare wig in den juisten stand te brengen maakt men gebruik van de beelden der collimatorspleet, die in den kijker achter den goniometer ontstaan. Er ontstaan drie paren spleetbeelden. De beelden van elk paar vallen samen, zoo de zijvlakken der wiggen evenwijdig aan elkander staan. De hoofdstanden der Nicols, waarin hunne polarisatievlakken evenwijdig aan het invalsvlak zijn of loodrecht hierop staan, zijn zoowel in den vertikalen, als in den horizontalen stand van den goniometer-cirkel bepaald. Het azimut van den Polarisator wordt 0 genoemd, zoo het licht, dat de Polarisator doorlaat, loodrecht op het invalsvlak trilt, van den Analysator, zoo de trillingsrichting van het doorgelaten licht evenwijdig is aan het invalsvlak. Achtereenvolgens is in horizontalen en vertikalen stand van den goniometer-cirkel verkregen : gemiddeld

Polarisator in azimut 0° 81°57′, 81°43′; 81°50′.
Analysator „ „ 0° 86°33′, 86°35′; 86°34′ [4]).

De overeenstemming is, met het oog op de onvermijdelijke waarnemingsfouten, goed te achten.

---

[1]) Zie voor uitvoeriger meedeelingen hierover: J. J. HAAK, Proefschrift, Amsterdam, 1918.

[2]) R. SISSINGH, t. a. p.

[3]) Op te merken valt, dat zoowel bij het onderzoek van R. HENNIG, Gött. Nachr. **13**, 365, 1887, als de onderscheidene van P. DRUDE, Wien. Ann., **34**, 489, 1888; **36**, 532, 1889; **39**, 481, 1890, *ondersteld* wordt, dat de hoofdsneden der wiggen loodrecht op elkander staan en dat alleen de hoek tusschen de hoofdsnede der eene wig en het invalsvlak bepaald en in rekening gebracht wordt. Zie hierover SISSINGH, in BOSSCHA, Licht, II, p. 555, noot 2.

[4]) Alle waarnemingen zijn door J. J. HAAK verricht. Zie voor uitvoeriger meedeelingen diens proefschrift, Amsterdam, 1918.

De standen van de verplaatsbare compensatorwig, waarbij het fazeverschil voor den smallen lichtbundel, die tusschen de draadjes vóór de vaste wig doorgaat, achtereenvolgens — $\frac{1}{2}$, 0, + $\frac{1}{2}$ bedraagt, zijn:

63.86; 49.52; 35.10.

Daar de verplaatsingen der wig steeds herleid worden tot de verschuiving tusschen 49.52 en 63.86, komt dus met een fazeverschil $\frac{1}{2}$ of $\pi$ overeen eene verplaatsing 14.34 mM. [1]).

Den invalshoek op het kwikoppervlak leidt men af uit den stand, waarin de kijker van den goniometer horizontaal staat. Deze stand is gelegen midden tusschen de standen, waarin de kijkeras achtereenvolgens evenwijdig loopt aan die van een invallenden en den hierbij behoorenden door een vloeistofoppervlak teruggekaatsten lichtbundel. Deze standen zijn 81°36′ en 104°24′, zoodat de as van den goniometerkijker horizontaal loopt in den stand 81°36′ + + (104°24′—81°36′) : 2 = 93°0′. Als terugkaatsend oppervlak wordt hierbij dat van dikke machineolie gebruikt, omdat hiermee een zuiver spleetbeeld tot stand komt, wat met kwik niet het geval is [2]). De goniometercirkel staat vertikaal, als de as van den invallenden bundel met die van de buis, waarin later de Polarisator komt, samenvalt en na terugkaatsing met de as van den kijker.

5. *Voorafgaand onderzoek over den optischen invloed eener verdichte luchtlaag.* Toen, gelijk reeds in § 2 werd meegedeeld, bij de waarnemingen zich de indruk vestigde, dat de op het kwikoppervlak verdichte luchtlaag optisch werkzaam was, is op een spiegel van zuiver kwik, onmiddellijk na de vorming, de hoofdinvalshoek $I$ en het hoofdazimut $H$ bepaald. Dit geschiedde door het fazeverschil en hersteld azimut voor twee hoeken ter weerszijden van den hoofdinvalshoek uit uitgebreide waarnemingsreeksen te bepalen en uit de verkregen waarden $I$ en $H$ door interpolatie af te leiden [3]).

Er is gevonden $I = 79°18'$, $H = 35°45'$.

Deze bepaling kon binnen drie uren geschieden.

Vroeger was verkregen $I = 78°23'$, $H = 36°18'$, waarbij het kwikoppervlak eenige dagen lang aan de lucht was blootgesteld, doch beschut voor het opvallen van stof, alvorens de waarnemingen geschiedden. In beide gevallen was het kwik in het luchtledig gedistilleerd.

---

[1]) De fazeverschillen worden opgegeven als fazevertragingen t. o. van den lichtvektor in het teruggekaatste licht, loodrecht op het invalsvlak.

[2]) Echter blijven met het kwikoppervlak de compensatorstrepen recht, alleen iets minder scherp begrensd. De nauwkeurigheid van de instelling dezer streep is iets minder dan met een vast oppervlak, n.l. 0.03, in plaats van 0.02.

[3]) R. SISSINGH, t. a. p.

Evenzoo werd met kwik, dat door schudden met kali-loog en salpeterzuur gereinigd en daarna gedroogd was, eenige dagen na de vorming van het kwikoppervlak, gevonden:

$$I = 78°14' \quad , \quad H = 36°12',$$

wat met de tweede bepaling op bevredigende wijze overeenstemt. Het verschil tusschen de beide eerste waarnemingen is juist zooals uit het theoretische onderzoek van DRUDE is af te leiden. Eene oppervlakte-laag verkleint sterk den hoofdinvalshoek en vergroot weinig het hoofdazimut[1]).

De volgende waarnemingen toonen den invloed der luchtlaag duidelijk aan. Het zuivere kwik bevindt zich in een goed gereinigd bakje van LEYBOLD met vlakke evenwijdige zijwanden, als zeer dikwijls voor lichtfilters wordt gebezigd. De waarnemingen zijn verricht bij den invalshoek van 78°, met den Analysator in een azimut van 45°[2]).

| | Instelling van den | |
|---|---|---|
| | Compensator | Polarisator |
| | 56.46[3]) | 43°33′ |

Twee dagen later, gedurende welke het kwik voor stof was beschut,

| | | |
|---|---|---|
| | 56.71 | 43°47′ |

Nadat het kwik in het bakje geschud was en op een nieuw oppervlak was ingesteld,

| | | |
|---|---|---|
| | 56.44 | 43°33′ |
| Na een dag | 56.64 | 43°44′ |
| Na schudden | 56.42 | 43°34′ |

Bij eene volgende reeks waarnemingen, waarbij een zuiver oppervlak werd verkregen door middel der overstortings-methode van RÖNTGEN[4]), welke ook door RAYLEIGH is toegepast, leverden de waarnemingen:

| | Instelling van den | |
|---|---|---|
| | Compensator | Polarisator |
| | 56.43 | 43°44′ |
| Na twee dagen | 56.74 | 43°41′ |
| Na overstorting | 56.45 | 43°37′ |
| Na 1 dag | 56.68 | 43°44′ |
| Na overstorting | 56.45 | 43°50′ |

---

[1]) P. DRUDE, Wied. Ann., **36**, 532, 865, 1889; **43**, 126, 1891.

[2]) Onder dit azimut is de fout in de bepaling van het fazeverschil en hersteld azimut een minimum. Zie R. SISSINGH, Proefschrift, pg. 57; Arch. Néerl., 20, pg. 188.

[3]) Deze en alle verdere getallen zijn telkens de gemiddelden van vier instellingen.

[4]) RÖNTGEN, Wied. Ann., **46**, 152, 1892; RAYLEIGH, Phil. Mag., (5), **30**, 398, 1890.

Daar de polariseerende werking van de zijwanden der glazen bakjes niet is onderzocht, hebben deze getallen geene volstrekte waarde, doch geven zij de verandering door de geadsorbeerde luchtlaag ongetwijfeld goed weer.

6. *Verandering van de grootte en den invloed der laag met den tijd.* Het kan niet anders of de dikte der geadsorbeerde luchtlaag, dus ook hare optische invloed neemt met den tijd toe. Ten einde dezen invloed na te gaan, moeten de instellingen in korten tijd verricht worden. Die van den Polarisator zijn achterwege gelaten, omdat uit § 5 blijkt, dat de invloed der luchtlaag op het hersteld azimut zeer gering is en ongeveer van de orde van grootte der waarnemingsfouten is. Ten einde de waarnemingen in korten tijd te kunnen verrichten, is er slechts bij een invalshoek waargenomen, nl. den hoek 79°46′, die zeer dicht bij den hoofdinvalshoek is gelegen, terwijl ook de Analysator zich steeds in een zelfde kwadrant bevond. De bepaling van het fazeverschil, dat bij de metallieke terugkaatsing tusschen de componenten, loodrecht op en in het invalsvlak trillende, ontstaat, geschiedde alleen door dit fazeverschil op te heffen [1]).

De verschuiving der verplaatsbare compensatorwig was dus uitsluitend van 49.52 → 63.86 (zie § 4). Op deze wijze blijven de fouten, ten gevolge van de afwijking van het licht in den Polarisator en den onjuisten stand van de polarisatievlakken der compensatorwiggen, bestaan, doch hun invloed op de te bepalen kleine verandering is als van de tweede orde te beschouwen. Echter heeft men er vooral voor te zorgen, dat de invallende lichtbundel steeds uit hetzelfde deel van het spectrum wordt genomen en dezelfde richting behoudt, d. i. steeds op het midden der spleet van den goniometercollimator valt. Een kleine verplaatsing van het spectrum, die nog niet de hoogte van het spectrum bedroeg, wijzigde reeds de compensator-instelling met 0.06. Dit is toe te schrijven aan de verandering van den invalshoek. Bij de waarnemingen bevond zich het kwik in een ondiep ijzeren bakje, op den bodem van een bronzen cilinder bevestigd. Twee zijbuizen, door vlakke glazen met evenwijdige zijwanden afgesloten, waarvan de assen in een zelfde meridiaan-vlak van den cilinder liggen, veroorloven het licht onder den gewenschten invalshoek op het kwik te laten vallen. Door een pijpje in het bovenvlak van den cilinder brengt men het kwik in het bakje. Dit cilindrische huisje wordt aan het midden van den goniometercirkel

[1]) Zie SISSINGH, Proefschrift, pg. 79; Arch. Néerl., 20, 196, 1886.

bevestigd. Een vertikale slee veroorlooft het kwikoppervlak zoo te stellen, dat de as van den goniometer hierin ligt. Met een horizontale slee kan men het huisje zoo plaatsen, dat de assen der invallende en teruggekaatste lichtbundels door het midden der glazen vensters gaan. Het huisje kan luchtledig gepompt en met lucht, die door chloor-calcium, zwavelzuur, kalium-hydroxyd en fosforpentoxyd gedroogd is, gevuld worden.

Noemt men de compensator-instelling, onmiddellijk na de vorming van het kwikoppervlak, $c_0$, die, $t$ sekunden later, $c$ en de eindinstelling $c_\infty$, dan leidt een zeer aannemelijke onderstelling over de aangroeiing van de dikte der luchtlaag en haren optischen invloed tot de differentiaal-vergelijking:

$$\frac{d(c-c_0)}{dt} = k(c_\infty - c)$$

Zoodat

$$c-c_0 = (c_\infty - c_0)(1 - e^{-kt}).$$

Hierin zal $k$ evenredig zijn met den luchtdruk. Deze onderstelling wordt bevestigd door waarnemingsreeksen, verricht bij een druk van een en van een halve atmosfeer, die in fig. 1 grafisch zijn voorgesteld. Er zijn zes krommen geteekend voor verschillende waarden van $k$. Uit de getrokken lijnen blijkt duidelijk, binnen welke grenzen de waarde van $k$ voor de beide waarnemingsreeksen ligt. Als waarde van $c_\infty - c_0$ is genomen 0.25, nl. de verandering van de instelling in droge lucht na 24 uur. Wordt het bakje luchtledig gepompt, dan is zelfs na 8 uur geen verandering in de compensator-instellingen aan te toonen. Zie de lijn . . ., welke de waarnemingen in het luchtledig gepompte huisje aangeeft. Hier volgen de gemiddelden van drie waarnemingsreeksen in droge lucht voor een druk van een atmosfeer.

| Tijd | Invalshoek 79°46′ | |
|---|---|---|
| 0 | $C_0 = 56.84$ | $C - C_0$ |
| ½ uur | $C = 56.863$ | 0,023 |
| 1 „ | 56.89 | 0.05 |
| 1½ „ | 56.92 | 0.08 |
| 2 „ | 56.918 | 0.078 |
| 2½ „ | 56.94 | 0.10 |
| 3 „ | 56.965 | 0.125 |
| 3½ „ | 56.975 | 0.135 |
| 4 „ | 56.972 | 0.132 |

| | | |
|---|---|---|
| 4½ uur | 56.97 | 0.13 |
| 5 ,, | 56.992 | 0.152 |
| 5½ ,, | 56.99 | 0.15 |
| 6 ,, | 57.00 | 0.16 |
| 6½ ,, | 57.01 | 0.17 |
| 7 ,, | 57.013 | 0.173 |
| 7½ ,, | 57.03 | 0.19 |
| 8 ,, | 57.03 | 0.19 |

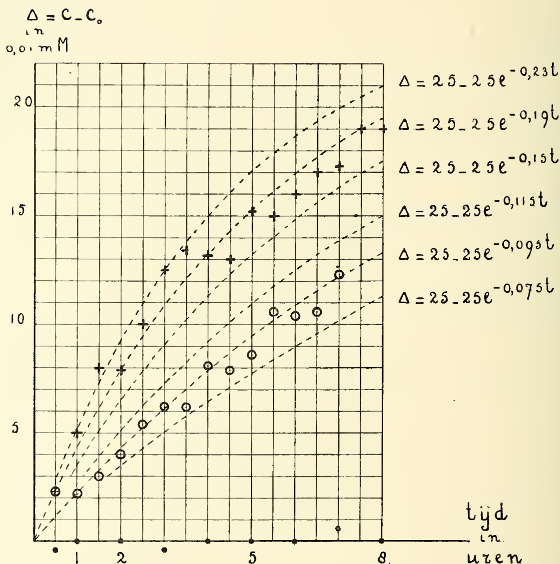



Fig. 1.

Wanneer men bedenkt, dat de fout in de instelling van den compensator 0.03 bedraagt, is de overeenstemming der waarnemingen met de geteekende krommen zeer bevredigend te achten. Daar volgens § 4 een verplaatsing 14.34 der compensatorwig overeenkomt met een fazeverschil van een halven cirkelomtrek, geeft $c_\infty - c_0$ een fazeverschil aan van $0.25 : 28.68 = 0.0087$. Op de volgende wijze kan de hiermee overeenkomende verandering in den hoofdinvalshoek $I$ worden verkregen.

De metingen op zuiver kwik, onmiddellijk na de vorming van den spiegel, gaven :

| Invalshoek | Compensator-instelling | Hoofdinvalshoek |
|---|---|---|
| 78°38′ | 56.24 | 79°18′. |

Waarnemingen bij denzelfden invalshoek op een spiegel met geadsorbeerde luchtlaag, leverden :

| | | |
|---|---|---|
| 78°38′ | 56.90 | 78°19′. |

Hieruit volgt, dat, zoo de compensator-instelling in de buurt van den hoofdinvalshoek met 0.66 vermindert, de hoofdinvalshoek toeneemt met 59′, zoodat uit de waargenomen waarde $c_{\infty} - c_{0} = 0.25$ volgt, dat de geadsorbeerde luchtlaag den hoofdinvalsvlak met 22′.5 verkleint. Het is zeer de vraag of de verandering, welke men bij kristalvlakken, door splijting verkregen, kort na de splijting heeft waargenomen in het fazeverschil tusschen de componenten van het teruggekaatste licht, die loodrecht op en in het invalsvlak trillen, aan luchtlagen toegeschreven moeten worden. Deze verandering vond DRUDE bij versche splijtvlakken van antimoonglans, kalkspaat en klipzout [1]). Bij klipzout moet de oorzaak niet in eene waterlaag op het hygroskopische kristal gezocht. De waargenomen verandering in het fazeverschil is voor antimoonglans bij den hoofdinvalshoek het grootst en al naardat de optische as van het kristal evenwijdig is aan het invalsvlak of loodrecht hierop staat, achtereenvolgens 0.01 en 0.06. Deze waarde is vele malen grooter dan bij kwik is waargenomen. Ook is het grootste deel der verandering reeds na 2 uur afgeloopen en de vertraging in de verandering met den tijd veel sterker dan bij kwik. DRUDE beschouwt versche splijtvlakken als onverzadigd en meent, dat hieruit ook een sterkere verdichting der gaslagen zou moeten voortvloeien. Het experiment behoort echter uit te maken of ook hier gaslagen een rol spelen. Versche splijtvlakken van loodglans vertoonen geene verandering in de elliptische polarisatie met den tijd.

7. *Over de veranderingen in het fazeverschil bij het voorafgaand onderzoek verkregen.*

Uit de in §5 vermelde waarnemingen blijkt, dat daarbij veranderingen van bijna 1° in den hoofdinvalshoek door oppervlakte-lagen werden waargenomen. De vraag is alzoo, waardoor ontstaan deze grootere veranderingen? Zeer waarschijnlijk treden deze op ten gevolge van vloeistoflagen, welke de stof, die op het kwik valt, omhult. Veegt men van den grond eenig stof op en strooit hiervan iets over het kwik uit, dan is de verschuiving der compensatorstreep

---

[1]) DRUDE, Wied. Ann., **34**, 489, 1888; **36**, 532, 1889.

zonder eenige instelling onmiddellijk waar te nemen. Echter is met het bloote oog of met den kijker geen vloeistof op het kwik te bespeuren. Neemt men het stof van eene plaats, waar olie gemorst is, dan verkrijgt de compensatorstreep een gekronkelden vorm en zijn met den kijker vloeistofslieren op het oppervlak te bespeuren. De gekronkelde compensatorstreep toont aan, dat niet overal evenveel vloeistof over het kwik is uitgespreid.

Dat hierbij van eene uitspreiding eener vloeistof over het kwikoppervlak sprake is, stemt ook daarmee overeen, dat het kwikoppervlak rustiger is, zoodat men in den kijker een beeld kan waarnemen van den draad, die over het midden der spleet van den goniometer-collimator is gespannen. Met een schoon kwikoppervlak gelukt dit niet ten gevolge der trillingen, die het straatverkeer veroorzaakt.

8. *Over de waarden van I en H voor kwik zonder oppervlaktelaag.* Uit § 6 volgt, dat voor een luchtdruk van eene atmosfeer de kromme voor $k = 0.19$ het best de waarnemingen weergeeft, zoodat de compensatorinstelling achtereenvolgens in 1, 2 en 3 uren met 0.045, 0.08 en 0.11 toeneemt of gemiddeld per uur met 0.04. Daar de bepalingen van $I$ en $H$, in § 5 vermeld, drie uren in beslag nemen, is in dezen tijd $I$ gemiddeld met 6′ verminderd, echter het hoofdazimut $H$ onveranderd gebleven. Immers de verandering in $H$ ligt binnen de waarnemingsfouten. Hieruit volgt, dat voor kwik zonder geadsorbeerde luchtlaag

$$I = 79°24' \qquad H = 35°45'$$

Hieronder volgen de waarden door andere onderzoekers verkregen:

| | | |
|---|---|---|
| BREWSTER [1]) | 78°27′ | 34°46′ |
| QUINCKE [2]) | 77° 3′ | 33°47′ |
| DES COUDRES [3]) | 79° 3′ | 33°30′ |
| DRUDE [4]) | 79°34′ | 35°43′ |
| MEYER [5]) | 78°23′ | 35°17′ |
| MEESE [6]) | 79°22′ | 36° 7′ |

Hierbij is het volgende op te merken. BREWSTER geeft als hersteld azimut na twee terugkaatsingen onder den hoofdinvalshoek, 26°0′. Hieruit is de boven aangegeven waarde van het hoofdazimut berekend. Uit de opgaven van BREWSTER is niet af te leiden of zijne waar-

1) BREWSTER, Phil. Trans., 287, 1830.
2) QUINCKE, Pogg. Ann., **142**, 202, 1871
3) DES COUDRES, Dissert., Berlin, 1887.
4) DRUDE, Wied. Ann., **39**, 511, 1890.
5) MEYER Ann. d. Phys., **31**, 1017, 1913.
6) MEESE, Gött. Nachr., 530, 1913.

nemingen op een vrij kwikoppervlak, dan wel op kwik tegen glas zijn genomen. In het laatste geval kunnen krassen op glas de te lage waarde van het hoofdazimut hebben bewerkt. Ook de te lage waarde van het hoofdazimut door QUINCKE bepaald, moet aan krassen op het glas te wijten zijn[1]). De waarnemingen van DES COUDRES zijn op een vrij oppervlak verricht. De afwijkingen schijnen aan onnauwkeurigheden in de waarnemingen toegeschreven te moeten worden. DRUDE verkrijgt een schoon kwikoppervlak met behulp van twee trechters. Hierover wordt niets naders aangegeven. De methode zal overeenkomstig zijn aan de overstortingsmethode van RÖNTGEN. De waarnemingen werden binnen twee uren na de vorming van den kwikspiegel verricht. QUINCKE en MEYER gebruikten een kwikoppervlak tegen glas. Eene oppervlakte-laag tusschen kwik en glas heeft ongetwijfeld de te lage waarde van den hoofdinvalshoek bewerkt. MEESE verrichtte ook waarnemingen op kwik tegen glas en toont de aanwezigheid van daarbij bestaande oppervlakte-lagen aan. Uit zijne waarnemingen zijn de hier gegeven $I$ en $H$ berekend. In hoeverre eene verdichte luchtlaag ook eene werking heeft uitgeoefend is niet na te gaan. Uit de door ons bepaalde waarden en die van DRUDE, MEESE en MEYER, wiens zeker te lage waarde voor $I$ niet in rekening is gebracht, volgen als de waarschijnlijkste waarden der optische constanten voor kwik

$$I = 79°27' \qquad H = 35°43'.$$

9. *De dikte der geadsorbeerde luchtlaag.* Zoowel van RIJN VAN ALKEMADE (zie § 1), als DRUDE hebben betrekkingen aangegeven, waaruit de dikte der oppervlakte-laag is af te leiden. Volgens DRUDE[2]) is de verandering in het fazeverschil tusschen de componenten van het teruggekaatste licht, evenwijdig aan en loodrecht op het invalsvlak, die de oppervlakte-laag teweegbrengt,

$$\Delta' - \Delta = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{Cos\varphi\, Sin^2\varphi\, (a - Cos^2\varphi)}{(a - Cos^2\varphi)^2 + a_1^2} \int_0^L \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) dl$$

Hierin is $\varphi$ de invalshoek, $L$ de dikte der oppervlakte-laag, $n$ de brekingsaanwijzer in deze laag op een afstand $l$ van het terugkaatsend metaaloppervlak,

$$a = \frac{Cos\, 4\, H}{Sin^2 I tg^2\, I} \quad , \quad a_1 = \frac{Sin\, 4\, H}{Sin^2 I tg^2\, I.}$$

De brekingsaanwijzer $n$ der oppervlakte-laag zal toenemen bij nadering tot het terugkaatsend metaaloppervlak. Neemt men voor

[1]) J. J. HAAK, Proefschrift, Amsterdam, 1918, pg. 47.

[2]) DRUDE, Wied. Ann., 39. 481, 1890.

$n$ eene gemiddelde waarde, nl. die tusschen $n_{lucht}$ en de waarde voor de sterk verdichte lucht, onmiddellijk aan het metaal grenzend, en onderstelt men met QUINCKE[1]), dat de dichtheid hiervan gelijk is aan die van het kwik, dan vindt men hiervoor met behulp der betrekking: $(n-1):d =$ standvastig[2]), $n = 4.048$. De gemiddelde waarde van $n$ is dus $(4.048 + 1.0003):2 = 2.52$. Daar $\Delta' - \Delta$, het faze-verschil door de geabsorbeerde luchtlaag, 0.0087 bedraagt (zie § 6) en $\varphi = 79°46'$ (zie § 6), vindt men met de waarden van $l$ en $H$, in § 8 vermeld:

$$L = 1.6\ \mu\mu.$$

Deze waarde is in overeenstemming met die voor de overgangslaag vloeistof-damp, waarvoor BAKKER[3]) aangeeft $1-2\ \mu\mu$.

Berekent men op dezelfde wijze de dikte eener olielaag ($n = 1.5$, $d = 0.9$), die volgens § 5 den hoofdinvalshoek met 1°, de compensatorinstelling met 0.50 en meer kan wijzigen, dan vindt men, het getal 0.50 invoerend, $L = 3\mu\mu$. Dit is in overeenstemming met bepalingen van RAYLEIGH en FISCHER[4]). RAYLEIGH vond o.a. voor de dikte der dunste olielaag, welke de beweging der kamferdeeltjes op water doet ophouden, $2\mu\mu$, FISCHER voor vloeistoflagen, die zich over kwik uitspreiden, dikten kleiner dan $5\mu\mu$.

Daar de geadsorbeerde luchtlaag ter dikte van $1.6\ \mu\mu$ de compensator-aflezing met 0.25 verandert en de middelbare fout in deze aflezing 0.02 bedraagt, is alzoo langs optischen weg een laag dik $0.13\ \mu\mu$, nog aan te toonen. Dit is een laag van de dikte van een molekuul). Met behulp der capillaire verschijnselen gelukt het niet het bestaan van zulke dunne lagen te bewijzen.

Het is niet mogelijk de eens geadsorbeerde luchtlaag te verwijderen met behulp van een zeer sterk luchtledig, als de kwikluchtpomp van GAEDE vermag voort te brengen. Na 8 uur pompen was geen verplaatsing der compensator-aflezing aan te toonen[5]).

---

1) QUINCKE, Pogg. Ann., **108**, 326, 1859.

2) De formule van L LORENZ—H. A. LORENTZ kan hier niet toegepast worden, daar $n^2$ negatief zou worden. Zij $\frac{n_1^2+2}{n_1^2-1} d_1 = \frac{n^2+2}{n^2-1} d$, dan moet $\frac{n^2+2}{n^2-1} \frac{d}{d_1} > 1$ zijn, opdat $n_1^2$ positief is. In het hier beschouwde geval is $\frac{d_1}{d} = 10^4$, $\frac{n^2+2}{n^2-1} = 5.10^3$, zoodat aan de voorwaarde niet voldaan is.

3) G. BAKKER. Z. f. Phys. Chem., **91**, 571, 1916.

4) RAYLEIGH, Phil. Mag., (5), **30**, 396, 1890; FISCHER, Wied. Ann., **68**, 436, 1899.

5) Deze uitkomst is in overeenstemming met andere ervaringen, welke aantoonen met welke groote kracht deze geadsorbeerde luchtlagen aan de oppervlakten gehecht zijn. Zie o. a. VOIGT, Wied. Ann., **19**, 39, 1884. Evenzoo is zij in overeenstemming met het feit, dat de luchtlaag door uitgegloeid koolpoeder niet is te verwijderen. Zie o. a. SISSINGH, Proefschrift, pg. 162; Arch. Néerl., **20**, 228. 1886.

10. *Toetsing der verkregen uitkomst met een kwikspiegel, verkregen door distillatie van zuiver kwik.* Volgens § 4 werd voor de bepaling van den invloed, dien de geadsorbeerde luchtlaag uitoefent, het fazeverschil met den compensator gemeten door dit fazeverschil op te heffen. Uit de opgaven in § 4 blijkt, dat de laagste compensatoraflezing overeenkomt met het kleinste fazeverschil. Daar volgens DRUDE elke oppervlakte-laag den hoofdinvalshoek verkleint, dus voor elken invalshoek het fazeverschil vermeerdert, is het kwikoppervlak des te beter, d. i. minder verontreinigd door oppervlakte-lagen, naarmate de compensator-aflezing kleiner is. Voor een hoek, iets grooter dan *I*, was deze kleinste aflezing 56.84 [1]). Kwik, in het luchtledig gedistilleerd, dat na filtreering door een papieren trechter, in een bakje wordt gebracht, levert de instelling 56.84. Dit bakje was vrij in de lucht opgesteld en niet door een huisje (zie § 6) omgeven, zoodat de lichtstralen niet door glazen vensters behoefden te gaan. Kwik, door schudden met kaliloog en salpeterzuur gereinigd, doch niet in het luchtledig gedistilleerd, geeft de instelling 56.85. Het verschil met de vorige valt binnen de waarnemingsfouten. Kwik, in het bakje gebracht door eene uitgetrokken glazen buis, geeft, zoo deze niet goed gereinigd is, 57.00. Voor het goede reinigen is uitgloeien meestal afdoende. Met een niet schoone lap aangeraakt levert het kwik de instelling 57.20. Het beademen vermeerdert de aflezing met 0.04 tot 0.05.

Ten einde nog langs anderen weg te bewijzen, dat 56.84 de instelling is voor zuiver kwik zonder oppervlakte-laag, werd zuiver kwik in het luchtledig in het ijzeren bakje, dat zich in den bronzen cilinder bevindt, overgedistilleerd. Vooraf werd nagegaan, dat de glazen vensters — zorgvuldig gekoelde glasplaten van 3 mM. dikte — de compensator-instelling niet wijzigden, al werd het bakje luchtledig gepompt. Hiervoor plaatste men in het bakje een ijzeren spiegel en nam de compensator-instelling waar vóór en na het leegpompen. Het zuivere kwik werd in een glazen bol verhit, de damp in de spiraalgangen van een glazen koeler verdicht en opgevangen in een glazen fleschje, waaruit het door een glazen buis met uitgetrokken punt overvloeit in het ijzeren bakje. De geheele toestel is uit glas aan elkaar gesmolten. De luchtdichte verbinding van de glazen buis met uitgetrokken punt, die door het pijpje in den bovenwand van het bronzen huisje gaat, met dit pijpje geschiedde door luchtpompslang en een weinig collodion. Een GAEDE-kwikluchtpomp maakt de ruimte luchtledig. De compensator-instelling was 56.84, dus juist

[1]) De hier meegedeelde getallen zijn weer de gemiddelden van vier instellingen.

dezelfde als die, welke volgens de in deze § meegedeelde waarnemingen geldt voor kwik zonder adhaereerende luchtlaag.

11. *Onderzoek naar een verschil in de optische geaardheid van vloeibaar en vast kwik.* Aanvankelijk werd de lucht in het bronzen huisje zeer zorgvuldig gedroogd. De afkoeling van het huisje en het zich hierin bevindende bakje met kwik geschiedde door een mengsel van vast koolzuur en ether te brengen op een blikken plaat, die aan den bodem van het cilindrische huisje is vastgeschroefd. Met behulp eener warmte-isoleering door eboniet wordt het afvloeien van warmte van de metalen deelen van den goniometer naar het huisje vermeden. Ten einde het afkoelen der glazen vensters in de zijbuizen tegen te gaan, daar geen waterdamp uit de lucht hierop mag neerslaan, zijn deze vensters vastgekit op ebonieten pijpjes, die in de zijbuizen van den bronzen cilinder geschroefd worden. De dichting geschiedde met zeer taai Ramsay-vet. Daar het bleek, dat de glaasjes niettegenstaande deze voorzorg nog iets aanslaan, werd met een doospomp van Gaede een droge luchtstroom langs de glaasjes geblazen, waardoor het euvel geheel was verholpen.

Bij de afkoeling neemt men het volgende waar. Stelt men tijdens de afkoeling op de donkere compensatorstreep in, dan kronkelt zich deze, terwijl het kwik nog vloeibaar is, en wordt minder zwart, om daarna geheel te verdwijnen. Ten slotte springt de thans weer zwarte streep in den oorspronkelijken stand terug. Schuift men thans den kijker achter den Analysator in, zoodat deze op het kwik is ingesteld, dan blijken ijskristalletjes op het kwik te drijven. Hieruit blijkt, dat de verklaring van het waargenomen verschijnsel de volgende is. De lucht bevat, trots de zorgvuldige droging, sporen waterdamp, die bij de afkoeling op het kwikoppervlak neerslaan en zich hierover als vloeistof uitspreiden [1]). Vermoedelijk is de compensatorstreep gekronkeld, zoolang de waterlaag niet samenhangt en zeer dun is. Vormt het water eene samenhangende laag en is deze zoo dik geworden, dat de terugkaatsing op water geschiedt, dan verdwijnt de streep, daar bij den gekozen invalshoek van 79° 46′ water het licht bij terugkaatsing niet merkbaar elliptisch polariseert. Zoodra de temperatuur beneden 0° daalt, bevriest het water en trekt zich tot enkele ijskristalletjes tezamen, die met groote tusschenruimten op het kwik verspreid liggen. Men heeft dan weer een kwikoppervlak en de normale instelling der compensatorstreep. Hierbij is het kwik nog vloeibaar.

[1]) Op een ijzerspiegel neemt men bij het afkoelen deze verschijnselen niet waar, zoodat de verdichte waterdamp zich niet over dezen spiegel schijnt uit te breiden.

Het gelukte niet dit neerslaan van den waterdamp door zorgvuldige droging der lucht te voorkomen. Echter slaagde men hierin geheel door den bronzen cilinder luchtledig te pompen. Plaatst men een ijzeren spiegel in den cylinder, dan blijkt, dat de glaasjes op de zijbuizen niet dubbelbrekend worden, zoo men het huisje luchtledig pompt, wel door de eenzijdige afkoeling bij de temperatuurdaling van den bronzen cylinder door vast koolzuur en ether. De instelling der compensatorstreep verandert dan met het standvastige bedrag 0.08. Bij de afkoeling van het kwik in het luchtledig wordt geen plotselinge verandering in den stand der compensatorstreep waargenomen op het oogenblik der bevriezing. De aflezing der compensatorstreep vermindert geleidelijk, tot deze verandering eene grootte van 0.08 bereikt. Hieruit blijkt, dat alleen de geringe dubbele breking der glaasjes in het spel is en noch bij de bevriezing van het kwik, noch bij de verdere afkoeling tot —80° het fazeverschil, dus ook de hoofdinvalshoek van het kwik waarneembaar verandert.

Aanvankelijk toonde de Polarisatorinstelling bij het bevriezen eene verandering, die tot 3° kon bedragen. Echter moet dit toegeschreven worden aan den invloed van rimpels, die ten gevolge der onvermijdelijke trillingen door straat- en tramverkeer bij de bevriezing optreden. Dit is in overeenstemming met de waarnemingen van Fizeau, Drude en Haak [1]) over de vermindering van het hersteld azimut door groeven of krassen in allerlei richting op het spiegelend oppervlak. Ten einde deze rimpels zooveel mogelijk te vermijden, vult men het ijzeren bakje bijna tot overstorting toe met kwik en koelt langzaam af. Het gelukt dan enkele malen, als het straatverkeer niet te sterk is, zulk een vasten kwikspiegel te verkrijgen, dat een zuiver beeld der collimatorspleet is waar te nemen. In dit geval verandert de Polarisatorinstelling niet. Hieruit blijkt, dat bij de bevriezing en afkoeling van het vaste kwik tot —80° noch de hoofdinvalshoek, noch het hersteld azimut eenige verandering ondergaan. Optisch gedraagt zich vloeibaar en vast kwik op dezelfde wijze [2]).

---

[1]) Fizeau, Ann. de Chim. et de Phys., **3**, 373, 1861; Drude, Wied. Ann., **39**, 497, 1890; J. J. Haak, Proefschrift, Amsterdam, 1918.

[2]) Tevens volgt hieruit, dat de onderstelling van Lummer en Lorge (Ann. der Phys., **31**, 325, 1910), volgens welke inwendige spanningen de elliptische polarisatie zouden bewerken, voor vast kwik niet kan gelden.

**Natuurkunde**. — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer TH. DE DONDER: „*Le tenseur gravifique*".

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

(Aangeboden in de vergadering van 29 Juni 1918).

Dans une note parue dans ce recueil [1]), j'ai obtenu un tenseur gravifique $t_{\lambda\mu}$ répondant à toutes les exigences de la relativité générale.

Au cours de ses recherches sur le champ gravifique, M. LORENTZ [2]) a trouvé le même tenseur gravifique.

Dans ce travail, nous donnons *explicitement* la valeur du tenseur gravifique $t_{\lambda\mu}$, et nous en déduisons la valeur explicite du tenseur $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$; on remarquera que dans celui-ci *tous les termes de* $t_{\lambda\mu}$ *renfermant des dérivées secondes des potentiels gravifiques ont disparu.*

Nous montrons ensuite que dans tout champ gravifique et électromagnétique, la *force généralisée* $F_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3, 4)$ *est nulle*. Ce résultat est obtenu aussi au moyen de l'identité de HILBERT; les $F_\lambda$ sont encore nuls dans tout champ gravifique renfermant de la matière; ce résultat est indépendant du tenseur gravifique choisi.

Dans le chapitre suivant, nous étudions divers tenseurs gravifiques, et nous indiquons une correction à effectuer sur le tenseur gravifique d'EINSTEIN [3]).

Etant donnée l'importance du champ gravifique d'EINSTEIN—SCHWARZSCHILD, nous avons cru utile de calculer le $t_{\lambda\mu}$ relatif à ce champ.

Nous montrons ensuite que $\sum_\lambda t_{\lambda\lambda}$ est indépendant des dérivées secondes des potentiels gravifiques.

Enfin, il résulte de la covariance de $t_{\lambda\mu}$, que celui-ci est *cogrédient* au tenseur électromagnétique $T_{\lambda\mu}$ pour tout changement *linéaire* des variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.

## I. *Valeur explicite du tenseur gravifique* $t_{\lambda\mu}$.

Rappelons tout d'abord la valeur de ce tenseur gravifique:

---

[1]) TH. DE DONDER. Verslag Koninkl. Akad. v. Wetenschappen. Amsterdam. Deel XXV. 27 Mei 1916.

[2]) H. A. LORENTZ. Verslag Koninkl. Akad. v. Wetenschappen. Amsterdam. Deel XXV. 24 Juni 1916.

[3]) A. EINSTEIN. Sitzungsberichte Akad. d. Wissenschaften. Berlin. 26 Oktober 1916.

$$t_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu}\, l - \sum_{\overline{ab}} \left[ \left( \frac{dl}{dg_{ab,\mu}} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{d(1+\varepsilon_{\mu i}) \dfrac{dl}{dg_{ab,\mu i}}}{dx_i} \right) g_{ab,\lambda} + \right. \left. + \frac{1}{2} \sum_i (1+\varepsilon_{\mu i}) \frac{dl}{dg_{ab,\mu i}} g_{ab,\lambda i} \right] \quad . \quad (1)$$

où

$$l = kC\,(-g)^{1/2}$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_i \sum_m \sum_j \sum_l g^{jl} g^{im} (ij, lm)\,;$$

$C$ est l'invariant de courbure totale de RIEMANN relatif à la forme quadratique différentielle:

$$\sum_i \sum_k g_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On a aussi posé:

$$g_{ab,\mu} = \frac{dg_{ab}}{dx_\mu} \quad , \quad g_{ab,\mu i} = \frac{d^2 g_{ab}}{dx_\mu dx_i}.$$

D'autre part, on a: $\varepsilon_{\lambda\lambda} = 1$, $\varepsilon_{\lambda\mu} = 0$ $(\lambda \neq \mu)$; $\sum\limits_{\overline{ab}}$ indique une sommation étendue aux 10 combinaisons avec répétition des nombres 1, 2, 3, 4 pris 2 à 2.

En dérivant $l$ par rapport aux $g_{ab,\mu}$ et en permutant les indices, on obtient le résultat suivant:

$$\frac{dl}{dg_{ab,\mu}} = k(-g)^{1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ab}}{2}\right) \sum_h \sum_l \sum_\alpha \begin{bmatrix} h\ l \\ \alpha \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} g^{a\alpha} (g^{\mu b} g^{lh} - g^{lb} g^{h\mu}) \\ + g^{b\alpha} (g^{\mu a} g^{lh} - g^{l\mu} g^{ha}) \\ - g^{\mu\alpha} (g^{ab} g^{lh} - g^{la} g^{hb}) \end{array} \right\}.$$

En dérivant de même $l$ par rapport aux $g_{ab,\mu i}$ et en réduisant les termes semblables, on obtient:

$$\frac{dl}{dg_{ab.\mu i}} = k(-g)^{1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{i\mu}}{2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_{ab}}{2}\right) (2g^{i\mu} g^{ab} - g^{a\mu} g^{bi} - g^{b\mu} g^{ai}).$$

Substituons ces expressions dans (1), et utilisons la formule:

$$\frac{d(-g)^{1/2}}{dx_i} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,i} = -\frac{1}{2} (-g)^{1/2} \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta,i}.$$

Après quelques réductions obtenues en permutant les indices, on a enfin:

$$\left. \begin{array}{l} t_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu} l + \dfrac{k}{4} (-g)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_a \sum\limits_b \sum\limits_i \sum\limits_h \sum\limits_\alpha \left[ 2g^{ah,h} g^{\mu b} - g^{ab,h} g^{h\mu} + g_{hi,\alpha} g^{a\alpha} g^{\mu b} g^{hi} \right] g_{ab,\lambda} - \\ \qquad - \dfrac{k}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_a \sum\limits_b \sum\limits_i \left[ g^{\mu i} g^{ab} - g^{a\mu} g^{bi} \right] g_{ab,\lambda i} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Cette expression de $t_{\lambda\mu}$ se simplifie encore en vertu de l'équation complémentaire $l = 0$.

## II. *Valeur explicite du tenseur* $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$.

Rappelons la valeur du *tenseur électromagnétique* [1]):

$$T_{\lambda\mu} = \sum_i (1 + \varepsilon_{\lambda i})\, g^{\mu i} \Diamond^{\lambda i}\, l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Mais en vertu de *l'identité* [1]):

$$(1 + \varepsilon_{\lambda i}) \Diamond^{\lambda i}\, l \equiv k(-g)^{1/2} \sum_h \sum_l g^{hl} (ih, l\lambda) - k(-g)^{1/2}\, C g_{\lambda i}\,.$$

l'expression (4) peut s'écrire:

$$T_{\lambda\mu} = -\varepsilon_{\lambda\mu} l + k(-g)^{1/2} \sum_h \sum_l \sum_i g^{\mu i} g^{hl}\, (ih, l\lambda) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Rappelons aussi que la parenthèse à 4 indices de CHRISTOFFEL a la valeur suivante:

$$(ih, l\lambda) \equiv \tfrac{1}{2}(g_{i\lambda,hl} - g_{h\lambda,il} - g_{il,h\lambda} + g_{hl,i\lambda}) + \sum_\alpha \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left( \begin{bmatrix} h\ l \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\ i \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h\lambda \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l i \\ \beta \end{bmatrix} \right).$$

Retournons maintenant à la valeur de $t_{\lambda\mu}$ et utilisons la formule:

$$g^{ab,h} = - \sum_\sigma \sum_\tau g_{\sigma\tau,h}\, g^{\sigma a}\, g^{\tau b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Rapprochons la valeur de $t_{\lambda\mu}$ ainsi obtenue (3,6), et la valeur de $T_{\lambda\mu}$ (5): *tous les termes de* $t_{\lambda\mu}$ *renfermant des dérivées secondes des potentiels gravifiques se retrouvent, changés de signe, dans le tenseur électromagnétique* $T_{\lambda\mu}$.

Après quelques réductions provenant de permutations d'indices, on trouve enfin:

$$t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} k(-g)^{1/2} \sum_h \sum_l \sum_i \left\{ \begin{array}{l} g_{i\lambda,hl}[g^{\mu i} g^{hl} - g^{\mu h} g^{il}] \\ + \tfrac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta g_{\beta i,l}\, g_{h\lambda,\alpha} \left[ \begin{array}{l} 2g^{\lambda\alpha}(g^{ih} g^{\beta l} - g^{lh} g^{\beta i}) \\ + 2g^{\lambda i}(g^{lh} g^{\alpha\beta} - g^{\beta h} g^{\alpha l}) \\ + 2g^{\lambda h}(g^{\alpha l} g^{\beta i} - g^{\alpha i} g^{\beta l}) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (7)$$

## III. *La force généralisée* $F_\lambda$ *est nulle.*

La force généralisée $F_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) satisfait aux relations suivantes [2]):

$$(-g)^{1/2} F_\lambda = \sum \frac{d(t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu})}{dx_\mu}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4.$$

---

[1]) TH. DE DONDER. Archives du Musée Teyler. Sér. 2. T. III. 1917 (voir spéc. pages 94 et 99).

[2]) TH. DE DONDER. Voir ma note citée ci-dessus; équations (10).
Voir aussi mon mémoire, Archives Teyler, Haarlem 1917; équations (347).

Substituons dans (8) les valeurs trouvées (7) pour le tenseur $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$. Après dérivation et permutations d'indices, on voit que tous les termes se détruisent deux à deux; on aura donc:

$$F_\lambda = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

*Ce résultat est indépendant de l'expression choisie pour le tenseur gravifique* $t_{\lambda\mu}$. C'est ce que nous allons démontrer au moyen de *l'identité de* Hilbert [1]), qui peut s'écrire avec nos notations:

$$\tfrac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu (1+\varepsilon_{\mu\nu})\, g^{\mu\nu,\sigma} \lozenge^{\mu\nu} l \equiv - \sum_\mu \sum_\nu \frac{d}{dx_\nu}\{(1+\varepsilon_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} \lozenge^{\mu\sigma} l\} \quad . \quad . \quad (10)$$

En vertu du principe généralisé de Hamilton, les équations différentielles gravifiques sont [2]):

$$\lozenge^{\mu\nu}(L+l) = 0$$

ou

$$\frac{dL}{dg^{\mu\nu}} = - \lozenge^{\mu\nu} l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Or, on a [3]):

$$\lozenge^{\mu\nu} L \equiv \frac{dL}{dg^{\mu\nu}} = \left(\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} - 1\right) \sum_k g_{\mu k}\, T_{\nu k} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

d'où, en vertu de (11):

$$\lozenge^{\mu\nu} l = \left(1 - \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2}\right) \sum_k g_{\mu k}\, T_{\nu k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

et inversement:

$$T_{\sigma\nu} = \sum_\mu (1+\varepsilon_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} \lozenge^{\mu\sigma} l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

En vertu de (11), le premier membre de l'identité de Hilbert (10) peut s'écrire:

$$-\left(\frac{dL}{dx_\sigma}\right)_M .$$

D'autre part, en vertu de (14), le second membre de cette identité (10) peut s'écrire:

$$- \sum_\nu \frac{dT_{\sigma\nu}}{dx_\nu} .$$

On a donc:

---

[1]) D. Hilbert. Nachrichten Königl. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen. Math. phys. Klasse. Heft 3. 1915. (Berlin 1916).

[2]) Th. De Donder. Archives Teyler, Haarlem 1917. (Voir équation 339).

[3]) Voir équation (353) de mon mémoire, Archives Teyler.

$$K_\sigma = \left(\frac{dL}{dx_\sigma}\right)_M = \sum_\nu \frac{dT_{\sigma\nu}}{dx_\nu}.$$

Or, en vertu de (346) [1]:

$$(-g)^{1/2} F_\sigma + K_\sigma = \sum_\nu \frac{dT_{\sigma\nu}}{dx_\nu};$$

d'où

$$F_\sigma = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, 3, 4.$$

Remarquons que tout ce qui précède peut être généralisé immédiatement en remplaçant $l$ par une fonction covariante plus générale, par exemple: $l - \frac{1}{4}\varrho(-g)^{1/2}$, où $\varrho$ est une fonction de $x_1, x_2, x_3, x_4$; on obtiendrait ainsi nos équations généralisées [2]) du champ gravifique renfermant des masses.

## IV. *Autres tenseurs gravifiques.*

Les seize fonctions $t_{\lambda\mu}$ dont l'ensemble constitue le tenseur gravifique ne devant, jusqu'à présent, satisfaire qu'aux quatre équations aux dérivées partielles [3]):

$$\sum_\mu \frac{dt_{\lambda\mu}}{dx_\mu} = -K_\lambda,$$

$$\lambda = 1, 2, 3, 4,$$

il en résulte qu'il existe une infinité de tenseurs gravifiques différents. Le développement ultérieur de la théorie de la gravitation montrera probablement que le tenseur gravifique doit être déterminé d'une manière *univoque* par des conditions aux limites et des conditions initiales.

En se reportant aux relations (341 à 345) de mon mémoire [4]) (Archives Teyler), on verra aisément que les seize fonctions suivantes:

$$t^{\lambda\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu}\, l - \sum_{ab}\left[\left(\frac{dl}{dg^{ab,\mu}} - \frac{1}{2}\sum_i \frac{d(1+\varepsilon_{\mu i})\dfrac{dl}{dg^{ab,\mu i}}}{dx_i}\right) g^{ab,\lambda} + \frac{1}{2}\sum_i (1+\varepsilon_{\mu i})\frac{dl}{dg^{ab,\mu i}}\, g^{ab,\lambda i}\right]. \quad (15)$$

déterminent un tenseur gravifique.

---

[1]) Voir équation (346) de mon mémoire, Archives Teyler.

[2]) Voir la dernière page de mon mémoire, Archives Teyler.

[3]) Voir équation (344) de mon mémoire, Archives Teyler.

[4]) Voir aussi notations (348 à 352) de ce mémoire.

Grâce à la théorie des invariants différentiels, ou par un calcul direct, on trouvera que:

$$t^{\lambda\mu} = t_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}(-g)^{1/2} \sum_{\alpha}\sum_{\sigma}\sum_{i} g_{\sigma\kappa\lambda} \begin{bmatrix} g^{i\mu}(g^{\sigma\alpha,\mu} - 2g^{\sigma\alpha,i} + g^{\sigma\alpha,\alpha}) \\ -g^{\alpha i}(g^{\sigma\mu,\mu} - g^{\sigma\mu,i}) \end{bmatrix} . \quad (16)$$

On remarquera que ces deux tenseurs gravifiques renferment les mêmes dérivées secondes des potentiels gravifiques. On aura en outre:

$$\sum_{\mu} \frac{d(t^{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu})}{dx_{\mu}} = 0.$$

En vertu de nos équations (8) et (9), on pourra introduire *le tenseur gravifique* $-T_{\lambda\mu}$; M. LORENTZ [1]) a rencontré ce tenseur gravifique au cours de ses recherches. Quand on adopte le tenseur gravifique de M. LORENTZ, le *tenseur* $t_{\lambda\mu} + T_{\lambda\mu}$ *est identiquement nul.*

Plus récemment, M. EINSTEIN [2]) a trouvé un tenseur gravifique qui ne renferme aucune dérivée seconde des potentiels gravifiques. Nous allons indiquer une méthode nouvelle pour obtenir ce tenseur gravifique (corrigé).

L'invariant de courbure totale de RIEMANN peut s'écrire:

$$C \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} (\alpha\beta, \sigma\tau)\, g^{\beta\sigma} g^{\alpha\tau}$$

$$\equiv \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \dfrac{d\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \sigma\end{Bmatrix}}{dx_{\beta}} - \dfrac{d\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{Bmatrix}}{dx_{\sigma}} \\ + \begin{Bmatrix}\beta\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \tau\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \tau\end{Bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que $l \equiv kC(-g)^{1/2}$ peut s'écrire:

$$l \equiv \tfrac{1}{2}\, k \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} \left[ \frac{d}{dx_{\beta}}\left((-g)^{1/2} \begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \sigma\end{Bmatrix} g^{\alpha\beta}\right) - \frac{d}{dx_{\sigma}}\left((-g)^{1/2} \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{Bmatrix} g^{\alpha\beta}\right)\right] + l^{*} \quad (17)$$

où nous avons posé: [3])

$$l^{*} \equiv \tfrac{1}{2}\, k \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} \begin{bmatrix} -\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \sigma\end{Bmatrix} \dfrac{d}{dx_{\beta}}[(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}] + \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{Bmatrix} \dfrac{d}{dx_{\sigma}}[(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}] \\ + (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix}\beta\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\sigma\\ \tau\end{Bmatrix} - (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \tau\end{Bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

On vérifiera, par un calcul direct, que *le lagrangien* $\overset{ab}{\lozenge}$ *d'une*

---

[1]) H. A. LORENTZ. Voir la dernière page du mémoire cité. (Verslag Amsterdam 1916).

[2]) A. EINSTEIN. Sitzungsberichte Akad. der Wissenschaften Berlin (Séance du 26 octobre 1916).

[3]) Les termes qui figurent dans la première ligne du second membre de (18) ont été omis par M. EINSTEIN.

*dérivée partielle par rapport à une des variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, d'une fonction quelconque de ces variables et des potentiels gravifiques est identiquement nul.*

Par conséquent (17, 18):

$$\diamondsuit^{ab}\, l = \diamondsuit^{ab}\, l^* \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Posons maintenant[1]:

$$t_1^{\lambda\mu} \equiv \varepsilon_{\lambda\mu}\, l^* - \sum_{\overline{ab}} \frac{dl^*}{dg^{ab,\mu}}\, g^{ab,\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

On aura[2]:

$$\sum_{\mu} \frac{dt_1^{\lambda\mu}}{dx_\mu} = \sum_{\overline{ab}} \left( \diamondsuit^{ab}\, l^* \right) g^{ab,\lambda} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

ou, en vertu de (19):

$$\sum_{\mu} \frac{dt_1^{\lambda\mu}}{dx_\mu} = \sum_{\overline{ab}} \left( \diamondsuit^{ab}\, l \right) g^{ab,\lambda}; \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

ou, à cause de (339) ainsi que de (343, 344) (voir mon mémoire, Archives TEYLER):

$$\sum_{\mu} \frac{dt_1^{\lambda\mu}}{dx_\mu} = - K_\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

On aura encore (voir fin du paragraphe III):

$$\sum_{\mu} \frac{d(T_{\lambda\mu} + t_1^{\lambda\mu})}{dx_\mu} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

On pourrait construire aussi le tenseur gravifique:

$$t^1_{\lambda\mu} \equiv \varepsilon_{\lambda\mu}\, l^* - \sum_{\overline{ab}} \frac{dl^*}{dg_{ab,\mu}}\, g_{ab,\lambda}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

et un calcul simple montrerait que $t^1_{\lambda\mu} = t_1^{\lambda\mu}$.

## IV. *Champ gravifique d'*EINSTEIN—SCHWARZSCHILD.

On sait que les potentiels gravifiques du champ d'EINSTEIN—SCHWARZSCHILD[3]) peuvent s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &\equiv - R^{-3}\,(R-a)^{-1} \\ g_{22} &\equiv - R^2\,(1-x_2^{\,2})^{-1} \\ g_{33} &\equiv - R^2\,(1-x_2^{\,2}) \\ g_{44} &\equiv R^{-1}\,(R-a) \\ g_{\lambda\mu} &\equiv 0 \text{ où } \lambda,\mu = 1, 2, 3, 4, \text{ et } \lambda \neq \mu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

---

[1]) Comme à l'équation (341) de mon mémoire, Archives Teyler.

[2]) Comme à l'équation (342) de mon mémoire, Archives Teyler.

[3]) K. SCHARZSCHILD. Sitzungsberichte Akademie d. Wissenschaften Berlin (Séance du 3 février 1916). Voir spécialement pages 191 et 194.

On a posé:

$$R \equiv (3x_1 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Rappelons enfin que $\alpha$ représente une constante.

En substituant les valeurs (26) et (27) dans (3), on obtient, après de nombreuses réductions, le résultat suivant: *tous les* $t_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$) *sont nuls, sauf* $t_{11}$ *qui vaut* $-R^{-2}$.

Les calculs se trouvent grandement simplifiés si l'on remarque que $g$ se réduit à $-1$ dans le champ considéré.

En dérivant ce déterminant par rapport à $x_i$ et $x_\lambda$, on obtient la relation:

$$\sum_a \sum_b g^{ab} g_{ab,i\lambda} = - \sum_a \sum_b g^{ab,i} g_{ab,\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Grâce à (28), le tenseur gravifique (3) pourra s'écrire:

$$t_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \sum_i \left\{ \left[ g^{ai,i} g^{\mu b} + \tfrac{1}{2} g^{ab,i} g^{\mu i} \right] g_{ab,\lambda} + g^{a\mu} g^{bi} g_{ab,\lambda i} \right\} \quad . \quad (29)$$

Pour s'assurer si le tenseur $t^1_{\lambda\mu}$ d'Einstein est différent du tenseur $t_{\lambda\mu}$, il suffira de calculer $t^1_{33}$, par exemple, relatif au champ d'Einstein-Schwarzschild: tous calculs faits, on trouve (25) que $t^1_{33} = l^* = kR^{-2}$. Or $t_{33}$ est nul; donc, *ces deux tenseurs sont différents.*

## VI. *Valeur explicite de* $\sum_\lambda t_{\lambda\lambda}$.

En vertu de (3) et (6), on obtient, en permutant les indices[1]):

$$\sum_\lambda t_{\lambda\lambda} = 4l - \frac{k}{4} (-g)^{1/2} \sum g_{kh,qi} (g^{kh} g^{qi} - g^{ki} g^{qh}) +$$

$$+ \frac{k}{4} (-g)^{1/2} \sum g_{q\alpha,i} g_{h\beta,k} (-2 g^{\alpha\beta} g^{qi} g^{kh} + g^{\alpha\beta} g^{ki} g^{qh} + g^{\alpha k} g^{qi} g^{\beta h}).$$

Cette expression se simplifie considérablement si l'on remarque que l'invariant de courbure $C$ peut s'écrire:

$$C \equiv \tfrac{1}{2} \sum g_{kh,qi} (g^{kh} g^{qi} - g^{ki} g^{qh}) +$$

$$+ \tfrac{1}{8} \sum g_{q\alpha,i} g_{h\beta,k} \begin{pmatrix} 4 g^{\alpha\beta} g^{qi} g^{kh} - 3 g^{\alpha\beta} g^{ki} g^{qh} \\ -2 g^{\alpha k} g^{qi} g^{\beta h} + 2 g^{\alpha k} g^{\beta q} g^{ih} - 2 g^{i\beta} g^{q\alpha} g^{kh} \\ + g^{ik} g^{q\alpha} g^{\beta h} \end{pmatrix} . \quad (30)$$

Si l'on se rappelle la signification de $l$ (voir § I), on trouvera immédiatement, grâce à (30), que:

$$\sum_\lambda t_{\lambda\lambda} = 3l + \frac{k}{8} (-g)^{1/2} \sum g_{q\alpha,i} g_{h\beta,k} \begin{pmatrix} - g^{\alpha\beta} g^{ki} g^{qh} \\ + g^{q\alpha} g^{ki} g^{\beta h} \\ + 2 g^{k\alpha} g^{hi} g^{\beta q} \\ - 2 g^{q\alpha} g^{hi} g^{\beta k} \end{pmatrix} \quad . \; . \quad (31)$$

[1]) Dans les formules qui suivent, le signe $\Sigma$ représente *des sommes séparées* portant respectivement sur les valeurs 1, 2, 3, 4 de tous les indices qui suivent.

En vertu de l'équation complémentaire $l = 0$, on voit (30) que $\sum_\lambda t_{\lambda\lambda}$ est une *forme quadratique des dérivées premières seules.*

## VII. *Covariance du tenseur gravifique* $t_{\lambda\mu}$.

Effectuons un changement *quelconque* des variables $x_1, x_2, x_3, x_4$, et représentons par $x'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ les nouvelles variables. Le tenseur gravifique prendra une nouvelle valeur $t'_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$ fournie par la relation (1) où toutes les lettres auront été, au préalable, affectées *d'un accent.*

Rappelons que [1]:

$$l' = l \frac{\partial(x_1 \ldots x_4)}{\partial(x'_1 \ldots x'_4)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Grâce à cette relation (32), il sera aisé de comparer $t'_{\lambda\mu}$ à $t_{\lambda\mu}$; de cette comparaison, il résulte que pour tout changement *linéaire* des variables $x_1, x_2, x_3, x_4$, on aura:

$$t'_{\lambda\mu} = \frac{\partial(x_1 \ldots x_4)}{\partial(x'_1 \ldots x'_4)} \sum_\sigma \sum_\tau \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\lambda} \cdot \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\tau} \cdot t_{\sigma\tau};$$

autrement dit, pour tout changement *linéaire* des variables $x_1, x_2, x_3, x_4$, le tenseur gravifique $t_{\lambda\mu}$ est *cogrédient* au tenseur électromagnétique [2] $T_{\lambda\mu}$.

Il n'en est plus de même pour un changement *quelconque* de variables [3]. Un fait analogue se présente pour les forces généralisées [4] $F_\lambda$ et $K_\lambda$: la force généralisée gravifique $K_\lambda$ n'est *cogrédiente* à la force généralisée électromagnétique $F_\lambda$ que pour les changements *linéaires* des variables $x_1, x_2, x_3, x_4$.

Le 30 avril 1918.

---

[1]) Voir équation (364) de mon mémoire, Archives TEYLER.

[2]) Voir l'equation (319) de mon mémoire, Archives TEYLER.

[3]) M. LORENTZ, avait déjà fait remarquer que $t_{\lambda\mu}$ n'est pas cogrédient à $T_{\lambda\mu}$ dans le cas d'un changement quelconque de variables (Verslag Amsterdam, 24 Juni 1916).

[4]) Voir les équations (321) et (323) de mon mémoire, Archives TEYLER.

**Natuurkunde**. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 3*a* uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: W. H. KEESOM en Mevr. C. NORDSTRÖM-VAN LEEUWEN. „*Afleiding van den derden viriaalcoëfficient voor stoffelijke punten (eventueel harde bollen), die centrale krachten op elkander uitoefenen*".

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

§ 1. *Inleiding*. Deze mededeeling betreft een vervolg van het onderzoek, waarmede begonnen werd in Supplement N°. 24*a* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden (April 1912), en dat ten doel heeft de voorhanden experimenteele gegevens betreffende de viriaalcoëfficienten $B$ en $C$ in de door KAMERLINGH ONNES [1]) opgestelde empirische toestandsvergelijking [2])

$$pv = A\left\{1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

te vergelijken met formules, die op grond van verschillende aannamen betreffende bouw en onderlinge werking der moleculen voor die viriaalcoëfficienten kunnen worden afgeleid.

In de vorige op dit onderzoek betrekking hebbende mededeelingen [3]) werd in het bijzonder de tweede viriaalcoëfficient, $B$, in het oog gevat. In deze mededeeling wordt een aanvang gemaakt met de behandeling van den derden viriaalcoëfficient, $C$. Daartoe wordt in § 2 eene algemeene uitdrukking voor dezen derden viriaalcoëfficient afgeleid voor stoffelijke punten (eventueel harde bollen), die centrale krachten op elkander uitoefenen. In § 3 wordt dan $C$ berekend voor het geval, dat de moleculen (harde bollen) geen aantrekking op elkander uitoefenen. De zoo verkregen waarde is tevens de eerste term van de reeks naar opklimmende machten van $T^{-1}$,

---

1) H. KAMERLINGH ONNES. Leiden Meded. N°. 71; deze Verslagen Juni 1901, p. 136. Meded. N°. 74; Arch. Néerl. (2) 6 (1901), p. 874.

2) Men vergelijke H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM. Die Zustandsgleichung. Math. Enz. V 10, Leiden Suppl. N°. 23 (1912), § 36.

3) W. H. KEESOM. Leiden Meded. Suppl. N°. 24*b* (deze Verslagen April 1912), 25 (Sept. 1912), 26 (Oct. 1912), 39*a* (Sept. 1915), 39*b* (Oct 1915), W. H. KEESOM en Mej. C. VAN LEEUWEN, Leiden Suppl. N°. 39*c* (Maart 1916).

waarin $C$ kan ontwikkeld worden voor het geval, dat de aantrekking tusschen de moleculen met den afstand varieert volgens eene wet $r^{-(q+1)}$ (potentieele energie evenredig aan $r^{-q}$). In Meded. N°. 3*b* zal de ontwikkeling gegeven worden van de twee volgende termen dezer reeks voor de krachtwetten $r^{-5}$ en $r^{-6}$.

Nadat met deze berekeningen reeds een aanvang gemaakt was, is het belang van het theoretische onderzoek naar $C$ verhoogd door de opmerking van Holst [1]), die uit de onderzoekingen betreffende de compressibiliteit tot het besluit kwam, dat voor stoffen als water en ammoniak, waarvan de moleculen een electrisch bipoolmoment bezitten, in het onderzochte temperatuurgebied $C$ negatief is, terwijl voor normale stoffen $C$ positief gevonden wordt. Uit eene berekening van $C$ voor bipoolmoleculen, en vergelijking van die uitkomst met b.v. die voor moleculen als in deze mededeeling zijn beschouwd, of met die voor quadrupoolmoleculen, zal moeten blijken of het afwijkende gedrag van $C$ voor de genoemde stoffen inderdaad aan het electrische bipoolmoment van het molecuul moet toegeschreven worden. De berekening van $C$ voor bipool- en quadrupoolmoleculen is intusschen tot later uitgesteld moeten worden.

§ 2. *Afleiding van eene algemeene uitdrukking voor den derden viriaalcoëfficient voor stoffelijke punten, die centrale krachten op elkander uitoefenen.* Deze afleiding sluit zich aan bij de afleiding van den tweeden viriaalcoëfficient voor dit geval, gegeven in Leiden Suppl. N°. 24*b* § 5, waarheen voor de methode en voor de reeds aldaar gebruikte notaties verwezen zij.

Bepaling van de macrocomplexie:

Zie l. c., waarbij in uitbreiding van (23) aldaar, de $n_{11}$ moleculen in $dv_1 dw_1$ nu worden onderscheiden in:

$n_{11a}$ enkele moleculen (met geen ander molecuul binnen hun werkingssfeer),

$n_{11b_1}$ moleculen behoorende tot paren met een onderlingen afstand tusschen $r_1$ en $r_1 + dr_1$,

$n_{11b_2}$ moleculen behoorende tot paren met een onderlingen afstand tusschen $r_2$ en $r_2 + dr_2$,

enz.,

$n_{11c_{123}}$ moleculen behoorende tot drietallen, waarin de onderlinge

1) G. Holst. Leiden Suppl. N⁰. 41*f*. Deze Verslagen XXV (Jan. 1917), p. 1061. Holst wijst daar ook op het belang van de kennis van het gedrag van $C$ voor bepalingen van het moleculairgewicht uit de gasdichtheid, vergel. ook H. Kamerlingh Onnes en W. H. Keesom. Die Zustandsgleichung. Leiden Suppl. N⁰. 23, §§ 77—80.

afstanden tusschen de 3 moleculen resp. zijn gelegen tusschen $r_1$ en $r_1 + dr_1$, $r_2$ en $r_2 + dr_2$, $r_3$ en $r_3 + dr_3$,

enz. (2).

De niet-individueel-bepaalde macrocomplexie wordt bepaald door de getallen $n_{11a} \ldots$ op te geven, zonder op eenige individualiteit der moleculen te letten.

We definieeren de individueel-bepaalde macrocomplexie als volgt:

$n_{11a}$ bepaald aangewezen moleculen zijn enkel,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$n_{11c_{123}}$ bepaald aangewezen moleculen behooren tot drietallen, waarvoor de onderlinge afstanden zijn $r_1\,(dr_1)$, $r_2\,(dr_2)$, $r_3\,(dr_3)$,

enz.

Hierbij is nog niet vastgesteld hoe deze $n_{11c_{123}}$ moleculen in drietallen zijn verdeeld, en tusschen welke twee moleculen van een drietal de afstand $r_1\,(dr_1)$, tusschen welke hij $r_2\,(dr_2)$ is.

Het aantal individueel-bepaalde macrocomplexies vervat in de niet-individueele bepaalde macrocomplexie bedraagt:

$$\frac{n!}{n_{11a}!\; n_{11b1}! \ldots n_{11c123}! \ldots} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

De microcomplexie wordt bepaald als in Leiden Suppl. N°. 24*b* § 5.

Aantal microcomplexies in de individueel-bepaalde macrocomplexie:

In $dv_1$ zijn te plaatsen $n_1$ moleculen. We plaatsen eerst de $n_{1a}$ enkele moleculen. Beschikbaar zijn voor het:

1ste molecuul: $\varkappa$ plaatsen

2de ,, $\varkappa \left\{1 - \frac{b}{dv_1}\right\}$ ,, , waarin

$$b = \tfrac{4}{3}\pi\tau^3 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

het volume van de werkingssfeer voorstelt,

3de molecuul: $\varkappa \left\{1 - 2\,\frac{b-\beta}{dv_1}\right\}$ plaatsen:

hierbij is van $b$ een bedrag $\beta$ afgetrokken wegens het voorkomen van een zeker aantal gevallen, in welke de werkingssferen van de moleculen 1 en 2 elkaar gedeeltelijk bedekken;

4de molecuul: $\varkappa \left\{1 - 3\,\frac{b-2\beta}{dv_1}\right\}$ plaatsen, enz.

Het plaatsen der $n_{1a}$ moleculen geeft aldus voor het gezochte aantal den factor:

$$\varkappa^{n_{1a}}\left\{1-\frac{b}{dv_1}\right\}\left\{1-2\,\frac{b-\beta}{dv_1}\right\}\left\{1-3\,\frac{b-2\beta}{dv_1}\right\}\ldots\left\{1-(n_{1a}-1)\,\frac{b-(n_{1a}-2)\beta}{dv_1}\right\}. \quad (5)$$

Berekening van $\beta$:

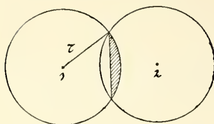



Fig. 1.

Noem het gearceerde bolsegment $s(r_{12})$. Kans dat molecuul 2 is op een afstand $r_{12}$ van 1: $\frac{4\pi r^2_{12} dr_{12}}{dv_1}$.

Daaruit volgt:

$$\beta = \int_{\tau}^{\tau} \frac{4\pi r^2_{12} dr_{12}}{dv_1} s(r_{12}),$$

waarvoor men, daar

$$s(r_{12}) = \frac{2\pi}{3} \{\tau^3 - \tfrac{3}{4}\tau^2 r_{12} + \tfrac{1}{16} r^3_{12}\},$$

vindt:

$$\beta = \tfrac{17}{64} \frac{b^2}{dv_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

We plaatsen nu vervolgens de $n_{1b1}$ moleculen:

Voor het 1ste molecuul van deze zijn beschikbaar:

$$\varkappa \left\{ 1 - n_{1a} \frac{b}{dv_1} \right\} \text{ plaatsen,}$$

waarbij een term met $\beta$ is weggelaten, komende deze voor de benoodigde orde van grootte niet in aanmerking;

voor het 2de molecuul:

hierbij moet in rekening gebracht worden, dat van de voor dit molecuul beschikbare ruimte $4\pi r_1^2 dr_1$ gemiddeld een zeker gedeelte in beslag is genomen door een der $n_{1a}$ moleculen; men vindt:

$$\varkappa \frac{4\pi r_1^2 dr_1}{dv_1} \left\{ 1 - n_{1a} \frac{\pi r_1 (\tau^2 - {}^1/_{12}\, r_1^2)}{dv_1} \right\} \text{ plaatsen;}$$

voor het 3de molecuul:

$$\varkappa \left\{ 1 - (n_{1a} + 2) \frac{b}{dv_1} \right\} \text{ plaatsen,}$$

enz.

In totaal geeft (vergel. Leiden Suppl. N°. 24$b$ § 5) het plaatsen der $n_{1b}$ moleculen aanleiding tot den factor:

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa^{n_{1b}} \prod\limits_{dr} \dfrac{n_{1b1}!}{2^{\frac{n_{1b1}}{2}} \left(\dfrac{n_{1b1}}{2}\right)!} \left\{ 1 - n_{1a} \dfrac{b}{dv_1} \right\} \left\{ 1 - (n_{1a}+2) \dfrac{b}{dv_1} \right\} \ldots\ldots \\ \left( \dfrac{4\pi r_1^2 dr_1}{dv_1} \right)^{\frac{n_{1b1}}{2}} \left\{ 1 - n_{1a} \dfrac{\pi r_1 (\tau^2 - {}^1/_{12} r_1^2)}{dv_1} \right\}^{\frac{n_{1b1}}{2}} \end{array}\right\} \quad (7)$$

We gaan nu de $n_{1c123}$ bepaald aangewezen moleculen, die behooren tot drietallen, waarin de onderlinge afstanden zijn $r_1\ (dr_1)$, $r_2\ (dr_2)$, $r_3\ (dr_3)$, plaatsen. Deze moleculen kunnen op $\frac{n_{1c123}!}{\left(\frac{n_{1c123}}{3}\right)!}$ verschillende wijzen tot dergelijke drietallen gecombineerd worden, waarbij in acht genomen is, dat 3 bepaalde moleculen nog op 3! verschillende wijzen een drietal kunnen vormen, n.l. één, waarbij: afstand molecuul 1 tot molec. $2 = r_1$, afstand 2 tot $3 = r_2$, afstand 1 tot $3 = r_3$, een tweede, waarbij: afstand 1 tot $2 = r_1$, afstand 2 tot $3 = r_3$, afstand 1 tot $3 = r_2$, enz.

We berekenen nu het aantal plaatsen beschikbaar voor een bepaald drietal, daarbij slechts gaande tot de benoodigde orde van grootte:

molecuul 1: $\varkappa$ plaatsen

molecuul 2: $\varkappa \frac{4\pi r_1^2 dr_1}{dv_1}$ ,,

molecuul 3: voor dit molecuul is beschikbaar de ruimte beschreven door de wenteling van het gearceerde parallelogram om de lijn 1,2. Inhoud: $\frac{dr_2 dr_3}{\sin\gamma} \cdot 2\pi h_1$.

Derhalve aantal plaatsen: $\frac{\varkappa . 2\pi \frac{r_2 r_3}{r_1} dr_2 dr_3}{dv_1}$, waarbij van de betrekking $r_1 h_1 = r_2 r_3 \sin\gamma$ gebruik gemaakt is.

Fig. 2.

De $n_{1c}$ moleculen geven aldus den factor:

$$\varkappa^{n_{1c}} \prod_{dr_1 dr_2 dr_3} \frac{n_{1c123}!}{\left(\frac{n_{1c123}}{3}\right)!} \left(\frac{8\pi^2\, r_1 r_2 r_3\, dr_1 dr_2 dr_3}{dv_1^{\,2}}\right)^{\frac{n_{1c123}}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarbij het product-teeken over alle mogelijke combinaties $r_1$, $r_2$, $r_3$ is uit te strekken.

Het aantal microcomplexies in de niet-individueel-bepaalde macrocomplexie, $W$, wordt nu verkregen door vermenigvuldiging van (3) met het product van de factoren (5), (7) en (8), genomen voor elk van de volume-elementen $dv_1$, $dv_2$ enz.

Men leidt hieruit af:

$$\begin{aligned}\ln W = & - n_{11a} \ln n_{11a} \ldots - n_{11b1} \ln n_{11b1} \ldots - n_{11c123} \ln n_{11c123} \\ & \ldots - \sum_{dv} \tfrac{1}{2} n^2{}_{1a} \frac{b}{dv_1} - \sum_{dv} \tfrac{1}{2} n_{1a} n_{1b} \frac{b}{dv_1} + \sum_{dv} \tfrac{1}{3} n^3{}_{1a} \frac{\beta}{dv_1} - \\ & - \sum_{dv} \tfrac{1}{6} n^3{}_{1a} \frac{b^2}{dv_1{}^2} + \sum_{dv} \sum_{dr} \left[ \frac{n_{1b1}}{2} \ln n_{1b1} - \frac{n_{1b1}}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{n_{1b1}}{2} \ln \frac{4\pi r_1{}^2 dr_1}{dv_1} - \frac{n_{1b1}}{2} \frac{n_{1a}}{dv_1} \pi r_1 (\tau^2 - \tfrac{1}{12} r^2{}_1) \right] + \\ & + \sum_{dv} \sum_{dr_1 dr_2 dr_3} \left[ \tfrac{2}{3} n_{1c123} \ln n_{1c123} - \tfrac{2}{3} n_{1c123} + \right. \\ & \left. + \frac{n_{1c123}}{3} \ln \frac{24\pi^2 r_1 r_2 r_3 \, dr_1 dr_2 dr_3}{dv_1{}^2} \right]. \end{aligned} \qquad (9)$$

De evenwichtstoestand:

Zij als in Leiden Suppl. N°. 24*b* § 5: $-\varphi(r_1)$ de potentieele energie met betrekking tot de onderlinge krachten voor een molecuulpaar met onderlingen afstand $r_1$, waarbij voor $r_1 > \tau$ $\varphi(r_1) = 0$. Voor een drietal moleculen is dan de gezamenlijke potentieele energie:

$$-\Phi(r_1, r_2, r_3) = -\{\varphi(r_1) + \varphi(r_2) + \varphi(r_3)\}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ondersteld zijnde dat de aantrekking tusschen twee moleculen door de aanwezigheid van een derde molecuul niet beinvloed wordt.

De voorwaarde voor de energie luidt dan:

$$u = \sum_{dv} \sum_{dw} n_{11} u_{w1} - \tfrac{1}{2} \sum_{dv} \sum_{dr} n_{1b1} \varphi(r_1) - \tfrac{1}{3} \sum_{dv} \sum_{dr_1 dr_2 dr_3} n_{1c123} \Phi(r_1, r_2, r_3) = const. \quad (11)$$

Na de noodige herleidingen wordt dan bv. voor de verdeeling der moleculen in enkele moleculen, in moleculen behoorende tot een paar, in moleculen behoorende tot een drietal, tot den hier noodigen graad van benadering, voor den toestand van evenwicht gevonden:

$$\left.\begin{aligned} n_a &= n \left\{ 1 - \frac{n}{v} P + \frac{n^2}{v^2} (-bP + 2P^2 + R - S) \right\}, \\ n_b &= \frac{n^2}{v} \left\{ P + \frac{n}{v} (bP - 2P^2 - R) \right\}, \\ n_c &= \frac{n^3}{v^2} S, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

waarin, van sommaties tot integralen overgaande,

$$\left.\begin{aligned} P &= \int_0^\tau e^{h\varphi(r)} \, 4\pi r^2 dr, \\ R &= \int_0^\tau e^{h\varphi(r)} (\tau^2 - {}^1/_{12}\, r^2) \, 4\pi^2 r^3 \, dr, \\ S &= \iiint e^{h\Phi(r_1, r_2, r_3)} \, 24\pi^2 r_1 r_2 r_3 \, dr_1 dr_2 dr_3. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Verder de entropie, daarna de vrije energie $\psi$, en hieruit den druk afleidend verkrijgt men ten slotte voor den tweeden viriaalcoëfficient:

$$B = \tfrac{1}{2}\, n(b-P), \qquad \qquad (14)$$

overeenkomstig Leiden Suppl. N°. 24$b$ verg. (40), en voor den derden:

$$C = \tfrac{1}{3}\, n^2 \left(\tfrac{15}{32}\, b^2 - 3bP + 3P^2 + 3R - 2S\right) \qquad \qquad (15)$$

§ 3. *Ontwikkeling voor harde aantrekkinglooze bollen.* Als eerste geval voor de ontwikkeling van $C$ volgens (15) en (13) stellen we

$$\varphi(r) = -\infty \quad \text{voor} \quad r < \sigma \qquad \qquad (16)$$

$$\varphi(r) = 0 \quad \text{voor} \quad \tau > r > \sigma \qquad \qquad (17)$$

met welk geval we te doen hebben als we beschouwen harde bolvormige moleculen met diameter $\sigma$, die geen aantrekking op elkander uitoefenen. Wij moeten dan komen tot dezelfde uitkomst, die langs anderen weg het eerst door JÄGER[1]) als tweede volumecorrectie in de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS is verkregen. Wij zullen intusschen toch de berekening op grond van de hier afgeleide algemeene uitdrukking (15) iets uitvoeriger mededeelen, omdat de hier verkregen term is te beschouwen als de eerste in de ontwikkeling van $C$ naar opklimmende machten van $h$ voor $\varphi(r) = cr^{-q}$. De berekening der volgende termen in de volgende mededeeling kan dan korter beschreven worden.

Daar ook voor $r > \tau$ $\varphi(r) = 0$ is het duidelijk, dat in de uitkomst de grootheid $\tau$ moet verdwijnen. Men vindt gemakkelijk, dat voor $\varphi(r)$ volgens (16) en (17):

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \tfrac{4}{3}\pi(\tau^3 - \sigma^3) \\ R_1 &= \tfrac{17}{18}\pi^2\tau^6 - \pi^2\tau^2\sigma^4 + \tfrac{1}{18}\pi^2\sigma^6 \end{aligned}\right\} \qquad \qquad (18)$$

waarbij wij de grootheden $P$ en $R$ met een index 1 voorzien hebben, om aan te duiden dat deze waarden de eerste termen zijn in de ontwikkeling naar opklimmende machten van $h$ voor $\varphi(r) = cr^{-q}$.

Ter berekening van $S_1 = \iiint 24\pi^2\, r_1 r_2 r_3\, dr_1 dr_2 dr_3$ kunnen we er van gebruik maken, dat $2\pi \iint \frac{r_2 r_3}{r_1}\, dr_2 dr_3$ voorstelt de ruimte, die voor molecuul 3 beschikbaar is, nadat van het drietal de moleculen 1 en 2 hunne plaats gekregen hebben.

Wij mogen de onderlinge afstanden zoo nummeren dat

$$r_1 \geqq r_2 \geqq r_3.$$

[1]) G. JÄGER. Wien Sitz.-Ber. [2$a$] 105 (1896), p. 15, 97. Voor verdere literatuur zij verwezen naar H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM. Die Zustandsgleichung § 40$a$.

Nu moeten twee deelen van het integratiegebied onderscheiden worden:

1. $2\tau > r_1 > \tau$.

De hiertoe behoorende drietallen moeten nog onderverdeeld worden in:

*a*. $r_1 - \tau > \sigma$,

*b*. $r_1 - \tau < \sigma$.

We onderstellen nl. $\tau > 2\sigma$, zoodat het geval $r_1 < 2\sigma$ niet beschouwd behoeft te worden.

Beschouwen we nader geval *a*:

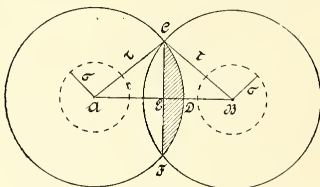


Fig. 3.

In Fig. 3, waarin $A$ en $B$ de middelpunten der moleculen 1 en 2 voorstellen, en dus $AB = r_1$, geeft het gearceerde bolsegment de voor molecuul 3 beschikbare ruimte aan. Het volume hiervan is:

$$\frac{2}{3}\pi\left(\tau^3 - \frac{3}{4}\tau^2 r_1 + \frac{1}{16} r_1^3\right).$$

Vermenigvuldiging met $12\,\pi r_1^2 dr_1$ en integratie tusschen $\tau + \sigma$ en $2\tau$ geeft voor bijdrage tot $S_1$:

$$\frac{\pi^2}{12}\{17\tau^6 - 30\tau^5\sigma - 3\tau^4\sigma^2 + 20\tau^3\sigma^3 + 3\tau^2\sigma^4 - 6\tau\sigma^5 - \sigma^6\}.$$

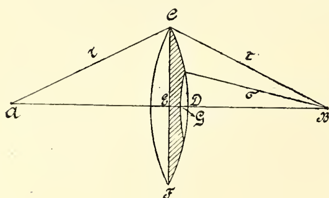


Fig. 4.

*b*. Nu is niet het geheele bolsegment $CDFE$ van Fig. 3 voor molecuul 3 beschikbaar, doch slechts dat deel ervan, dat nu niet door de afstandssfeer van molec. 2 (bol $BG$) overdekt wordt, welk deel in Fig. 4 gearceerd is aangegeven.

Dit levert na integratie naar $r_1$ tusschen $\tau$ en $\tau + \sigma$:

$$\frac{\pi^2}{12}\{30\tau^5\sigma + 3\tau^4\sigma^2 - 20\tau^3\sigma^3 - 39\tau^2\sigma^4 + 6\tau\sigma^5 + 3\sigma^6\}.$$

2. $\tau > r_1 > \sigma$.

Ook nu is te onderverdeelen, en wel in:

*a*. $\tau > r_1 > 2\sigma$,

*b*. $2\sigma > r_1 > \sigma$.

*a*. De voor molec. 3 beschikbare ruimte (gearceerd deel in Fig. 5) wordt nu begrensd door: bol $AB$ met straal $r_1$ (wegens $r_2 \leq r_1$), vlak $CDG$ (wegens $r_3 \leq r_2$), en bol $BF$ met straal $\sigma$ (afstandssfeer

van molec. 2). Bijdrage voor $S_1$ na integratie naar $r_1$ tusschen $2\sigma$ en $\tau$:

Fig. 5.

Fig. 6.

$$\frac{\pi^2}{12}\{5\tau^6-32\tau^3\sigma^3+18\tau^2\sigma^4-136\sigma^6\}.$$

*b*. Begrenzing van de voor molec. 3 beschikbare ruimte als onder *a*; nu snijdt bol $BF$ echter het vlak $CDG$, zoodat slechts eene ringvormige ruimte (gearceerd) overblijft.

Bijdrage voor $S_1$ na integratie tusschen $\sigma$ en $2\sigma$:

$$\frac{\pi^2}{12}\cdot 162\,\sigma^6.$$

De vier bijdragen sommeerende, krijgt men:

$$S_1=\frac{\pi^2}{6}\{11\tau^6-16\tau^3\sigma^3-9\tau^2\sigma^4+14\sigma^6\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Uit (14) volgt dan (den index 1 in dezelfde beteekenis als boven aanhangende):

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{3}\,n^2\cdot\tfrac{5}{6}\,\pi^2\sigma^6 \\ &= \tfrac{5}{32}\,n^2\cdot(\tfrac{4}{3}\,\pi\sigma^3)^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Deze uitkomst komt overeen met de door JÄGER l. c. het eerst gevondene. Immers, wanneer wij de grootheid $b_W$ uit de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS invoeren:

$$b_W = n\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\,\pi\sigma^3,$$

dan gaat (20) over in: $C_1=\frac{5}{8}\,b_W^2$, van welke uitkomst de overeenstemming met die van JÄGER b.v. blijkt door vergelijking met Die Zustandsgleichung l.c. p. 447 noot 1.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 3*b* uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: W. H. KEESOM en Mevr. C. NORDSTRÖM-VAN LEEUWEN: „*Ontwikkeling van den derden viriaalcoëfficient voor stoffelijke punten (eventueel harde bollen), die centrale aantrekkingskrachten evenredig aan $r^{-5}$ of $r^{-6}$ op elkander uitoefenen.*"

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

§ 1. In Meded. N°. 3*a* werd eene algemeene uitdrukking opgesteld voor den derden viriaalcoëfficient voor stoffelijke punten (eventueel harde bollen), die centrale krachten op elkander uitoefenen, en werd als bijzonder geval uit die formule de waarde van $C$ voor aantrekkinglooze bollen afgeleid. Zooals daar reeds werd opgemerkt, kan de voor dit geval gevonden waarde van $C$ tevens beschouwd worden, als de eerste term in de ontwikkeling van $C$ naar opklimmende machten van $T^{-1}$ voor eene krachtwet $r^{-(q+1)}$ (potentieele energie evenredig aan $r^{-q}$). In deze mededeeling zullen een paar volgende termen van die reeksontwikkeling berekend worden voor $q=4$ (§ 2) en $q=5$ (§ 3).

§ 2. *Ontwikkeling voor harde bollen met aantrekking evenredig aan* $r^{-5}$. We stellen nu, in plaats van (17) van de vorige mededeeling:

$$\varphi(r)=\frac{c}{r^4} \text{ voor } \tau > r > \sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)^1)$$

ontwikkelen in $P$, $R$ en $S$ volgens (13) den exponentieelen factor naar opklimmende machten van $h$, en zullen de achtereenvolgende termen door indices aangeven.

Op dezelfde wijze valt dan $C$ uiteen in

$$C=C_1+C_2+C_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$C_1$ is reeds in Meded. N°. 3*a* § 3 berekend, zie verg. (20).

Ten behoeve van $C_2$ moet berekend worden:

$$S_2=24\,\pi^2\,hc\iiint\left\{\frac{r_1\,r_2}{r_3^{\,3}}+\frac{r_1\,r_3}{r_2^{\,3}}+\frac{r_2\,r_3}{r_1^{\,3}}\right\}dr_1\,dr_2\,dr_3.$$

We verdeelen het integratiegebied op dezelfde wijze als in § 3 van Meded. N°. 3*a*. Voor het gebied onder 1, waarvoor $r_1>\tau$ en

1) De vergelijkingen zijn genummerd in aansluiting aan die van Meded. N°. 3*a*.

dus $\varphi(r_1) = 0$, is in $S_2$ de laatste term onder de accoladen te schrappen.

Verder is wat betreft de integraties naar $r_3$ en $r_2$ in het gebied $1b$ nog te onderscheiden tusschen:

$$\alpha: \quad \tau > r_2 > r_1 - \sigma$$

en

$$\beta: \quad r_1 - \sigma > r_2 > \frac{r_1}{2},$$

evenzoo in $2a$ tusschen

$$\alpha: \quad r_1 > r_2 > r_1 - \sigma$$

en

$$\beta: \quad r_1 - \sigma > r_2 > \frac{r_1}{2}.$$

In de volgende tabel zijn de verschillende integratiegrenzen voor de achtereenvolgende integraties naar $r_3, r_2$ en $r_1$ aangegeven:

| Integratie naar | 1 | | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | | $a$ | | $b$ |
| | | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ | |
| $r_3$ | $r_1 - r_2,\ r_2$ | $\sigma,\ r_2$ | $r_1 - r_2,\ r_2$ | $\sigma,\ r_2$ | $r_1 - r_2,\ r_2$ | $\sigma,\ r_2$ |
| $r_2$ | $\frac{r_1}{2},\ \tau$ | $r_1 - \sigma,\ \tau$ | $\frac{r_1}{2},\ r_1 - \tau$ | $r_1 - \sigma,\ r_1$ | $\frac{r_1}{2},\ r_1 - \sigma$ | $\sigma,\ r_1$ |
| $r_1$ | $\tau + \sigma,\ 2\tau$ | $\tau,\ \tau + \sigma$ | | $2\sigma,\ \tau$ | | $\sigma,\ 2\sigma$ |

Men vindt ten slotte:

$$S_2 = \pi^2 hc \left\{ 8\frac{\tau^3}{\sigma} - \tfrac{33}{4}\tau^2 - (11 + 6\ ln\ 2)\ \sigma^2 + 16\frac{\sigma^3}{\tau} + 6\tau^2\ ln\frac{\tau}{\sigma} \right\}. \quad . \quad (23)$$

Verder is

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= 4\pi\ hc \left\{ \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau} \right\} \\ R_2 &= \pi^2\ hc \left\{ 4\ \tau^2\ ln\frac{\tau}{\sigma} - \tfrac{1}{6}\tau^2 + \tfrac{1}{6}\sigma^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Met inachtneming van de in (18) gevonden waarde voor $P_1$ volgt

$$C_2 = \tfrac{1}{3}\ n^2\ .\ \pi^2\ hc\ (12\ ln\ 2 - \tfrac{19}{2})\ \sigma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$C_3$ volgt uit:

$$S_3 = 12\ \pi^2 h^2 c^2 \iiint \left\{ \frac{r_1 r_2}{r_3^{\,7}} + \frac{r_1 r_3}{r_2^{\,7}} + \frac{r_2 r_3}{r_1^{\,7}} + \frac{2r_1}{r_2^{\,3} r_3^{\,3}} + \frac{2r_2}{r_1^{\,3} r_3^{\,3}} + \frac{2r_3}{r_1^{\,3} r_2^{\,3}} \right\} dr_1 dr_2 dr_3,$$

waarbij voor het gebied 1 de 3de, 5de en 6de term onder de acco-

laden te schrappen zijn. Op dezelfde wijze rekenende als voor $C_2$ vindt men

$$S_3 = \pi^2 h^2 c^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5}\frac{\tau^3}{\sigma^5} + \frac{3}{4}\frac{\tau^2}{\sigma^4} + (\frac{9581}{320} - 12\,ln\,2)\frac{1}{\sigma^2} - \frac{66}{\sigma\tau} + \frac{543}{40}\frac{1}{\tau^2} - \\ \frac{3}{2}\frac{\sigma^2}{\tau^4} + \frac{8}{5}\frac{\sigma^3}{\tau^5} + \frac{18}{\sigma^2}\,ln\,\frac{\tau}{\tau-\sigma} - \frac{6}{\tau^2}\,ln\,\frac{\tau}{\tau-\sigma} \end{array} \right\} \quad (26)$$

terwijl

$$\left. \begin{array}{l} P_3 = \frac{2}{5}\pi h^2 c^2 \left\{ \frac{1}{\sigma^5} - \frac{1}{\tau^5} \right\} \\ R_3 = \pi^2 h^2 c^2 \left\{ \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^4} - \frac{1}{12}\frac{1}{\sigma^2} - \frac{5}{12}\frac{1}{\tau^2} \right\} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

zoodat ten slotte

$$C_3 = \tfrac{1}{3} n^2 \,.\, \pi^2 h^2 c^2 \left\{ \begin{array}{l} (24\,ln\,2 - \frac{2453}{160})\frac{1}{\sigma^2} + \frac{36}{\sigma\tau} + \frac{18}{\tau^2} + \\ + \frac{3\sigma^2}{\tau^4} - \frac{36}{\sigma^2}\,ln\,\frac{\tau}{\tau-\sigma} + \frac{12}{\tau^2}\,ln\,\frac{\tau}{\tau-\sigma} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Opmerking verdient, dat in $C_2$ de straal $\tau$ van de werkingssfeer niet meer optreedt. Ontwikkelt men de logarithmische termen in (28) naar opklimmende machten van $\frac{\sigma}{\tau}$, dan volgt:

$$C_3 = \tfrac{1}{3} n^2 . \pi^2 h^2 c^2 \frac{1}{\sigma^2} \{ (24 ln\,2 - \tfrac{2453}{160}) - \tfrac{16}{5} \frac{\sigma^5}{\tau^5} \ldots \} \quad . \quad . \quad (29)$$

zoodat blijkt, dat de aantrekkingskrachten, die de moleculen bij onderlinge afstanden grooter dan een zekeren afstand $\tau$, nog op elkander uitoefenen, eene bijdrage tot $C_3$ leveren, die zich tot den geheelen term verhoudt in een reden, die van dezelfde orde van grootte is als die, waarin de krachten bij vergrooting van den onderlingen afstand van $\sigma$ tot $\tau$ afnemen.

Stellen we nu $\tau = \infty$, dan vinden we door (20), (25) en (29) bijeen te voegen, en de potentieele energie bij aanraking

$$v = \frac{c}{\sigma^4}$$

in te voeren:

$$C = \tfrac{5}{32} . n^2 (\tfrac{4}{3}\pi\sigma^3)^2 \{ 1 - \tfrac{3}{5}(19 - 24\,ln\,2)\,h\,v + \tfrac{3}{400}(3840\,ln\,2 - 2453)(hv)^2 \,. \}$$

of

$$C = \tfrac{5}{32} n^2 (\tfrac{4}{3}\pi\sigma^3)^2 \{ 1 - 1{,}418\,hv + 1{,}566\,(hv)^2 \,.\,. \} \quad . \quad . \quad (30)$$

Daar $h = \frac{1}{k_P T}$, $k_P$ de bekende constante van Planck zijnde, zijn hiermede de eerste termen van de ontwikkeling van $C$ naar opklimmende machten van $T^{-1}$ gevonden.

§ 3. *Ontwikkeling voor harde bollen met aantrekking evenredig aan* $r^{-6}$. Rekenende als in § 2, doch nu met

$$\varphi(r) = \frac{c}{r^5} \qquad \text{voor } \tau > r > \sigma . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

vindt men:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= -\tfrac{1}{3} n^2 . \pi^2 h c \sigma \\ C_3 &= \tfrac{1}{3} n^2 \pi^2 h^2 c^2 \left\{ \left(\tfrac{76339}{2688} - 40 \ln 2\right) \frac{1}{\sigma^4} - \frac{32}{\sigma^3 \tau} - \frac{12}{\sigma^2 \tau^2} - \right. \\ &\left. - \frac{16}{3\sigma\tau^3} - \frac{2}{\tau^4} + \tfrac{4}{3} \frac{\sigma^2}{\tau^6} - \frac{8}{\sigma^3(\tau-\sigma)} - \frac{40}{\sigma^4} \ln \frac{\tau-\sigma}{\tau} \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (32)$$

Ook hier treedt de straal van de werkingssfeer in $C_2$ niet meer op, terwijl de ontwikkeling van $C_3$ naar opklimmende machten van $\frac{\sigma}{\tau}$ aanleiding geeft tot dezelfde opmerking als in § 2 gemaakt is betreffende de bijdrage, die de aantrekkingskrachten bij grootere onderlinge afstanden tot $C_3$ leveren.

Voor $\tau = \infty$ volgt

$$\left.\begin{aligned} C &= \tfrac{5}{32} n^2 \left(\tfrac{4}{3}\pi\sigma^3\right)^2 \left\{1 - \tfrac{6}{5} hv + \left(\tfrac{76339}{22240} - 48 \ln 2\right)(hv)^2 .. \right\} \\ &\text{of} \\ C &= \tfrac{5}{32} n^2 \left(\tfrac{4}{3}\pi\sigma^3\right)^2 \left\{1 - 1{,}2\, hv + 0{,}809\, (hv)^2 \ \ldots\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (33)$$

§ 4. Ten einde het verloop van $C$ met de temperatuur nader voor te stellen en voor de beide in deze mededeeling beschouwde krachtwetten met elkaar te vergelijken, zullen we eene voor elk gas karakteristieke temperatuur als reductietemperatuur invoeren. Aangezien de in Leiden Suppl. N°. 24*b* § 5 gevonden reeks voor $B$ (zie verg. (42) aldaar), bij het Boyle-punt nog snel genoeg convergeert, is het aangewezen hier het Boyle-punt als reductietemperatuur aan te nemen.

*a*. Voor $\varphi(r) = cr^{-4}$ gaat verg. (42) van Leiden Suppl. N°. 24*b* over in

$$B = B_\infty \left\{1 - 3\, hv - \tfrac{3}{10}(hv)^2 - \tfrac{1}{18}(hv)^3 \ \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

waarin $B_\infty$ de waarde van $B$ voorstelt voor $h = 0$, d. w. z. $T = \infty$.

Uit (34) volgt voor het Boyle-punt, waarvoor $B = 0$:

$$(hv)_B = 0{,}3223.$$

Noemen we $\frac{T}{T_B} = \mathfrak{t}_{(B)}$, waarin $T_B$ de Boyle-temperatuur voorstelt, zoodat $\mathfrak{t}_{(B)}$ de gereduceerde temperatuur is ten opzichte van het Boyle-punt als reductietemperatuur, dan gaat (34) over in:

$$B = B_\infty \left\{1 - 0.9669\, \mathfrak{t}_{(B)}^{-1} - 0{,}0312\, \mathfrak{t}_{(B)}^{-2} - 0{,}0019\, \mathfrak{t}_{(B)}^{-3} \ldots\right\} \quad . \quad (35)$$

terwijl (30) overgaat in:

$$C = C_\infty \{ 1 - 0{,}457\, t_{(B)}^{-1} + 0{,}163\, t_{(B)}^{-2} \ldots \} \quad . \quad (36)$$

*b.* Voor $\varphi(r) = cr^{-5}$ vindt men:

$$B = B_\infty \{ 1 - \tfrac{3}{2}\, hv - \tfrac{3}{14}\,(hv)^2 - \tfrac{1}{24}\,(hv)^3 - \tfrac{1}{136}\,(hv)^4 \ldots \}, \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

$$(hv)_B = 0.6070$$

$$B = B_\infty \{ 1 - 0{,}9105\, t_{(B)}^{-1} - 0.0789\, t_{(B)}^{-2} - 0.0093\, t_{(B)}^{-3} - 0.0010\, t_{(B)}^{-4} \ldots \} \quad . \quad (38)$$

$$C = C_\infty \{ 1 - 0{,}728\, t_{(B)}^{-1} + 0{,}298\, t_{(B)}^{-2} \ldots \} . \quad . \quad . \quad (39)$$

*c.* In fig. 1 zijn $B$ en $C$ volgens de boven gegeven formules als functies van $t_{(B)}$ voorgesteld. Daarbij zijn $B_\infty$, resp $C_\infty = 1$ aangenomen.

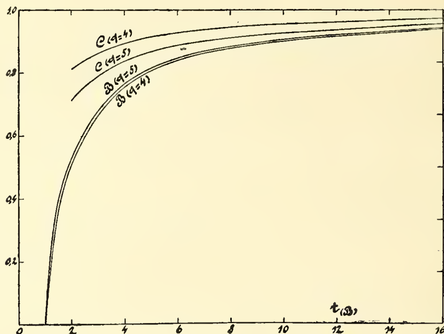



Fig. 1.

Gelijk men ziet, is $C$ in het voorgestelde temperatuurgebied positief. $C$ neemt af met afnemende temperatuur, echter in belangrijk geringere mate dan het geval is met $B$.

Hoe het gedrag zal zijn naar lagere temperaturen, kan niet gezegd worden zoolang niet meer termen van de reeksontwikkelingen berekend zijn. De hier berekende termen zouden, indien volgende hierin geene wijziging zouden brengen, aanleiding geven tot het optreden van een minimum in $C$, waarna $C$ weer zou gaan stijgen [1]), zoodat het niet onwaarschijnlijk is dat $C$ tot een belangrijk lager temperatuurgebied, dan dat, waarvoor $C$ in Fig. 1 is voorgesteld, positief blijft.

Terwijl het verloop van $B$ voor de beide beschouwde krachtwetten boven het Boyle-punt slechts weinig verschilt, neemt $C$ met dalende temperatuur voor $q = 5$ althans in het begin belangrijk sneller af dan voor $q = 4$.

[1]) Vergel. de voorstelling van de waarden van $C$ voor helium in H. Kamerlingh Onnes en W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung. Leiden. Suppl. N⁰. 23, § 38, Fig. 15.

Voor de boekerij worden ten geschenke aangeboden:

1. door den Heer F. M. JAEGER een exemplaar van zijn werk: *„Elementen en atomen eens en thans"*.

2. door den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF een exemplaar van de dissertatie van den Heer P. KRUIZINGA: *„Bijdrage tot de kennis der sedimentaire Zwerfsteenen in Nederland"*.

3. door den Heer H. HAGA een exemplaar van de dissertatie van den Heer M. J. HUIZINGA: *„De unipolaire geleiding van kristaldetectoren"*.

4. door den Heer F. A. F. C. WENT, namens Prof. C. GORINI te Milaan: overdrukken van een vijftal zijner verhandelingen, verschenen in de *„Rendiconti del reale Instituto Lombardo di scienze e lettere"* en in *„Rendiconti della reale Accademia dei Lincei, Roma"*.

5. door den Heer M. W. BEIJERINCK, namens den Correspondent der Afdeeling, den Heer S. H. KOORDERS te Buitenzorg, een exemplaar van diens werk: *„Botanisch overzicht der Rafflesiaceae van Nederlandsch-Indië"*.

De vergadering wordt gesloten.

---

**6 December 1918.**

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

**VAN ZATERDAG 26 OCTOBER 1918.**

**DEEL XXVII.**

## N°. 4.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.


## INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON en H. KAMERLINGH ONNES, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een bij renvooi van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d.d. 17 October 1918, n°. 2968, afd. K. W. met verzoek om bericht en raad aan de Afdeeling gezonden request van den Heer Dr. H. NORT te Gouda, waarin deze eene Rijkssubsidie van *f* 300.— vraagt voor het verrichten van sterretellingen, uit te voeren op de platen van FRANKLIN-ADAMS.

De Voorzitter stelt het request in handen van de Heeren J. C. KAPTEIJN en W. DE SITTER met verzoek om prae-advies, uit te brengen in een volgende vergadering.

3°. Bericht van het overlijden op 21 October j.l. van het lid der Afdeeling, Prof. Dr. H. E. J. G. DU BOIS.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

De Voorzitter zegt naar aanleiding van dit bericht het volgende:

Het verlies dat wij door het overlijden van du Bois hebben geleden, is wel zeer droevig. Na zijn terugkeer in Nederland tot gewoon lid der Akademie verkozen, heeft hij nauwelijks kunnen deelnemen aan onze werkzaamheden, waarin hij als buitenlandsch lid steeds warme belangstelling getoond had. Zijn nieuwe werkplaats, waarvan hij de inrichting met de uiterste zorg had voorbereid en die door de wijze waarop zij tot stand kwam toonde, hoeveel hij voor den bloei der wetenschap in het vaderland over had, heeft hij niet voltooid mogen zien. Vervlogen is onze hoop dat hij in gelukkigen arbeid de kroon zou zetten op zijn reeds langdurige en rijke werkzaamheid, dat talrijke leerlingen er leiding en opwekking bij hem zouden vinden.

Laat ik trachten, hulde aan zijn nagedachtenis te brengen door in uwe herinnering terug te roepen, wat wij hem te danken hebben.

HENRI EDUARD JOHAN GODFRIED DU BOIS werd den 24sten Juni 1863 te Velp in Gelderland geboren en ontving zijn opleiding deels aan het Instituut Noorthey te Voorschoten, deels op de Hoogere Burgerschool aan het Bleyenburg te 's-Gravenhage. Na het eindexamen te hebben afgelegd, bezocht hij van 1881 tot 1883 de Polytechnische School te Delft; hij had er Bosscha onder zijn leermeesters en behaalde het diploma B. Vervolgens werkte hij twee jaren te Glasgow bij Lord Kelvin, toen nog Sir William Thomson, aan wien hij steeds met eerbiedige bewondering en genegenheid is blijven denken, getuige de derde Kelvin Lecture, die hij in 1912 op uitnoodiging van „The Institution of electrical engineers" heeft gehouden. Trouwens, hij mocht zich in neiging en geestesrichting aan dezen grooten natuurkundige, met wiens werk het zijne menigen trek gemeen heeft, verwant gevoelen.

In 1885 keerde du Bois naar Nederland terug, echter slechts voor korten tijd; den doctoralen graad, dien hij wenschte te

verwerven, moest hij buiten onze grenzen zoeken. Te Straatsburg vond hij in KUNDT een voortreffelijken en bezielenden leermeester. Een uitvoerige bestudeering van de magnetische circulaire polarisatie in kobalt en nikkel, een verschijnsel, dat KUNDT het eerst bij dunne laagjes van magnetische metalen had waargenomen, leverde de stof voor het proefschrift waarop hij aldaar in 1887 promoveerde. Een jaar daarna verscheen een onderzoek over de magnetische susceptibiliteit en de constante van VERDET van verschillende doorschijnende stoffen.

Weldra volgde hij KUNDT naar Berlijn, waar al spoedig nieuwe uitkomsten van zijn werkkracht getuigden. Met RUBENS, met wien hij ook later menigmaal op gelukkige wijze zou samenwerken, breidde hij de proeven van KUNDT over de lichtbreking door dunne metaalprisma's tot scheef invallende stralen en tot licht van verschillende golflengte uit. In 1892 werd hij als privaatdocent aan de Berlijnsche Universiteit toegelaten. Zijn „Habilitationsschrift" handelde over de wijzigingen die gepolariseerd licht ondergaat bij doorlating of terugkaatsing door roosters van fijne metaaldraden en andere stelsels die in verschillende richtingen ongelijke eigenschappen hebben, een veld van onderzoek, waarop hij zich ook in later jaren herhaaldelijk heeft bewogen. Nadat hij vervolgens van 1896 tot 1901 buitengewoon hoogleeraar aan de Berlijnsche Universiteit was geweest, gaf hij gaarne gevolg aan een beroep naar Utrecht, waar hem de door het overlijden van V. A. JULIUS opengevallen leerstoel voor theoretische natuurkunde werd aangeboden. Helaas noopte, zeer tot leedwezen van zijn Nederlandsche vakgenooten en vrienden, de invloed dien het klimaat hier te lande op zijn gezondheid had, hem reeds in 1904 naar Berlijn terug te keeren.

Ofschoon het lot heeft gewild dat DU BOIS een groot deel van zijn leven in den vreemde zou doorbrengen en hij zich in de Berlijnsche wetenschappelijke kringen, in welke hij de algemeene achting genoot, wel tehuis gevoelde, hing zijn hart toch aan het vaderland. De banden die hem daarmee verbonden, heeft hij nooit laten verslappen. In de tien jaren van zijn buitenlandsch lidmaatschap, bezocht hij herhaaldelijk onze bijeenkomsten en gaarne greep hij elke gelegenheid, zooals de

vergaderingen van het Natuur- en Geneeskundig Congres aan, om de Nederlandsche natuuronderzoekers te ontmoeten. Te Berlijn heeft hij veel gedaan in het belang van daar vertoevende landgenooten en ik mag u in dit verband eraan herinneren, dat, toen president KRÜGER bij zijn bekend bezoek aan Europa ook in een enkele Duitsche stad werd ontvangen, DU BOIS hem als tolk terzijde stond.

De gevoelens die in dit alles tot uiting kwamen, bezielden hem ook toen hij uit eigen middelen zijn laboratorium stichtte, dat, vooral nadat het in de Herwarthstrasse was gevestigd, zich over de geheele wereld een uitstekenden naam verwierf. Men heeft ervan gezegd dat men, als men er binnen trad, gevoelde op Hollandschen bodem te staan. Hij zelf wenschte het dan ook als een Nederlandsche instelling beschouwd te zien. De naam „BOSSCHA-laboratorium" moest daarvan getuigen, en als assistent vond men er een jongen Nederlandschen natuurkundige, eerst Dr. G. J. ELIAS, later Dr. W. J. DE HAAS.

In dit laboratorium heeft hij met een reeks van leerlingen, die veelal uit verre landen, uit de Vereenigde Staten en Japan, tot hem waren gekomen, vele jaren ingespannen gewerkt. De studie der electromagnetische verschijnselen en van de magnetische eigenschappen der materie stond daarbij op den voorgrond, en inderdaad kon op dit gebied de gelukkige vereeniging van wiskundige bekwaamheid, experimenteel talent en zin voor practische toepassing, die men bij hem vond, ten volle tot haar recht komen. Zoo kon hij de natuurkunde met hulpmiddelen van hooge waarde verrijken, zijn galvanometers, zijn electromagneten en zijn magnetische balans, alle even oordeelkundig ontworpen als meesterlijk uitgevoerd. De constructie dezer instrumenten ging met grondige theoretische onderzoekingen hand in hand.

Een eenigszins volledig overzicht van wat in het BOSSCHA-laboratorium gedaan is, zou de grenzen die ik mij moet stellen, ver overschrijden. Ik bepaal mij er dus toe te vermelden, dat de magnetische constanten van een groot aantal elementen in zoo zuiver mogelijken toestand voor een uitgestrekt temperatuurinterval bepaald werden, dat de magnetische susceptibiliteit van water met groote nauwkeurigheid werd

gemeten en dat belangrijke uitkomsten werden verkregen over den invloed van een magnetisch veld op het electrische geleidingsvermogen. Laat ik ook het uitgebreide onderzoek over den invloed van de temperatuur en de magnetisatie op selectieve absorptie- en fluorescentiespectra niet vergeten. Het leverde een schat van gegevens over het inverse ZEEMAN-effect, over den invloed n.l. van een magnetisch veld op de absorptielijnen. Deze waarnemingen zullen ongetwijfeld voor de theorie, als die eenmaal zoo ver is, dat zij de uiterst ingewikkelde verschijnselen kan ontwarren, van groote beteekenis zijn. Zij bewezen al aanstonds, dat het merkwaardige verschijnsel dat PASCHEN en BACK bij gasvormige lichamen hadden waargenomen, vereenvoudiging der splitsingen bij voortdurende versterking van het magnetische veld, zich ook bij kristallen voordoet.

Dat DU BOIS tot de natuurkundigen behoorde, die de magnetische verschijnselen in hunne haast verbijsterende verscheidenheid het best overzagen en doorgrondden, werd in den loop der jaren algemeen erkend; aan het in 1900 te Parijs gehouden Natuurkundig Congres bood hij een rapport erover aan, zooals slechts weinigen het hadden kunnen samenstellen. Bij andere gelegenheden zette hij de algemeene theorie van het electromagnetische veld en haar toepassing op ferromagnetische lichamen uiteen; het uitvoerigst in zijn reeds in 1894 verschenen boek „Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung", dat tot de standaardwerken over het magnetisme mag gerekend worden.

Eindelijk heeft hij, als voorbereiding tot dieper doordringen in het mechanisme der verschijnselen en in aansluiting aan het van WILHELM WEBER afkomstige denkbeeld van draaibare moleculaire magneten, de beweging in een magnetisch veld van tollen waaraan magneten bevestigd zijn, onderzocht, een vraagstuk, dat ook uit wiskundig oogpunt veel bekoring voor hem had. De theoretische gevolgtrekkingen werden door de waarneming bevestigd en er werden treffende analogieën met het gedrag van verschillende lichamen in het magnetisch veld gevonden.

Rijk aan kennis en ervaring, vol plannen voor de toekomst

en met tal van vraagstukken die hij zou kunnen ter hand nemen, keerde DU BOIS tot ons terug. Maar na weinige maanden reeds wierp het ernstige lijden dat hem had aangetast zijn schaduwen over zijne en onze verwachtingen. Na een kortstondig schijnbaar herstel bleek alle zorg en hulp machteloos; den 21sten dezer maand is hij ons ontvallen. In de wetenschap, die hij trouw en met toewijding heeft gediend, laat hij de blijvende sporen zijner werkzaamheid na. Wij zullen ons hooggeschat medelid, onzen goeden vriend, niet vergeten.

---

De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt het fotografisch portret aan van wijlen zijn broeder, het lid der Afdeeling, den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Met een woord van dank aanvaardt de Voorzitter dit portret, dat geplaatst zal worden bij de verzameling der portretten van overleden leden der Akademie.

Naar aanleiding van de missive van Z. E. den Minister van Waterstaat van 9 September 1918 La C, Afdeeling Waterstaat, adviseeren de leden der *Geologische Commissie* in wier handen deze missive gesteld werd met verzoek om prae-advies, dat de Afdeeling het volgende zal antwoorden aan den Minister:

De Afdeeling Wis- en Natuurkunde der Kon. Akad. van Wetenschappen is van oordeel, dat met de instelling van den geologischen dienst in Nederland het werk der Geologische Commissie uit haar midden als geeindigd mag beschouwd worden en dat dus ook geen gelden meer voor haar behoeven beschikbaar gesteld te worden. De Afdeeling is voornemens de Geologische Commissie op haar verzoek van haar taak te ontheffen en te ontbinden.

*De Commissie voornoemd*
(get.) C. LELY, *Voorzitter.*
,, G. A. F. MOLENGRAAFF,
*Secretaris.*

In overeenstemming met dit advies, waaraan de Afdeeling hare goedkeuring hecht, doet de Voorzitter het voorstel thans over te gaan tot het opheffen der Geologische Commissie en haar te ontbinden. Aldus wordt besloten.

De Voorzitter richt, namens de Afdeeling, een woord van dank tot de laatste drie leden der commissie, de Heeren C. LELY, K. MARTIN en G. A. F. MOLENGRAAFF, voor al hetgeen zij in die kwaliteit in het belang der geologie van Nederland gedaan hebben.

**Meteorologie.** — De Heer VAN DER STOK biedt een mededeeling aan: *„Over het dagelijksch verval van den waterstand op de Nederlandsche kusten"*.

1. De methode van de Harmonische Analyse, door G. H. DARWIN uitgewerkt en toegepast, kan in zooverre bogen op een volkomen succes, dat alle uit de theorie van maans- en zonsbeweging afgeleide zuiver periodieke termen hun weerslag vinden in de waterbeweging, zoowel de horizontale als de vertikale.

Amplitude en phase zijn, wegens de verdeeling van land en water, niet te berekenen, maar de perioden, uit de theorie afgeleid en door rangschikking der gegevens verkregen, stemmen overeen en niet alleen die der partieele getijden van zuiver astronomischen oorsprong, maar ook die der physische getijden, die het gevolg zijn van de voortplanting van golven in water waarvan de diepte niet groot is ten opzichte van de amplitude der golfbeweging.

Ook tot eene blijkbaar juiste verklaring van z.g. abnormale getijden, zooals voorkomen in de zeeën van Nederlandsch-Indië, de Chineesche- en Karaïbische zee, heeft deze methode den juisten weg aangewezen.

Aan kusten bespoeld door diepe zeeën als die van Nederlandsch-Indië, waar de neven- en samengestelde getijden niet of in geringe mate optreden en men volstaan kan met de berekening van een zevental partieele getijden, hebben de hiermede berekende en door het observatorium te Batavia uitgegeven getijtafels goede, althans vóór de zeevaart bruikbare resultaten opgeleverd. De graad van overeenstemming echter tusschen de werkelijk waargenomen beweging en die welke met behulp der getijconstanten voor een bepaalde plaats zijn berekend is, voor zooverre mij bekend is, nog niet aan een systematisch en uitvoerig onderzoek onderworpen. Alleen toch een onderzoek op groote schaal uitgevoerd geeft, bij gevonden verschillen, kans op inzicht in de oorzaken daarvoor en dit zou, zelfs voor diepzee-kusten en een beperkt aantal getijden, zulk een tijd en kosten roovende arbeid zijn, dat tot nog toe niemand dit heeft ondernomen. Voor ondiepe zeeën, als de Noordzee, waar met een dertigtal termen rekening moet worden gehouden, is zulk een werk bijna onuitvoerbaar te noemen.

Volgens mondelinge mededeeling van Prof. H. G. VAN DE SANDE

Bakhuyzen, die reeds in 1895 getijconstanten voor Helder, IJmuiden en Hoek van Holland liet berekenen, bleek uit een ingesteld onderzoek, dat de overeenstemming tusschen waarneming en berekening voor IJmuiden wél, voor Helder echter weinig bevredigend was.

In het Geographical Journal (Aug. 1918) is een kort bericht opgenomen meldende dat Commander Warburg R. N., op grond van eene vergelijking, uitgebreid over verscheidene jaren, tot de overtuiging gekomen was, dat de getijden in de Noordzee op de Britsche kusten op onvolkomen wijze bij toepassing der getijconstanten werden weergegeven. Zijne meening is, dat dergelijke verschillen tusschen theorie en waarneming hun grond kunnen vinden in het optreden van seiches (eigen schommelingen der watermassa's onder den invloed van wind) en dat ook interferentie tusschen de golven stammende uit het Kanaal en zich voortplantend uit de Noorweegsche Zee langs de Schotsche kust hierbij eene rol zou spelen.

Het is duidelijk, dat het laatstgenoemde verschijnsel geen oorzaak van verschil kan zijn, daar hierdoor geen golven met aan de theorie vreemde perioden kunnen ontstaan.

2. Het scheen mij wenschelijk om, alvorens de weg eener directe vergelijking in te slaan, volgens een andere, meer economische, zij het ook minder scherp afgebakende methode te trachten tot een nadere kennis te geraken van mogelijke variaties in de getijbeweging, niet voorzien in de astronomische en physische theorie, waarbij dan in de eerste plaats aan meteorologischen invloed, voornamelijk van den wind, wordt gedacht. De aangewezen weg is gebruik te maken van de uitvoerige gegevens door den Algemeenen dienst van den Waterstaat gepubliceerd; voor elken dag sinds het jaar 1884 zijn in die publicaties opgenomen:

1°. de waterstand van elken dag op de uren 2, 8, 14 en 20.

2°. de hoogten en tijdstippen van hoogsten en laagsten waterstand, eveneens voor elken dag, beide ten opzichte van A. P. en N. A. P.

3°. maandgemiddelden van deze grootheden.

Omtrent de wijze waarop de hoogste (H. W.) en laagste (L. W.) waterstand binnen een etmaal tot stand komt kan men zich de volgende voorstelling vormen.

Daar het hoofdgetij $M_2$ verreweg het grootst is, zullen de uiterste waarden — afgezien van aan het eigenlijk getij vreemde storingen — voorkomen in den omtrek van de grootste en kleinste waarden van $M_2$.

De nevengetijden $M_4$, $M_6$ enz. zullen in vast verband met $M_2$ zich doen gelden, dat voor H. W. niet gelijk en tegengesteld is aan dat

voor L. W.; hun gezamenlijke invloed moge door $M_h$ en $M_l$ worden voorgesteld.

De overige getijden $S_2$, N; K, O. enz. zullen, daar zij ten opzichte van $M_2$ in cyclisch varieerende verhouding staan, op systematische wijze het maximum en minimum verschuiven en de tegenstelling op een gemiddeld constante wijze verscherpen met gelijke absolute grootheden voor H. W. en L. W.; deze grootheid moge Q genoemd worden. Het verschil tusschen het nulpunt van de schaalaflezing en gemiddeld niveau wordt I (index) genoemd.

Men kan dan stellen:

$$H. W. = M_h + Q + I$$
$$L. W. = M_l - Q + I$$

waaruit volgt

$$2\,Q = (H. W. - L. W.) - (M_h - M_l)$$
$$2\,I = (H. W. + L. W.) - (M_h + M_l).$$

De grootheden $M_h$ en $M_l$ kunnen terstond ontleend worden aan het werk „Getijkrommen voor plaatsen aan de Nederlandsche kust en benedenrivieren door M. H. VAN BERESTEYN", uitgegeven (1911) door den Algemeenen Dienst van den Waterstaat, zoodat uit deze formulen de grootheden I en Q zonder veel moeite te berekenen zijn.

De grootheid I, op deze wijze afgeleid, moet binnen nauwe grenzen overeenstemmen met den gemiddelden waterstand berekend uit den stand op de uren: 2, 8, 14 en 20 en — indien maandgemiddelden worden gevormd uit een groot aantal jaren — de jaarlijksche variatie vertoonen.

De grootheid Q zou, indien het gemiddelde dagelijksche getijverschil uitsluitend bepaald kan worden door de getijconstanten, dezelfde moeten zijn in elke maand; indien meteorologische invloeden in het spel treden kunnen systematische verschillen verwacht worden in den vorm van een jaarlijksche variatie.

3. Voor dit onderzoek zijn, voor 17 plaatsen gelegen aan de Nederlandsche kusten in de Noordzee en Zuiderzee, maandgemiddelden gebezigd over een tijdvak van 25 jaren, 1892—1916, zoowel van H. W. en L. W. als van den gemiddelden waterstand.

In tabel I vindt men voor deze plaatsen het dagelijksch verval in elke maand; de waarschijnlijke fout dezer grootheden is berekend, maar wordt hier kortheidshalve niet gegeven; zij is overal klein; de regelmatige gang wijst trouwens terstond op de vertrouwbaarheid dezer getallen.

Bij de zes eerste stations treedt een duidelijk uitgesproken jaarlijksche variatie te voorschijn met een grootste waarde omstreeks

TABEL I. Maandgemiddelden van het dagelijksch verval in den waterstand, in centimeters, 1892—1916.

| | Delfzijl | Zoutkamp | Vlieland | Helder | IJmuiden | Brouwershaven | Vlissingen | Harlingen | Hindeloopen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Januari | 268.2 | 193.5 | 155.0 | 117.2 | 164.5 | 238.5 | 366.0 | 126.5 | 58.3 |
| Februari | 272.2 | 196.0 | 155.0 | 118.4 | 166.6 | 240.1 | 370.7 | 126.8 | 58.2 |
| Maart | 278.0 | 202.6 | **157.4** | **119.2** | 167.3 | 242.0 | 375.6 | 127.8 | 58.6 |
| April | **282.9** | 232.3 | 157.9 | 118.7 | **167.4** | **243.5** | **377.5** | **128.5** | **58.7** |
| Mei | 282.6 | 241.5 | 156.8 | 116.7 | 165.0 | 243.6 | 377.1 | 128.2 | 57.7 |
| Juni | 280.8 | 240.2 | 155.5 | 115.5 | 162.9 | 242.9 | 375.4 | 127.2 | 57.2 |
| Juli | 278.6 | **242.4** | 154.5 | 115.2 | 159.6 | 242.1 | 375.3 | 127.0 | 56.2 |
| Augustus | 272.8 | 236.2 | 152.9 | 113.5 | 157.2 | 239.8 | 374.1 | 126.0 | 56.0 |
| September | 267.9 | 229.8 | 151.0 | 113.2 | *154.7* | 237.7 | 371.5 | 125.3 | 55.9 |
| October | 262.7 | 220.4 | *150.7* | *113.0* | 155.9 | 235.7 | 367.4 | *125.1* | *55.8* |
| November | *260.8* | 205.3 | 151.2 | 113.9 | 157.2 | *235.4* | 363.7 | 125.4 | 56.4 |
| December | 262.6 | *191.1* | 153.1 | 115.8 | 162.0 | 236.3 | *363.6* | 126.2 | 57.5 |
| Jaar | 272.4 | 219.3 | 154.3 | 115.9 | 161.7 | 239.8 | 371.5 | 126.7 | 57.2 |
| $M_h - M_l$ | 246.3 | 213.2 | 140.6 | 109.8 | 145.7 | 226.2 | 349.0 | 117.0 | 51.7 |

| | Stavoren | Lemmer | Kraggenburg | Schokland | Elburg | Nijkerk | Enkhuizen | Urk |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Januari | **48.3** | 22.9 | 25.0 | **21.5** | 28.8 | *36.6* | **32.2** | **23.6** |
| Februari | 48.0 | 21.1 | 24.4 | 19.9 | *28.8* | 37.8 | 31.6 | 20.5 |
| Maart | 47.8 | 20.4 | 25.1 | 20.4 | 30.4 | 38.4 | 31.2 | 20.0 |
| April | 47.7 | 18.8 | 24.0 | 19.0 | 30.5 | 39.2 | 30.8 | 19.1 |
| Mei | 47.0 | 18.0 | 23.5 | 18.4 | 30.3 | 38.4 | 30.4 | 18.7 |
| Juni | 46.3 | 17.6 | *23.4* | *18.4* | 30.2 | 38.9 | *30.1* | *18.0* |
| Juli | *45.3* | *17.5* | 23.6 | 19.8 | 30.4 | 39.0 | 30.4 | 18.6 |
| Augustus | 45.4 | 18.0 | 24.1 | 18.7 | 30.5 | 39.2 | 30.2 | 18.8 |
| September | 45.4 | 18.0 | 23.5 | 19.5 | 30.1 | **39.6** | *30.1* | 19.0 |
| October | 45.7 | 22.4 | 24.6 | 20.2 | **31.6** | 39.4 | 30.7 | 19.9 |
| November | 46.2 | 21.5 | 25.0 | 21.1 | 30.9 | **39.6** | 31.2 | 20.5 |
| December | 47.0 | **23.0** | **26.4** | **21.5** | 30.6 | 39.3 | 31.9 | 21.4 |
| Jaar | 46.7 | 19.9 | 24.4 | 19.9 | 30.3 | 38.8 | 30.9 | 19.8 |
| $M_h - M_l$ | 41.4 | 11.1 | 15.1 | 13.5 | 19.6 | 26.8 | 26.1 | 15.3 |

Maart en April, een kleinste, minder scherp naar tijd afgebakend, omstreeks September en October. Alleen Zoutkamp (Lauwerzee) maakt op dezen regel voor de Noordzeestations eene uitzondering; hier valt het maximum in Juli, het minimum in December, de jaarlijksche variatie is hier het grootst en bedraagt 51.3 cM. of 23.4 °/₀ van de gemiddelde jaarlijksche waarde; Delfzijl vertoont een jaarlijksche variatie van 22.1 cM. of 8.1 °/₀ van het jaargemiddelde.

Harlingen en Hindeloopen volgen nog den regel van de Noordkust, maar bij Stavoren draagt reeds het dagelijksch verval het karakter van de Zuiderzeestations die — met uitzondering van Elburg en Nijkerk — alle een grootste waarde in December of Januari, een kleinste in Juni of Juli vertoonen. Bij de twee zuidelijkste stations is daarentegen een maximum omstreeks October, een minimum in Januari of Februari op te merken.

Het feit, dat de gemiddelde windkracht het sterkst is in Januari en December, het zwakst in Juni en Juli, wijst op een verband — althans in de Zuiderzee — tusschen het dagelijksch verval en de turbulentie van den wind, hetgeen ook in een ondiep bekken, waar de stuwing, door den wind teweeggebracht, krachtig en in vlagen afwisselend optreedt begrijpelijk is.

Het zou dus rationeel zijn na te gaan welke de correlatie is tusschen windrichting en kracht en het verval. Zulk een onderzoek zou echter geruimen tijd vorderen en het lag dus voor de hand om, bij wijze van voorloopig onderzoek, en omdat de voor dit doel noodige afwijkingen voorhanden lagen, te onderzoeken of er, zooals verwacht kon worden, een positieve correlatie bestaat tusschen verval en stand, daar de laatste afhankelijk is van den wind.

Zooals uit Tabel II blijkt is dit inderdaad het geval; overal is in de Zuiderzee de correlatie positief en zoo krachtig, dat de samengang dier twee grootheden niet kan betwijfeld worden.

Het is voornamelijk op grond van deze afhankelijkheid van het z.g. „tijverschil" van meteorologischen invloed, dat vóór deze grootheid aan den naam dagelijksch verval de voorkeur is gegeven.

Meermalen toch heeft de uitbreiding van het getijbegrip, ook tot grootheden die niet uitsluitend haar oorsprong hebben in de werking der hemellichamen, aanleiding gegeven tot misverstand. Omtrent de wijze waarop de wind bijdraagt tot de vergrooting van het dagelijksch verval en als oorzaak op kan treden van de jaarlijksche variatie kan natuurlijk zonder nader onderzoek geen gedocumenteerd oordeel worden uitgesproken. Het schijnt mij echter toe, dat hier moet gedacht worden zoowel aan het optreden van „seiches" als

TABEL II.

Correlatie-factoren tusschen het dagelijksch verval en den waterstand uit maandgemiddelden (1892—1916).

| | Delfzijl | Zoutkamp | Vlieland | Helder | Ymuiden | Harlingen | Hindeloopen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Januari | +0.065 | —0.525 | —0.413 | +0.377 | 0.000 | +0.540 | +0.464 |
| Februari | —0.523 | —0.468 | —0.487 | —0.051 | —0.264 | +0.142 | +0.125 |
| Maart | —0.431 | —0.469 | —0.231 | —0.145 | —0.235 | +0.296 | +0.005 |
| April | —0.240 | —0.479 | 0.400 | +0.040 | +0.438 | +0.385 | +0.069 |
| Mei | —0.145 | —0.505 | —0.320 | +0.074 | —0.083 | +0.308 | +0.121 |
| Juni | —0.529 | +0.068 | —0.534 | —0.009 | —0.170 | +0.424 | —0.124 |
| Juli | —0.256 | —0.230 | —0.444 | —0.221 | —0.153 | —0.283 | —0.240 |
| Augustus | —0.312 | —0.708 | —0.393 | —0.100 | —0.101 | +0.260 | +0.085 |
| September | —0.218 | —0.559 | +0.047 | —0.199 | —0.003 | —0.127 | +0.345 |
| October | +0.077 | —0.864 | —0.042 | —0.138 | —0.238 | +0.335 | +0.640 |
| November | —0.200 | —0.218 | —0.371 | +0.437 | —0.075 | +0.434 | +0.533 |
| December | —0.542 | —0.531 | —0.492 | —0.130 | —0.161 | +0.040 | +0.162 |

| | Stavoren | Lemmer | Kraggenburg | Elburg | Nijkerk | Enkhuizen | Urk |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Januari | +0.016 | +0.608 | +0.723 | +0.855 | +0.713 | +0.662 | +0.630 |
| Februari | —0.160 | +0.758 | +0.450 | +0.611 | +0.439 | +0.417 | +0.498 |
| Maart | —0.128 | +0.798 | +0.745 | +0.737 | +0.509 | +0.377 | +0.754 |
| April | —0.263 | +0.793 | +0.785 | +0.793 | +0.856 | +0.353 | +0.377 |
| Mei | +0.095 | +0.382 | +0.446 | +0.567 | +0.189 | +0.037 | +0.048 |
| Juni | —0.052 | +0.653 | +0.595 | +0.351 | +0.108 | +0.454 | +0.417 |
| Juli | —0.186 | +0.706 | +0.586 | +0.652 | +0.176 | +0.186 | +0.462 |
| Augustus | +0.099 | +0.632 | +0.541 | +0.460 | +0.091 | +0.101 | +0.231 |
| September | —0.060 | +0.904 | +0.916 | +0.829 | +0.727 | +0.582 | +0.645 |
| October | +0.199 | +0.676 | +0.794 | +0.761 | +0.820 | +0.612 | +0.561 |
| November | +0.130 | +0.636 | +0.691 | +0.784 | +0.736 | +0.631 | +0.617 |
| December | —0.163 | +0.661 | +0.745 | +0.842 | +0.591 | +0.558 | +0.800 |

aan golven, die door den in afwisselende vlagen waaienden wind worden opgevoerd. De periode dezer golven is klein ten opzichte van die van het astronomisch getij en in dat geval zullen hetzij vóór, hetzij na de uiterste toppen hiervan steeds zich nog hoogere of lagere vormen, die dan als H. W. en L. W. worden gekozen.

Ook zal zich in de zeer ondiepe Zuiderzee een krachtiger getijbeweging kunnen voortplanten bij hoog- dan bij laagwater, omdat de demping der golfbeweging door wrijving, langs den bodem en tusschen de stroken van verschillende diepte, aanmerkelijk geringer wordt.

Geheel en al onmogelijk schijnt het, zonder nadere kennis van de omstandigheden, waaronder de maxima en minima in April en October bij de Noordzeestations tot stand komen, een oordeel te vellen over de oorzaak hiervan en de *negatieve* correlatie die, voornamelijk bij de Noordelijke plaatsen, wel is waar niet sterk maar toch duidelijk te voorschijn treedt. In tabel II zijn Brouwershaven en Vlissingen niet opgenomen, omdat daar positieve en negatieve corr. fact. elkander afwisselen.

---

**Dierkunde.** De Heer J. F. VAN BEMMELEN doet een mededeeling over: *„De beteekenis van generieke en specifieke kenmerken, getoetst aan de vleugelteekening der Sphingiden".*

Wanneer de regels voor 't kleurenpatroon der vleugels, die ik uit vroegere onderzoekingen, zoowel van anderen als van mijzelf, heb meenen te mogen afleiden, juist zijn, dan moeten ze geschikt blijken om bij 't in behandeling nemen van een nieuwe groep als leiddraad te dienen voor 't kiezen van een uitgangspunt, d. w. z. van een vorm, die het gemeenschappelijk patroon in zijn oorspronkelijkste, minst gewijzigde gedaante vertoont.

Te oordeelen naar die regels, schijnt van de mij bekende Sphingiden, *Smerinthus populi* (Fig. 1) mij een zeer oorspronkelijke vorm, niettegenstaande de roode beharing die aan den bovenkant het wortelveld der achtervleugels bedekt, en daar het primitieve patroon verduistert.

Immers voor- en achtervleugel komen aan boven- en onderkant sterk met elkaar overeen, en vertoonen een patroon, dat over de geheele vleugeloppervlakte naar hetzelfde eenvoudige motief van teekening is opgebouwd, t. w. regelmatige afwisseling van donkerder en lichter dwarslijnen en banden, samengesteld uit vlekken, die in beide een sterke neiging vertoonen tot den halvemaanvorm (met de convexiteit naar buiten), maar toch hier en daar duidelijk biconcaaf (zandloopervormig) zijn. Hierbij zij voorloopig afgezien van de schakeeringen in tint, die zoowel in de donkere als in de lichte vlekkenbanden voorkomen. Op den bovenkant van den voorvleugel (b.k.v.v.) loopen ter weerszij van de lichte discoïdale vlek en op eenigen afstand van deze, twee van die donkere lijnen, waardoor een donkerder middenveld wordt gescheiden van twee lichtere dwarsbanen, die elk voor zich aan den anderen kant weder door een dergelijke bandlijn van donkere vlekken worden begrensd. Schuin over dit donkere middenveld, langs den buitenkant der lichte discoïdaalvlek, kan men echter nogmaals een donkere bandlijn onderscheiden, en in het gedeelte tusschen deze laatste en de buitenste grenslijn nog eenmaal een veel flauwere reeks van vlekjes. Bovendien is de voorzoom van den vleugel, aan de binnenzijde van de discoïdaalvlek, iets lichter dan het overige middenveld, dat trouwens naar den achterrand toe in donkerheid toeneemt, en in

dit lichte gedeelte onderscheidt men nog twee donkere voorrandsvlekjes, die elk voor zich weer uit twee dwarsstreepjes bestaan. Ook de proximale grensband van het middenveld is bij sommige exemplaren duidelijk dubbel.

Nabij den wortel is in 't lichtere grijs van dit vleugelgedeelte nog een flauwe aanduiding van een donkeren band te ontdekken.

De buitenste der tot hiertoe vermelde donkere vlekkenbanden, die wel het sprekendst en volledigst van allen is, en bij nauwkeurige telling uit negen afzonderlijke vlekjes blijkt te bestaan, heeft een geslingerd verloop. De vijfde vlek van voren af ligt het meest naar binnen, en is de kortste en minst gebogene. Bij vele exemplaren is dit vlekje kennelijk donkerder dan de overige, en dit verdient onze opmerkzaamheid, aangezien bij verwante soorten dit verschijnsel in intensiteit en omvang sterk toeneemt.

Langs binnen- en buitenkant van de genoemde vlekkenrij strekt zich een breede band van iets minder donkere, flauwer omschrevene vlekken uit, die echter toch kennelijk donkerder zijn dan de grijze tint der lichtste vleugelgedeelten, welke de rol van grondkleur speelt. De buitenste dezer twee zijbanden wordt van de middenrij gescheiden door een smalle, scherp gemarkeerde lichte tusschenruimte, en is iets minder regelmatig dan de binnenste, daar sommige zijner samenstellende deelen breeder zijn dan de andere en tevens donkerder. Vooral bij de vlek aan den achterrand is dit het geval, en daarbij is deze vlek schuin naar buiten en achterwaarts verbreed, zoodat zij den achterhoek van den vleugel juist bereikt. Zulk een driehoekige verbreeding is ook aan het vooreind van den band bij de vleugelspits aanwezig, maar hier in minder donkere tint. Het is wenschelijk deze vlekken met bijzondere namen aan te duiden, b.v. als vóór- en achter-driehoeksvlek, daar zij bij verwante soorten in verhoogde duidelijkheid en zelfstandigheid terug worden gevonden.

In het middelste deel van den hier besproken band vertoonen vier vlekken duidelijk het zandlopertype. Daarvóór versmelt de band met de donkere partij, die het grootste deel van den buitenrand des voorvleugels beslaat. Deze partij vormt een groote, naar binnen toe convexe plek, die zich van de vleugelspits over vijf ussc henadercellen uitstrekt.

Ofschoon die plek niet duidelijk in afzonderlijke vlekken is verdeeld, kan men er toch drie donkerder gedeelten in opmerken, die tegen de voorzijde der aderen welke er doorheen loopen zijn aangelegen. Vergelijking met andere soorten van 't zelfde geslacht en van meerdere verwante genera bewijst weer, dat deze donkerder gedeelten mogen opgevat worden als oorspronkelijk zelfstandige

vlekken — in elke tusschenadercel één — die met elkaar versmolten zijn tot één bijna homogene donkere partij. Vooraan bij de vleugelspits wordt die plek door een schuin licht lijntje scherp afgesneden van de bovenvermelde voorste driehoeksvlek, welke laatste bovendien zeer licht van tint kan worden.

Vestigt men nu zijn aandacht in het bijzonder op de punten van overeenkomst tusschen de onderscheidene bestanddeelen dezer vleugelteekening, en let daarentegen minder op de verschillen, dan komt men gemakkelijk tot het inzicht, dat die teekening gevormd wordt door een zevental dwarsrijen van donkere vlekken, gescheiden door lichtere banen.

De buitenste dezer dwarsrijen (I) moet dan gezocht worden in de bovenbeschreven donkere plek aan den buitenrand.

De tweede (II) in de volledige negentallige vlekkenrij met hare begeleidingsbanen.

De derde (III) vormt de buitengrens van het donkere middenveld.

De vierde (IV) is de donkere lijn langs den buitenkant der discoïdaalvlek, die wel eenigszins schuin, maar toch vrijwel over het midden van het middenveld van vóór- naar achterrand loopt.

De vijfde (V) is de somtijds verdubbelde binnengrensband van het middenveld.

De zesde (VI) de enkelvoudige, gekromde vlekkenreeks over het midden van het proximale lichtste vleugelgedeelte.

De zevende (VII) wordt gevormd door de flauwe vlekkensporen nabij den vleugelwortel.

De lichtere tusschenruimten tusschen deze zeven banden kunnen evenals in vroegere publicaties worden aangegeven met de letters A tot G.

In die tusschenruimten vindt men wederom min of meer duidelijke sporen van nog andere donkere banden: het is dus niet onwaarschijnlijk, dat oorspronkelijk de sterk sprekende dwarsbanden overal afwisselden met minder donker en scherp geteekende vlekkenrijen.

Dit alles komt merkwaardig overeen met het patroon der Arctiiden, dat in een vorig opstel werd behandeld, en ook, zooals wij nog nader zien zullen, met dat van tal van andere vlinderfamilies. [1])

[1]) Hier mag er misschien reeds op gewezen worden, dat ANNETTE F. BRAUN, in eene verhandeling, getiteld: Evolution of the Color Pattern in the Microlepidopterous Genus Lithocolletis (Journal of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia Vol. XVI, 2e ser. 1914) als uitkomst van een ontogenetisch en phylogenetisch onderzoek naar de ontwikkeling der kleuren op de voorvleugels van dit Tineidengeslacht, mededeelt, dat alle patronen van dit veelvormig genus kunnen afgeleid worden uit 7 donkere dwarsbanden, welke volgens hare opvatting een primair patroon vormen, waarop zich later (ook wat de pop-ontwikkeling aangaat) een secundair patroon van nog donkerder lijnen als 't ware zou projecteeren.

Het geldt bovendien, evengoed als voor den voorvleugel, bijna volledig voor den achtervleugel. Want ook daar is rij I een convex afgeronde donkere plek in vijf buitenrandscellen, met drie verdonkeringen op overeenkomstige aderen. Ook daar wordt de dwarsband II gevormd door donkere, buitenwaarts min of meer convexe vlekken, en is hij aan buiten- en binnenzijde van een iets minder donkeren band van meer uitgevloeide vlekken vergezeld. Het aantal der leden van rij II is geringer dan op den v. v., omdat de achterste drie door de roode beharing worden overdekt. De vierde en de vijfde vlek van voren af zijn minder gekromd dan de overige, staan iets meer naar binnen en vertoonen een ietwat donkerder tint.

Band III en IV sluiten aan bij de overeenkomstige van den v. v., maar verdwijnen nog spoediger dan II onder het rood. V en VI zijn slechts aan den voorrand door donkere vlekken aangeduid, welke bovendien grootendeels onder den achterrand van den v. v. verborgen blijven.

VII is geheel onzichtbaar.

Het patroon der onderzijde (Fig. 1 rechts) komt in aanleg volkomen met dat van den bovenkant overeen, maar is op den v. v. verbleekt en gedeeltelijk vervaagd, op den a. v. daarentegen duidelijker en vollediger dan aan den bovenkant, omdat hier de roode beharing ontbreekt. De voorrand van den a. v., die hier onbedekt blijft, steekt door kleur en teekening sterk tegen 't overige vleugelvlak af, en draagt één bijzonder donkere vlek, die het aanvangslid van Bd IV vormt. Evenals bij de bijzondere vlekken van den v. v., is het wenschelijk deze vlek door een naam aan te geven: de achtervleugelvoorrandsvlek (a. v. v. r. v.). Bij een enkel mijner exemplaren was ook aan den o. k. van den v. v. de voorrandsteekening gedifferentieerd en van vlekjes voorzien.

Bd. V en VI zijn op den a. v. o. k. niet door hunne aanvangsvlekken of andere leden hunner reeks vertegenwoordigd, evenmin is VII te onderscheiden, wel ziet men duidelijk de lichte discoïdaalvlek, afstekend tegen 't breede voorstuk van Bd IV.

Vergelijken wij nu met deze teekening van de Gehakkelde Pijlstaart die van de Pauwoogpijlstaart.

Dat *Smerinthus ocellata* (Fig. 2) nauw verwant is met *populi*, blijkt uit allerlei punten van overeenkomst, maar zeker het treffendst uit de mogelijkheid, deze soorten met elkaar te kruisen, waarbij dan nog weer verschillen blijken te bestaan tusschen de resultaten der reciproke hybridisaties, en de bastaarden zelf ook weer tot voortplanting geschikt zijn. Het komt mij dan ook voor, dat de indeeling in twee verschillende genera, zooals die door recente systematici is voorge-

steld, geen juiste voorstelling van die verwantschap geeft, maar een uitvloeisel is van de overdreven neiging tot splitsing, die thans in de systematiek zoozeer de overhand heeft.

Bijzonder belangwekkend lijkt mij nu de vergelijking der vleugelteekening bij deze op het eerste gezicht zoo sterk verschillende soorten, vooral als men daarbij ook de talrijke nevenvormen, die gedeeltelijk als zelfstandige soorten, gedeeltelijk als ondersoorten, rassen, varieteiten, aberraties enz. worden beschreven, in aanmerking neemt. Ook aan de resultaten der hybridisatie moet daarbij aandacht geschonken worden. In de eerste plaats echter moet niet slechts de boven- maar ook de onderzijde nauwkeurig worden nagegaan en moeten voor- en achtervleugel, wat hun beide oppervlakken aangaat, in bijzonderheden met elkaar worden vergeleken.

Doet men dit bij *ocellata*, (Fig. 2) dan blijkt gemakkelijk dat deze soort een der tallooze bewijzen is voor de stelling, dat onderscheid tusschen voor- en achtervleugel, boven- en onderkant, voortspruit uit secundaire wijziging van een gemeenschappelijk oorspronkelijk patroon, en dat dit patroon in den regel aan den onderkant beter bewaard is gebleven dan aan de andere zijde, ofschoon wat deze laatste betreft, de voorvleugel gewoonlijk nog duidelijker en vollediger resten van de primitieve teekening heeft behouden dan de achtervleugel.

Om nu met de bovenzijde van dezen laatste te beginnen, zoo komt men al heel gemakkelijk tot de overtuiging, dat de zoo sterk sprekende oogvlek slechts een eigenaardige wijziging is van een drietal met elkaar evenwijdige donkere banen, die elk voor zich het achteruiteinde vormen van een dwarsband (evenwijdig aan den vleugelomtrek), welke band weer ontstaan is uit de versmelting van een reeks internervurale vlekken [1]). Het overtuigendst blijkt dit uit de vergelijking van *ocellata* met de naverwante soorten *coecus* en *kindermanni* (Fig. 3), maar het wordt reeds in hooge mate waarschijnlijk gemaakt door de vergelijkende beschouwing van boven- en onderkant van den achtervleugel van *ocellata* op zich zelf. Men merkt daarbij n.l. op, dat op den onderkant de drie bedoelde banden volledig van achter tot vooraan toe over den vleugel doorloopen, en dat de buitenste der drie, nabij den achterhoek, waar de vleugelzoom een insnoering vertoont, een randverdonkering teweegbrengt, die op den bovenkant terug te vinden is in het eigenaardige, eenigzins gekromde steeltje dat de oogvlek met den achterrand verbindt.

[1]) Op dit feit heeft Dr. Botke reeds de aandacht gevestigd op blz. 106 van zijn proefschrift: Les motifs primitifs du dessin des ailes des Lépidoptères et leur origine phylétique. Tijdschr. der Ned. Dierk. Ver. Dl. XV (2) 1916.

Op den onderkant is dus van een oogvlek geen sprake, maar loopen de donkere banden onafgebroken en gelijkmatig van voor naar achter door, gescheiden door twee smalle, zeer lichte banen. Zoowel langs den buitenrand als naar de wortelzijde worden deze drie banden nog door rijen van donkere vlekken begeleid. De rij aan den buitenrand vertegenwoordigt de groote halvemaanvlek, welke bij andere Smerinthus-soorten hier voorkomt en het homologon is van de gelijksoortige vlek aan den buitenrand des voorvleugels, die, als bij tal van soorten, ook bij *ocellata* wordt aangetroffen, Dat deze donkere randpartij de samenvloeiing is van een reeks vlekken, blijkt dus hier met volkomen zekerheid.

De middelste der drie banen van donkere vlekken is duidelijk dubbel en bestaat diensvolgens uit een reeks blokjes, wier binnen- en buitenzijde gevormd worden door een donker streepje, dat soms recht, op andere plaatsen min of meer gebogen is. De buitenste dezer grensstreepjes zijn het donkerst. Vergelijking met *populi* bewijst dat deze donkere streepjes den band II vertegenwoordigen. Deze wordt dus evenals bij *populi*, ook bij *ocellata* ter weerszij begeleid door een donkere zoom, De zoom aan den buitenkant is veel breeder, donkerder en zelfstandiger dan die aan de binnenzijde. De laatste wordt door den binnensten witten band gescheiden van lijn III, welke lijn hier slechts smal is, en door een donkere tusschenruimte samenhangt met den zeer donkeren en volledigen band IV, welke evenals bij *populi* langs den buitenkant van de lichte discoïdaalvlek loopt.

Op den onderkant van den v. v. zijn dezelfde vlekken en banden terug te vinden, beh. Bd. IV, die geheel en al onder de wijnroode beharing van 't wortelveld is schuil gegaan, evenals het achterstuk van Bd. III. Alleen de discoïdaalvlek handhaaft zich als een wittig puntje in deze roode overdekking.

Maar ook aan de bovenzijde van den a. v. kan men nog sporen van dezelfde banden terugvinden, n.l. langs den voorrand, op dat gedeelte van den vleugel dat in de vlucht onder den v. v. verborgen zit, maar in de rust, door de eigenaardige houding van v. en a. v. ten opzichte van elkaar, vrij er voor uitsteekt. Daar ziet men n.l. drie donkere dubbellijnen, die tot dichtbij het rood naderen, maar dan doodloopen. Er is m. i. geen reden om te onderstellen dat deze sporen van teekening secundair van den voorvleugel af op dat vrij voor den dag komende a. v.veld zijn overgestoken, integendeel mag men aannemen, dat zij behooren tot het primaire patroon van den a. v., evengoed als hunne homologa op den onderkant, of die op de bovenzijde van den a. v. van *populi*, en dat zij bij de roode verklenring gespaard zijn gebleven.

Terugkeerend tot de bovenzijde van den v. v., is het bij den eersten oogopslag duidelijk dat daarop hetzelfde patroon aanwezig is als op dien van *populi*. Het is alleen maar iets meer gedifferentieerd: het donkere middenveld is in een vóór- en een achterhelft gebroken door een smalle kanaalvormige geul van lichte kleur langs ader $Cub_2$, en het middelste leedje van de donkere Bandlijn II is tot een zeer donker blokje aangezwollen. Evenzeer zijn de voor- en de achterdriehoeksvlek, in 't bijzonder de laatste, veel meer in 't ooglopend en zelfstandig dan bij *populi*.

Zoo kan men geleidelijk en met groote mate van waarschijnlijkheid tot het besluit komen, dat de patronen op de bovenvlakte van voor- en achtervleugel ook bij *ocellata* op hetzelfde grondplan berusten, en dat deze primitieve teekening op den b.k. v/d. a.v. het sterkst is gewijzigd tengevolge der gedeeltelijke overdekking met rood, en van de differentiatie van het achterste deel van 't patroon tot een oogvlek.

Wanneer nog een bewijs noodig ware, dat de teekening van *ocellata* op hetzelfde patroon berust als die van *populi*, zou dit, gelijk boven reeds werd aangestipt, geleverd worden door tusschenvormen als *coecus* en *kindermanni*.

*Smerinthus coecus* komt, wat de teekening op de b. z. v/d. v. v. aangaat, meer met *populi* overeen dan *ocellata*, omdat de dwarslijnen veel vollediger en zuiverder aanwezig zijn dan bij deze laatste. Met name is de donkerder middenbaan niet in een voor- en achterhelft verdeeld, zoodat III, IV en V alle duidelijk en ongebroken van voor- tot achterrand doorloopen. Vooral V is scherp en donker. Op den achtervl. is de oogvlek minder zuiver rond, aangezien de buitenste (achterste) donkere lijn en de zwarte pupillijn minder afgerond zijn, en daarbij dichter bij den achterrand liggen, zoodat zij meer den indruk van bandfragmenten maken.

De onder den v.v. verborgen sporen van oorspronkelijke teekening langs den voorrand zijn daarentegen veel minder sprekend dan bij *ocellata*.

Op den v. v. van *kindermanni* (Fig. 3) echter is het middenveld als bij *ocellata* middendoorgebroken, en in 't algemeen de overeenkomst met laatstgenoemde soort nog grooter, de teekening is alleen scherper, zoodat met name Bd VII duidelijk uitkomt. De convexe buitenrandsvlek is in een klein voor- en een groot achterstuk verdeeld. Het paars op den a. v. is zeer sterk van toon, maar de oogvlek is geheel plat, en bestaat uit drie onderling sterk overeenkomstige banden, zoodat het oogkarakter bijna ontbreekt[1]).

[1]) In 't voorbijgaan mag opgemerkt worden, dat dus voor de oogvlek op de vleugels der imago hetzelfde kan bewezen worden, wat, zooals A. Weismann zoo overtuigend heeft betoogd, voor de oogvlekken op het lichaam der Sphingiden-

Aan de onderzijde is de overeenkomst met *ocellata* zeer groot.

De beschouwing van het kleurenpatroon van *ocellata* op zichzelf en in vergelijking met dat van *populi*, levert dus de volgende gegevens:

In tegenstelling met *populi* is het patroon der bovenzijde bij *ocellata* afwijkend van dat der onderzijde, en bestaat er op eerstgenoemden kant een verregaand onderscheid tusschen voor- en achtervleugel. Het blijkt evenwel mogelijk, het patroon van beide vleugels af te leiden uit de teekening, die bij *populi* vooral op hun bovenzijde ontwikkeld is, maar die, zij het in verflauwden en gereduceerden toestand, ook op de onderzijde is terug te vinden.

Evengoed als het patroon van *populi* aan de algemeene eischen voor een primitieve teekening voldoet, beantwoordt dat van *ocellata* aan de kenmerken voor een secundair gewijzigde, te weten: ongelijkheid zoowel tusschen de bovenzijde van voor- en achtervleugel als tusschen den boven- en den onderkant van beide vleugelparen, ten gevolge van afwijkingen der bovenzijde (zoowel op voor- als op achtervleugel) van het oorspronkelijke, eenvoudige en regelmatige patroon, maar daarbij in verschillenden zin voor beide vleugels, en zoodanig, dat de achtervleugel meer afwijkt dan de voorvleugel. Op eerstgenoemden overheerscht vooral de neiging tot uitwissching van groote gedeelten van het patroon door eenkleurigheid, gepaard met buitengewone differentiatie der overblijvende stukken, waardoor een groote tegenstelling ontstaat tusschen deze beide partijen (oogvlek op het roze fond). Op den v.v. daarentegen is de oorspronkelijke teekening in al hare onderdeelen op min of meer gelijksoortige wijze vervormd, zoodat wel enkele partijen iets sterker afsteken tegen de rest, maar toch het algemeene gelijkaardige karakter van het patroon behouden is gebleven.

Uit deze gegevens zou men allicht geneigd zijn de conclusie te trekken, dat de eigenaardigheden der teekening van den bovenkant, waardoor *ocellata* zich van *populi* onderscheidt, als soortskenmerken van eerstgenoemde species mochten beschouwd worden, terwijl daar-

---

rupsen geldt, nl. dat zij ontstaan zijn uit een zelfstandig geworden, hooger gedifferentieerd onderdeel van een stel overlangsche, afwisselend donkere en lichte strepen, die voor 't overige geheel of grootendeels verdwenen zijn. Bij de rupsen loopen deze strepen evenwijdig aan de lengteas van 't lichaam, op de vleugels der imagines zijn zij z.g. overdwars. Denkt men zich de vleugels als huidplooien van den lichaamswand, dan ziet men gemakkelijk in, dat deze z.g. dwarsstrepen in aard en richting overeenstemmen met de overlangsche strepen op het lichaam van 't insect. Waarschijnlijk mogen deze laatste evengoed als die op den vleugel beschouwd worden als ontstaan door de versmelting van een reeks vlekken.

entegen aan de punten van overeenkomst, zooals die vooral aan de onderzijde te vinden zijn, de beteekenis van generieke kenmerken zou toekomen.

Als steun voor de meening, dat bv. aan de oogvlek van *ocellata* geen hoogere beteekenis zou mogen gehecht worden dan die van een specifieke eigenaardigheid, zou men, behalve op hare beperking tot de bovenzijde, ook kunnen wijzen op de resultaten der hybridisatie, waarbij blijkt, dat de hybriden uit de kruising van een *ocellata* ♀ met een *populi* ♂, *ocellata*-achtige dieren zijn, maar met flauwe, van haar pupil verstoken oogvlek, die uit de kruising van een mannelijken *populi* met een vrouwelijke *ocellata* daarentegen zoozeer overeenkomen met *populi*, dat zij er nauwelijks van te onderscheiden zijn, zoodat de oogvlek geheel is weggevaagd.

Te meer zou men zich tot deze opvatting aangetrokken kunnen voelen, omdat zoowel aan de onregelmatig gevlamde en gemarmerde teekening der grauwe voorvleugels, als aan de oogvlekken in 't gelijkmatig rozerood der achtervleugels, een beteekenis mag toegekend worden voor de levenskansen van het dier. Zoolang dit in ruststand aan een wilgetakje te midden der bladeren van die voedingsplant der *ocellata*rups hangt, zijn de achtervleugels, — op hun smallen voorzoom na — onder de voorvleugels verborgen, en bootst het dier door vorm, kleur, teekening en afmetingen een paar verdorde wilgenblaadjes zoo bedriegelijk na, dat de stilzittende vlinder, niettegenstaande zijn aanzienlijke grootte, in deze zijn natuurlijke omgeving uiterst moeilijk te ontdekken is. Wordt daarentegen het slapende dier door een stoot of schok in zijn rust gestoord, dan schuift het de voorvleugels eenigszins naar voren, waardoor de oogvlekken in hunne roode velden plotseling zichtbaar worden, en door hunne plaatsing ter weerszijden van het iets omhoog gebogen achterste deel van het lichaam (dat wippende bewegingen gaat maken) zoozeer de illusie van een roofdieraangezicht met wijdopengesperde oogen verwekken, dat (zooals proefnemingen bewezen hebben) vogels en reptielen er heftig door worden verschrikt en afgehouden van pogingen om den vlinder te verslinden.

Wanneer ik deze reeds lang bekende feiten uit het hoofdstuk der Beschermende Nabootsing hier nog weder vermeldt, dan geschiedt dit, omdat ik het noodig acht nog eens te doen uitkomen, dat zij nooit ter verklaring kunnen dienen van de aanwezigheid der teekeningen, tinten en vormen, door wier samenwerking de illusie wordt teweeggebracht. Deze moeten hunne tegenwoordigheid danken aan oorzaken van een geheel andere orde van dingen, n.l. aan de variabiliteit, die het gevolg is van het samenspel der erfelijkheidsfactoren.

1. POPULI



4. TILIAE



2. OCELLATA



5. TARTARINOVII



E. THEYSSEN, Phot.

entegen aan de punten van overeenkomst, zooals die vooral aan de onderzijde te vinden zijn, de beteekenis van generieke kenmerken zou toekomen.

Als steun voor de meening, dat bv. aan de oogvlek van *ocellata* geen hoogere beteekenis zou mogen gehecht worden dan die van een specifieke eigenaardigheid, zou men, behalve op hare beperking tot de bovenzijde, ook kunnen wijzen op de resultaten der hybridisatie, waarbij blijkt, dat de hybriden uit de kruising van een *ocellata* ♀ met een *populi* ♂, *ocellata*-achtige dieren zijn, maar met flauwe, van haar pupil verstoken oogvlek, die uit de kruising van een mannelijken *populi* met een vrouwelijke *ocellata* daarentegen zoozeer overeenkomen met *populi*, dat zij er nauwelijks van te onderscheiden zijn, zoodat de oogvlek geheel is weggevaagd.

Te meer zou men zich tot deze opvatting aangetrokken kunnen voelen, omdat zoowel aan de onregelmatig gevlamde en gemarmerde teekening der grauwe voorvleugels, als aan de oogvlekken in 't gelijkmatig rozerood der achtervleugels, een beteekenis mag toegekend worden voor de levenskansen van het dier. Zoolang dit in ruststand aan een wilgetakje te midden der bladeren van die voedingsplant der *ocellata*rups hangt, zijn de achtervleugels, — op hun smallen voorzoom na — onder de voorvleugels verborgen, en bootst het dier door vorm, kleur, teekening en afmetingen een paar verdorde wilgenblaadjes zoo bedriegelijk na, dat de stilzittende vlinder, niettegenstaande zijn aanzienlijke grootte, in deze zijn natuurlijke omgeving uiterst moeilijk te ontdekken is. Wordt daarentegen het slapende dier door een stoot of schok in zijn rust gestoord, dan schuift het de voorvleugels eenigszins naar voren, waardoor de oogvlekken in hunne roode velden plotseling zichtbaar worden, en door hunne plaatsing ter weerszijden van het iets omhoog gebogen achterste deel van het lichaam (dat wippende bewegingen gaat maken) zoozeer de illusie van een roofdieraangezicht met wijdopengesperde oogen verwekken, dat (zooals proefnemingen bewezen hebben) vogels en reptielen er heftig door worden verschrikt en afgehouden van pogingen om den vlinder te verslinden.

Wanneer ik deze reeds lang bekende feiten uit het hoofdstuk der Beschermende Nabootsing hier nog weder vermeldt, dan geschiedt dit, omdat ik het noodig acht nog eens te doen uitkomen, dat zij nooit ter verklaring kunnen dienen van de aanwezigheid der teekeningen, tinten en vormen, door wier samenwerking de illusie wordt teweeggebracht. Deze moeten hunne tegenwoordigheid danken aan oorzaken van een geheel andere orde van dingen, n.l. aan de variabiliteit, die het gevolg is van het samenspel der erfelijkheidsfactoren.



1. POPULI



2. OCELLATA



3 KINDERMANNI



4. TILIAE



5. TARTARINOVII



6. LABRUSIAE

E. THEYSSEN, Phot.

Steeds wanneer dit spel toevalligerwijze leidt tot een effect, dat in een of ander opzicht bevorderlijk is voor de levenskansen van het dier (of de plant), kan het onder den selectieven invloed der natuurkeuze worden behouden en verbeterd, en zoodoende leiden tot de geraffineerde gevallen van mimicry, die onze verbazing zoozeer gaande maken. Een der redenen, waarom het mij wenschelijk voorkomt, deze reeds zoo dikwijls en door zoovelen uitgesproken meeningen hier nog eens te herhalen, is dat DE MEYERE, in zijn onlangs verschenen verhandeling: Zur Evolution der Zeichnung bei den Holometabolen Insecten, op pag. 59 als argument tegen BOTKE's opvattingen van de vleugelteekening der Cossiden, verklaart dat hij in deze slechts „eine hochgradige Entwicklung einer sympathischen borkenähnlichen Färbung" ziet, welke teekening hij in zijn vorig artikel: „Zur Zeichnung des Insekten-, im besonderen des Dipteren- und Lepidopterenflügels" op blz. 84 „aus einer Zeuzera-pirina-ähnlichen Fleckenzeichnung herleitete". Hieraan voegt hij toe: „Dieser Weg scheint mir besser verständlich als der umgekehrte". En iets verder zegt hij van de dwarsstreepjes op de onderzijde van vele Vanessidae: „diese scheinen mir mit dem primären Zeichnungsmuster überhaupt nichts zu tun zu haben, sondern es sind eher spät erworbene Elemente der sympathischen Färbung".

Datgene in deze beschouwingen van DE MEYERE, waartegen ik hier wensch op te komen, is niet zijn bestrijding van BOTKE's meeningen omtrent het verband tusschen vlek-, streep- en netteekening, waarmede ook ik mij in sommige opzichten niet vereenigen kan, maar wel de voorstelling, alsof door de opvatting van een vleugelpatroon als een „sympathische teekening", iets ter verklaring van het ontstaan en ter ontdekking van den ouderdom van dit patroon ware bijgedragen. Patronen van allerlei aard: de meest oorspronkelijke evengoed als de hoogst gewijzigde, kunnen nabootsend werken en dus beschermende beteekenis bezitten. De vleugelteekening van *populi* b.v. heeft evengoed protectieve waarde als die van *ocellata*, schoon alleen als nabootsing van een dor blad, en toch is zij veel primitiever. Bovendien komen dezelfde motieven en elementen van teekening, die bij 't eene dier tot de allerbedriegelijkste nabootsingen aanleiding geven, bij andere soorten, zoowel naverwante als ver afstaande, even goed voor, maar in iets afwijkenden vorm of op andere plaatsen van 't lichaam, waardoor zij slechts geringe of wel in 't geheel geen sympathische werking kunnen uitoefenen. EIMER heeft hiervan velerlei voorbeelden aangehaald.

Talrijke, dunne, onregelmatige dwarsstreepjes tusschen de aderen, in den zin van BOTKE's „traits affilochés", vindt men beh. bij Vanessidae nog bij vele andere vlinders uit allerlei families, ook bij

Sphingiden, zoowel aan boven- als aan onderkant, schoon 't meest aan de laatste. Bij een algemeen overzicht der vleugelteekening van Lepidoptera, dat ik lang vóór Botke's proefschrift ondernam en in 't Engelsch redigeerde, maar tot nu toe in portefeuille hield, achtte ik het zelfs wenschelijk voor dit eigenaardige teekeningsmotief een bijzonderen naam te verzinnen, en noemde het „Cosside markings". Het zou nu zeer goed kunnen zijn, dat ook deze tot één oud en oorspronkelijk, algemeen voorkomend motief van teekening bleken terug te voeren, welks verband met het systeem van tusschenadervlekken nog nader ware uit te maken, al heeft Botke daartoe een zeer verdienstelijke poging gedaan.

Dat een „sympathische" teekening juist uit hoofde van dit nabootsend karakter jonger zou moeten zijn dan andere patronen, ontken ik ten sterkste. Elk der elementen, uit wier samenwerking dit sympathische karakter voortspruit, kan op zichzelf berusten op erfelijke tendenzen van zeer hoogen phylogenetischen ouderdom. Jong kan alleen de specifiek en speciaal hooge graad dier samenwerking zijn, en zelfs dit behoeft nog niet per se het geval te wezen. Onder de Pieriden, Papilioniden en Nymphaliden dragen de „Mimicristen" waarschijnlijk in de meerderheid der gevallen oudere en oorspronkelijker monteeringen dan de overige z.g. typische leden hunner familiën, zooals ik dat in mijn mededeeling op het Intern. Entomologen-congres te Oxford in 1912, in 't licht stelde.

Bij tal van Geometriden, die in de herfst uit de pop komen, berust hunne gelijkenis op een dor blad, behalve op den gehakkelden vorm hunner vleugelranden en op den loop en de rangschikking der donkere dwarslijnen, vooral op de lichtgele kleur. Is nu daarom die kleur jonger dan andere tinten? M.i. evenmin als de bedoelde vorm der vleugelranden en de verdeeling der lijnenteekening dit behoeft te zijn, al mag men in 't algemeen een gehakkelden vleugelrand uit een afgeronden afleiden.

Zoo wordt ook het klaarblijkelijke verband tusschen vlekken, streepjes en netmazen op de vleugels der Cossiden, dat men door eenvoudige waarneming en door vergelijking met de Zeuzeriden om zoo te zeggen slechts heeft af te lezen, niet nader verklaard door de opmerking, dat de overheersching van het netmotief een sympathische gelijkenis op boombast te weeg brengt. De vraag blijft: hoe komt de vleugelteekening der Cossiden aan de neiging tot den overgang in het netkarakter, en hoe oud is die neiging? Men heeft daarbij in 't oog te houden, dat ook bij vele andere insecten uit allerlei orden diezelfde neiging voorkomt, en dat zij eveneens wordt aangetroffen bij het aderstelsel, dat met de verdeeling der kleurstoffen

in de huid zulke diepgaande en oorspronkelijke betrekkingen vertoont. Al ware het alleen om de vraag uit alle denkbare gezichtspunten te bekijken, zou men dus de gegrondheid der hypothese dienen te onderzoeken, of de netsgewijze teekening ook iets te maken zou kunnen hebben met mazenvorming in het aderstelsel, gelijk men die vooral bij Neuroptera en Orthoptera aantreft en ziet alterneeren met regelmatige dwarsadering; of dus de netteekening niet even oud of zelfs nog ouder zou kunnen zijn dan de vlekken- en strepenteekening, waarbij men zou kunnen aanvoeren, dat netten tusschen de overlangsche aderen kenmerkend zijn voor de nervatuur der vleugels van de Palaeozoïsche Palaeodictyoptera.

Hiermede wil ik volstrekt niet gezegd hebben, dat ik van dit verband en dezen ouderdom der netsgewijze teekening overtuigd ben, maar alleen dat ik evenmin het omgekeerde bewezen acht.

Gedachtig aan het woord van WEISMANN: „Ohne Hypothese und Theorie giebt es keine Naturforschung", meen ik dat het bij voortduring opstellen van verklarende supposities omtrent een mogelijk verband tusschen overeenkomstige verschijnselen als een eisch voor vruchtdragend natuuronderzoek behoort beschouwd te worden, en kan ik niet met DE MEYERE instemmen, als hij zegt: „Ich möchte mich den Tatsachen entsprechend mit Feststellung des Auftretens begnügen und keine ganz hypothetische Verbindungslinien ziehen".

Om tot de specifieke differentieele kenmerken van *Sm. ocellata* terug te keeren, hierbij schijnt mij het gevaar om in geheel hypothetische beschouwingen verdwaald te raken, niet zoo heel dreigend. Van al de bovengenoemde eigenaardigheden toch, op den bovenkant zoowel van den voor- als van den achtervleugel, kan men bewijzen, dat zij even goed als bij *ocellata*, ook bij andere soorten van 't geslacht Smerinthus of bij verwante Sphingidengenera voorkomen.

In de eerste plaats is de vergelijking met *tiliae* (Fig. 4) zeer leerzaam. Op de bovenzijde van den voorvl. der Lindenpijlstaart vindt men alle eigenaardigheden, waardoor het patroon van *ocellata* afwijkt van dat van *populi*, terug, ofschoon in iets gewijzigde vormen en tinten, waardoor een gansch ander effect der teekening in haar geheel wordt bereikt. Bepaaldelijk is de gelijkenis van het donkere middenveld met dat van *ocellata* treffend: evenals bij deze laatste wordt het in een vóór- en een achterdeel gesplitst door wigvormige inloopers der lichtbruine grondkleur, die al of niet in elkaar overgaan. Hoe groot in dit opzicht, evenals in andere, de individueele variabiliteit is, blijkt bij het doorkijken van iedere eenigszins omvangrijke serie van *tiliae*'s. Den overgang van een onverdeeld in

een verdeeld middenveld zien wij hier dus voor onze oogen geschieden.

Daarbij kunnen wij eveneens opmerken, dat de eigenaardigheid van het middelste (5[de]) vlekje der donkere bandlijn II, om n.l. in kleur en omvang van de andere vlekjes te verschillen, ook bij *tiliae* voorkomt, maar merkwaardigerwijze somwijlen in dien zin, dat dit vlekje lichter in plaats van donkerder dan de overige is.

Aan den onderkant vertoont *tiliae* weder hetzelfde vereenvondigde patroon als *populi* en *ocellata*, dus de twee bandlijnen II en III met sporen van I, IV en VI. Dat men werkelijk het recht heeft van vereenvondiging te spreken, en dat deze in verband staat met de lichte beharing die zich van uit den vleugelwortel tot aan het middenveld uitstrekt, wordt bij *tiliae* treffend bewezen doordien nog sporen van de donkere middenbaan, die aan de bovenzijde zoo duidelijk is ontwikkeld, ook aan den onderkant zijn te ontdekken. Aan den voet toch van ieder haartje op het gebied dezer middenbaan bevindt zich een zwart stipje, zoodat, als men schuin tusschen de haren doorkijkt, men die baan in haar geheel als stippelveld ziet afgebeeld staan.

Nog treffender dan de overeenkomst tusschen *tiliae* en *ocellata* is die tusschen deze beide soorten en *tartarinovii*, welke laatste (fig. 5) als 't ware een overgang tusschen de twee eerstgenoemde vormt. Hier is de buitenrand van de donkere middenbaan in zijn voorste stuk niet als bij *tiliae* uit-, maar integendeel ingebogen, en bestaat een tegenstelling, zoowel in kleur als in teekening, tusschen anaalveld en overig vleugelveld, waardoor de verdeeling van het middenveld in een voor- en een achterstuk zich voordoet als een onderdeel van een over den geheelen vleugel reikend proces, dat bij nog zoovele andere vlinders en ook bij vele insecten uit andere orden optreedt.

Merkwaardig is ook, dat de voorvleugelspits, die bij al deze soorten een overeenkomstige bijzondere differentiatie vertoont — afgegrensd door het reeds bij *populi* beschreven schuine lichte lijntje — hier in plaats van zilvergrijs, juist donker groengrijs is, terwijl daarentegen de bij de anderen donkere, convexe buitenrandsvlek lichtgrijs is.

Op den a. v. vertoont *tartarinovii* hetzelfde rozenrood als *ocellata* en ook sporen van de oogvlek. Bij *tiliae* daarentegen strekt een donkere band zich over de geheele oppervlakte van den a. v. parallel aan en op eenigen afstand van den buitenrand uit. Deze band bestaat uit evenveel onderdeelen als er tusschenadercellen zijn. Elk onderdeel breidt zich wigvormig in de richting van den vleugelwortel uit. De mate dezer uitbreiding is individueel zeer verschillend, maar in 't algemeen kan men zeggen, dat de

donkere tusschenadervlekken naar achteren toe grooter en vooral meer intensief zwart worden, en deze achterwaartsche toename is de eenige aanduiding van overeenkomst met de oogvlek van *ocellata*. Ofschoon dus in dit laatste opzicht *tiliae* bijna even weinig gelijkenis met *ocellata* vertoont als *populi*, doet dit niets af tot de waarheid en de waarde van het feit, dat bij tal van Sphingiden de achterbuitenhoek van voor- zoowel als van achtervleugel een donkere pigmentatie vertoont, die tot een oogvlek kan gedifferentieerd zijn. Men kan dit ook uitdrukken door te zeggen, dat de bovenbeschreven achterdriehoeksvlek niet slechts tot den voorvleugel beperkt is, maar ook veelvuldig aan den achtervleugel optreedt.

Op dien voorvleugel kan nu de genoemde vlek evengoed als op den achtervleugel het karakter van een oogvlek aannemen, zooals blijkt uit meerdere Sphingidensoorten, tot verschillende geslachten behoorend, b.v. *Daphnusa ailanthi*.

Andere soorten daarentegen hebben zooals gezegd een enkele of dubbele, niet gedifferentieerde, dus massieve vlek nabij den achterbuitenhoek van den v. v., b.v. *Oxyambulyx canescens*, en ook dit herhaalt zich op den a. v., b.v. bij *Smerinthus quercus*. Onder de mij ter beschikking staande Sphingiden scheen *Pholus labrusiae* (Fig. 6) mij een bijzonder belangwekkend kleurenpatroon te bezitten. Terwijl toch aan de onderzijde de overeenkomst tusschen voor- en achtervleugel zeer groot is, en beide de gebruikelijke eenvoudige teekening van de lijnen II en III op overigens bijna eenkleurigen zacht groengelen grond vertoonen, waarbij zich slechts langs de buitenranden een iets afwijkend gekleurde partij voegt, die door een eigenaardige zigzaglijn van 't overige vleugelveld gescheiden wordt, en die zich blijkbaar uit lijn I heeft ontwikkeld, bestaat aan de bovenzijde een diepgaand verschil tusschen beide vleugelparen. De voorvleugels zijn bijna éénkleurig donker-dofgroen, en komen in dat opzicht volkomen overeen met het geheele lichaam van het dier. Toch zijn sporen van meerdere dwarslijnen goed te onderscheiden, en steekt vooral het middenveld, begrensd door lijnen III en V, door een donkerder groene tint tegen den overigen vleugel af. Maar aan de buitenzijde van dit middenveld zijn twee ongeveer vierkante veldjes van een grijsbruine kleur als 't ware uit het groen uitgespaard, het ééne ongeveer in 't midden, het andere aan den achterrand, zoodat de indruk ontstaat van twee bruine gordijntjes voor lage venstertjes in een groenen wand. Die indruk wordt nog versterkt doordien in dit bruin de gekromde onderdeelen der dwarsstrepen talrijker en duidelijker aanwezig zijn dan in 't groen. In 't middenvenster zijn vier van die boogstreepjes, in 't achterraam twee.

De vergelijking met *Sm. populi, ocellata* en nog zoovele andere Sphingiden, bij welke de grondkleur bruin of grijs is, en de dwarsbanden uit reeksen van gekromde streepvlekjes bestaan, geeft reden voor de onderstelling, dat deze venstertjes ons overblijfselen der oorspronkelijke vleugeltint en teekening vertoonen, die overigens door eene groene verkleuring grootendeels is vervaagd. Evenals in zoo tal van andere gevallen, o.a. bij de Hepialiden, zou het groen hier dus de secundaire, het bruin de primaire tint zijn, en zou bij de verkleuring de teekening gedeeltelijk verloren zijn gegaan of ten minste veel onduidelijker zijn geworden. Wat de reden mag zijn, dat daarbij de bedoelde venstertjes met hun traliewerk van gebogen streepvlekjes gespaard bleven, vermag ik alsnog niet te verklaren.

In tegenstelling met de nagenoeg egaalgroene tint van den voorvleugel vertoont de achtervleugel een zeer bont en geschakeerd patroon, waarin twee pikzwarte banden tegen een lichtgelen grond afsteken, terwijl bij den voorrand blauwgrijze partijen tusschen het zwart gelegen zijn, bij den binnenrand een steenroode vlek met twee zwarte vegen afwisselt en tegen den buitenrand een groen veldje het geheel onderbreekt. Het merkwaardigst zijn echter twee donkerbruine onregelmatig gekartelde lijnen die aan den achterhoek beginnen en langs het achterste deel van den buitenrand parallel met dezen loopen, om bij den achterrand van 't groene veldje in den buitensten zwarten band over te gaan. Deze gekronkelde lijnen vertegenwoordigen het achterste segment en de pupil der oogvlek van de *ocellata*-groep onder de Smerinthidae, zij vormen het minst gewijzigde gedeelte van het achtervleugelpatroon van *Pholus labrusiae*. Hoogstwaarschijnlijk heeft dit voorste patroon een beschermende beteekenis voor dien vlinder, evengoed als de blijkbaar egaal groene tint van voorvleugels en lichaam. Deze laatste maken het slapende dier moeilijk zichtbaar voor vijanden die er op azen, en wellicht zijn de bruine venstertjes daarbij van nut, doordien zij de anatomische lijnen van het groote vleugelveld als 't ware breken. Het zou zeer de moeite waard zijn om na te gaan, of het in zijn rust gestoorde dier de achtervleugels plotseling laat kijken op overeenkomstige wijze als *ocellata*, en zoodoende zijn belagers verschrikt, of dat de bonte kleurschakeering, die dan plotseling zichtbaar wordt, slechts de beteekenis van een waarschuwingspatroon heeft. In allen gevalle echter moet dit patroon beschouwd worden als een hooge en bijzondere differentiatie van het aan alle Sphingiden gemeenschappelijk oorspronkelijk patroon der achtervleugels, en kunnen noch de bonte kleuren zelf noch hare grillige schakeering als recht-

streeksche gevolgen van eene voor het dier nuttige uitwerking worden opgevat.

Uit de vergelijking van *Sm. populi* met *ocellata*, en van beide met andere Sphingiden meen ik de volgende conclusies te mogen trekken.

Het kleurenpatroon van *populi* is primitiever dan dat van *ocellata*, het beantwoordt aan de eischen, die men voor een oorspronkelijk patroon mag stellen, en het stemt overeen met het grondplan der vleugelteekening zooals men dat bij Arctiïden en hoogstwaarschijnlijk bij tal van andere families van Heterocera, en vermoedelijk ook Rhopalocera aantreft. Het is dus niet alleen ouder dan het geslacht Smerinthus, maar zelfs dan de familie der Sphingiden, wellicht dan de orde der Lepidoptera. Men kan het dus niet zonder meer als een generiek kleurenpatroon bestempelen.

Het kleurenpatroon der bovenzijde van *ocellata* kan van dat van *populi* afgeleid worden door aan te nemen, dat de bij deze laatste voorkomende bandreeksen van tusschenadervlekken op eigenaardige wijze zijn vervormd. Maar elk dezer wijzigingen op zichzelf wordt even goed bij tal van andere Sphingidensoorten en zelfs geslachten aangetroffen. Men kan dus volstrekt niet aannemen, dat zij uitsluitend door *ocellata* zijn verworven gedurende het ontstaan dezer soort uit een *populi*-achtigen voorvader. Zij zijn derhalve elk op zichzelf niet kenmerkend voor *ocellata*, en mogen dus niet als specifieke eigenaardigheden dezer soort worden opgevat. Slechts de bijzondere combinatie der wijzigingen van het grondtype en de fijnere nuances waardoor zij zich bij *ocellata* onderscheiden van de gelijksoortige modificaties bij verwante vormen, drukken ten slotte op *ocellata* het soortkarakter.

In geen geval kan het *ontstaan* der bedoelde wijzigingen van het primitieve patroon toegeschreven worden aan den invloed der bescherming tegen vijanden, die *ocellata* dankt aan het gebruik, dat zij (instinctmatig) van hare oogvlekken maakt. Wel daarentegen kan de speciale verfijning en uitwerking in details, waardoor het patroon van *ocellata* uitblinkt boven dat van verwante Sphingiden, een gevolg zijn van de natuurlijke selectie, die zich kon doen gelden van het oogenblik af, dat door een toevallig samentreffen van erfelijke variaties van het gemeenschappelijke Sphingidenpatroon met bijzondere omstandigheden der levenswijze, een gelijkenis was ontstaan met den kop van een groot-oogige uil, waardoor buitzoekende vogeltjes en kleine zoogdieren verschrikt werden.

*Groningen*, October 1918.

**Mechanica.** — Het buitenlandsch lid FELIX KLEIN heeft een mededeeling ingezonden: „*Bemerkungen über die Beziehungen des* DE SITTER'*schen Koordinatensystems B zu der allgemeinen Welt konstanter positiver Krümmung.*"

1. Ich gehe zunächst von dem sphärischem Falle aus und setze:

$$\xi^2 + \eta^1 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = R^2,$$
$$ds^2 = \pm (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - dv^2 + d\omega^2),$$

wo das $+$ oder $-$ Zeichen gelten soll, je nachdem wir einen „Räumlichen" oder „Zeitlichen" Vector messen. Der Uebergang zum elliptischem Falle erfolgt am einfachsten, indem wir setzen:

$$x = \frac{R\xi}{\omega}, \quad y = \frac{R\eta}{\omega}, \quad z = \frac{R\zeta}{\omega}, \quad u = \frac{Rv}{\omega}.$$

2. Dann will ich von vorn herein betonen, dan die so definierte Welt bei $10^{10}$ homogenen linearen Substitutionen der $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $v$, $\omega$ — also bei $\infty^{10}$ Kollineationen der $x$, $y$, $z$, $u$ (welche $x^2 + y^2 + z^2 - - u^2 + R^2 = 0$ in sich überführen) — in sich übergeht.

3. Den Uebergang zum DE SITTER'schen $ds^2$ mache ich nun so, dass ich setze:

$$\xi = R \sin \vartheta \cos \varphi,$$
$$\eta = R \sin \vartheta \sin \varphi \cos \psi,$$
$$\zeta = R \sin \vartheta \sin \varphi \sin \psi,$$
$$v = R \cos \vartheta \sin h \frac{ct}{R},$$
$$\omega = R \cos \vartheta \cos h \frac{ct}{R},$$

(unter $\sin h$, $\cos h$ gewöhnliche hyperbolische Funktionen verstanden).

4. Weiter wird also

$$\tan h \frac{ct}{R} = \frac{v}{\omega} = \frac{u}{R},$$

woraus

$$\frac{ct}{R} = \log\left(\frac{\omega + v}{\omega - v}\right) = \log\left(\frac{R + u}{R - u}\right).$$

Dabei sind $\omega + v = 0$, $\omega - v = 0$ irgend zwei Tangential-ebenen, welche man durch den Koordinatenanfangspunkt an dem Gebilde $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = 0$ legen kann; $t$ ist der in geeigneter Maass-einheit gemessene „projektive Winkel" im Büschel

$$\lambda(\omega + v) + \mu(\omega - v) = 0.$$

5. In Uebereinstimmung damit wird $t = -\infty$, bezw. $t = +\infty$, wenn $\omega + v = 0$ oder $\omega - v = 0$; verschwinden beide Ausdrücke, so wird $t$ unbestimmt[1]). *$t$ ist nur in dem Ausschnitte der vier-dimensionalen Welt reell, für den* $\frac{\omega + v}{\omega - v}$ *positiv is; jenseits wird es imaginär.*

6. $ds^2$ behält seine Form bei $\infty^4$ Transformationen, nämlich wenn man

*a*) $\xi$, $\eta$, $\zeta$ beliebig orthogonal substituiert,

*b*) $t$ durch $t + const.$ ersetzt.

Mit Rücksicht auf 2 gibt es also in der Welt (1) $\infty^6$ „de Sitter'schen Uhren".

7. Da ist es nun sehr amüsant sich auszumalen, wie sich zwei Beobachter unterhalten würden, die mit zwei verschiedenen de Sitter-schen Uhren ausgestattet sind. Ereignisse, die für den einen in der Ewigkeit liegen, sind für den anderen zugänglich, und umgekehrt, ja der eine erlebt Ereignisse, welche der andere für imaginär hält.

8. Dies alles sind zunächst selbstverständlich nur mathematische Spekulationen, ob der Physiker sie aufnehmen will steht auf einem anderem Blatte.

[1]) Dies ist aber nur eine Singularität der Koordinate $t$. nicht der zu Grunde liegenden Mannigfaltigheit (1).

**Sterrenkunde.** — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan van Dr. A. PANNEKOEK: *„De uitzetting van een kosmische gasbol, de nieuwe sterren en de Cepheïden."*

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KAPTEYN).

I.

De nieuwe sterren, die het volledigst in hun lichtafwisseling bekend zijn, vertoonen twee uiteenloopende typen. Beide hebben gemeen de plotselinge snelle opvlamming; maar zij verschillen in het verdere verloop van de lichtverandering. Tot de eene klasse behooren de beide helderste Novae van deze eeuw, de Nova Persei 1901 en de Nova Aquilae 1918, en eveneens de Nova Coronae 1866. Onmiddellijk na het bereiken van de grootste helderheid begint het licht snel af te nemen; daarna wordt de daling langzamer, terwijl er een periodiciteit in optreedt. Bij de andere klasse, waarvan Nova Aurigae 1892 het best bekende voorbeeld is — en waartoe ook de ster van Tycho, de Nova Cassiopeiae 1572, behoorde — blijft de ster langen tijd helder, fluctueert onregelmatig op en neer, en neemt dan eindelijk vrij snel in helderheid af. Deze beide typen van lichtwisseling vertoonen eenige overeenkomst met de twee typen van opvlamming, lange en korte, die men, afwisselend bij dezelfde ster, bij de Antalgol sterren SS Cygni e.d. waarneemt. Of deze analogie meer is dan een toevallige overeenstemming, of dat er een werkelijke verwantschap in het spel is, is nog niet uit te maken.

SEELIGER heeft naar aanleiding van de verschijning van Nova Aurigae een verklaring gegeven, die op de verschijnselen van dit type goed past: wanneer een ster in een nevelmassa dringt en daardoor tot hooge temperatuur gebracht wordt, zal, zoolang zij door dichtere of ijlere gedeelten voortvliegt, haar temperatuur op en neer fluctueeren. Deze theorie past minder goed op het andere type. Hier is blijkbaar één plotselinge reusachtige temperatuurstijging, door een momentane oorzaak bewerkt, waarvan alle verdere processen enkel de gevolgen zijn.

De oorzaak, waardoor deze plotselinge verhitting ontstaat, kan hier buiten beschouwing blijven. Wij stellen slechts de vraag, wat over de verdere lotgevallen uit eenvoudige onderstellingen af te leiden

is. Een kosmisch lichaam, plotseling tot zoo hooge temperatuur gebracht, zal niet in evenwicht zijn. Het zal adiabatisch uitzetten, en tengevolge van deze uitzetting afkoelen. Meestal wordt als hoofdreden voor de afkoeling van de ster het warmteverlies door uitstraling opgegeven; maar de afkoeling door adiabatische expansie is veel belangrijker. In eerste benadering is dus van de uitstraling af te zien. Eveneens wordt daarbij de zwaartekracht verwaarloosd, die de expansiekracht eenigszins verzwakt; te meer is dit veroorloofd, daar zij voor een grooter of kleiner deel door den stralingsdruk gecompenseerd zal worden. Wij onderstellen dat alle veranderingen homocentrisch plaats vinden.

Een volumeelement op afstand $r_0$ van het middelpunt, bevindt zich door de expansie na een tijd $t$ op een afstand $r = r_0 + \Delta$. Dan is

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr}.$$

Een volumeelement $r_0\, dr_0\, dw$ verschuift naar den afstand $r$ en wordt $r^2\, dr\, dw$. Daardoor verandert de dichtheid:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{r_0^{\,2}}{r^2 \dfrac{dr}{dr_0}}.$$

Daar de verandering adiabatisch plaats vindt, blijft steeds $p\varrho^{-1,4}$ = constant, of $\varrho = \text{Const.} \times p^{5/7}$, dus:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\frac{p_0^{\,5/7}}{\varrho_0} p^{-5/7} \frac{dp}{dr} = -\frac{7}{2}\left(\frac{p_0^{\,5/7}}{\varrho_0}\right) \frac{dp^{2/7}}{dr}.$$

Door den index 0 zijn de toestanden op den tijd 0 aangeduid, die dus nog een functie van $r$ zijn. Wij duiden met den index 00 den toestand voor $t = 0$ en $r = 0$, dus in het centrum, aan en stellen

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/7} = y; \qquad \frac{p_{00}}{\varrho_{00}} = \alpha, \qquad \frac{p_0}{p_{00}}\frac{\varrho_{00}}{\varrho_0} = \beta;$$

dan wordt

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\frac{7}{2}\frac{p_0}{\varrho_0}\frac{dy}{dr}.$$

Dan is $\alpha$ een constante voor dezen gasbol, van de dimensie $L^2\, T^{-2}$; zij is volgens $p = \varrho\, HT$ ($H$ = gasconstante) evenredig met de temperatuur in het centrum en heeft de beteekenis van het kwadraat van de voortplantingssnelheid van isotherme evenwichtsverstoringen in het centrum. En $\beta$ is een dimensieloos getal, dat in het centrum = 1 is, een functie van $r$, die het verloop in den begintoestand van het centrum naar buiten aangeeft. De bewegingsvergelijking wordt nu

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\frac{7}{2}\alpha\beta\frac{dy}{dr}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De $y$ wordt bepaald door

$$y = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/7} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2/5} = \left(\frac{r_0^{\,2}}{r^2\,\dfrac{dr}{dr_0}}\right)^{2/5}.$$

of

$$y = \left\{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{dr}{dr_0}\right\}^{-2/5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De $y$ geeft de verandering van de temperatuur aan.

Door de formules 1) en 2) is het verloop van $\Delta$ met den tijd bepaald, wanneer men de grootheid $\beta$, die den begintoestand bepaalt, als functie van $r$ kent. Men kan b.v. een dichtheidsverdeeling aannemen, zooals EMDEN voor een gasbol in evenwicht heeft berekend, maar dan in elk punt een veel hoogere temperatuur onderstellen dan bij zulk een evenwichtsvorm behoort. De beginvoorwaarden moeten zoo zijn, dat de $\Delta$ steeds toeneemt, doordat er tengevolge van de hooge temperatuur steeds een sterke expansiekracht naar buiten werkt. De temperatuur van elke laag zal daarbij dalen in een verhouding, die door het getal $y$ aangegeven wordt, en daardoor zal de helderheid afnemen. De buitenste, koudste lagen, die het licht van de centrale deelen absorbeeren, zullen zich met groote snelheid naar ons toe bewegen; *dit verklaart, waarom in alle nieuwe sterren, zoodra het licht begint te dalen, de donkere absorbtielijnen sterk naar het violet verplaatst zijn* — een verschijnsel, dat men tevergeefs door een snelle nadering van de geheele ster of door drukverschillen heeft trachten te verklaren.

Ook bij eenvoudige beginvoorwaarden laten zich de vergelijkingen 1) en 2) moeilijk integreeren. Een poging, om het verloop van de verandering te vinden door mechanische kwadratuur stuitte af op de omstandigheid, dat kleine variaties in $y$ sterk vergroot in $\frac{dy}{dr}$ en zoo in de gevonden $\Delta$ en de volgende waarden van $y$ overgaan, zoodat elke volgende stap een vermindering in nauwkeurigheid geeft, die, nadat over eenige tijdseenheden geintegreerd is, de gevonden uitkomsten geheel onzeker maakt. Daardoor is het ook niet gelukt, de periodieke helderheidsschommelingen — die bij Nova Persei en Nova Aquilae beide begonnen op te treden, nadat de ster 4 grootteklassen afgenomen was — uit bepaalde beginvoorwaarden te verklaren.

Wel is het algemeene gemiddelde verloop te berekenen. Men kan de vraag stellen: is het mogelijk, dat de geheele stermassa volkomen gelijkvormig uitzet, en welke begincondities zijn daarvoor noodig?

Dan moet $r = r_0 f(t)$ zijn, waarin $f$ onafhankelijk van $r$ is. Hieruit volgt:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = f^{-3} \quad ; \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{7/5} = f^{-21/5} \quad ; \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2/5} = f^{-6/5}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{\varrho_0}\frac{dp_0}{dr_0} f^{-11/5} \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = r_0 \frac{d^2 f}{dt^2}$$

dus de bewegingsvergelijking 1) wordt:

$$r_0 f'' = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{dp_0}{dr_0} f^{-11/5}$$

Voor $t = 0$ is

$$r_0 f_0'' = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{dp_0}{dr_0}$$

Deze $f_0''$ moet constant zijn; er moet dus voor $t = 0$ een bepaalde verdeeling van dichtheid en druk langs den straal gezocht worden, waarbij

$$-\frac{1}{r_0 \varrho_0}\frac{dp_0}{dr_0} = A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

is. (De dimensie van $A$ is $T^{-1}$). Dan wordt $f$ bepaald door

$$f'' = A^2 f^{-11/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hieruit is door integratie de $f$ als functie van den tijd te vinden.

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = -\frac{5}{6} A^2 f^{-6/5} + Const.$$

De constante wordt bepaald door de voorwaarde, dat voor $t = 0$ en $f = 1$, als de expansie begint, de snelheid van expansie 0 is, dus

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{5}{3} A^2 (1 - f^{-6/5})$$

$$\frac{df}{dt} = A\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{1 - f^{-6/5}}$$

$$A\,dt = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{df}{\sqrt{1 - f^{-6/5}}}$$

Deze vorm is door partieele integratie te integreeren in den vorm van een reeks. Stelt men

$$f^{-6/5} = x.$$

dan is

$$\int x^{-11/6}(1-x)^{-1/2}dx = \frac{6}{5}x^{-5/6}(1-x)^{1/2}\left\{1 - \frac{2}{1}x - \frac{2.4}{1.7}x^2 - \frac{2.4.10}{1.7.13}x^3 - \ldots\right\} + const.$$

of ook

$$= 2x^{-5/6}(1-x)^{1/2}\left\{1 - \frac{2}{9}(1-x) - \frac{2.4}{9.15}(1-x)^2 - \frac{2.4.10}{9.15.21}(1-x)^3 - \ldots\right\} + const.$$

dus

$$At = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\, f \sqrt{1 - f^{-6/5}} \left\{ 1 - \frac{2}{1} x - \frac{2.4}{1.7} x^2 - \frac{2.4.10}{1.7.13} x^3 - \ldots \right\} + 1.881$$

of ook

$$= \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, f \sqrt{1 - f^{6/5}} \left\{ 1 - \frac{2}{9} (1 - x) - \frac{2.4}{9.15} (1 - x)^2 - \frac{2.4.10}{9.15.21} (1 - x)^3 - \ldots \right\} \quad (5)$$

De eerste reeks is te gebruiken als $x$ klein, dus $f$ zeer groot is, de tweede geldt voor kleine $f$, als $x$ dicht bij 1 ligt. De additieve constante moet voor de tweede reeks, doordat voor $x = 1$, $f = 1$, $t = 0$ is, gelijk aan 0 zijn. Voor de eerste reeks is ze door deze voorwaarde niet te bepalen en is ze gevonden door voor een zelfde $x$ de waarde van $At$ met beide formules te berekenen.

Met behulp van deze reeksen is voor een aantal waarden van den expansiefactor $f$ de tijdgrootheid $At$ berekend. Met de $f$ hangt de temperatuur samen:

$$T = T_0 f^{-6/5}$$

Daar in het geheele sterlichaam de temperatuur op deze wijze verandert, mogen wij aannemen, dat ook de effectieve temperatuur op dezelfde wijze verandert; de straling per oppervlakteeenheid verandert dan evenredig met $T^4$, dus met $f^{-24/5}$. Het oppervlak zelf verandert als $f^2$, dus de lichtkracht als $f^{-14/5}$

$$\log L - \log L_0 = - {}^{14}/_5 \log f.$$

Of in grooteklassen

$$m - m_0 = 7 \log f. \quad (6)$$

In de volgende tabel zijn voor eenige waarden van $f$ de bijbehoorende $At$ en $m - m_0$ samengesteld.

| $f$ | $At$ | $m - m_0$ |
|---|---|---|
| 1.0 | 0.0 | 0,0 |
| 1.1 | 0.455 | 0,290 |
| 1·2 | 0.655 | 0,554 |
| 1.3 | 0.815 | 0,798 |
| 1.4 | 0.956 | 1,023 |
| 1.5 | 1.086 | 1,233 |
| 1.6 | 1.207 | 1,429 |
| 1.7 | 1.322 | 1,613 |
| 1.8 | 1.433 | 1,787 |
| 1.9 | 1.541 | 1,951 |
| 2.0 | 1.645 | 2,107 |
| 2.5 | { 2.137 | 2,786 |
| | { 2.135 | |
| 3. | 2.599 | 3,340 |
| 4. | 3.479 | 4,214 |

| $f$ | $At$ | $m - m_0$ |
|---|---|---|
| 5. | 4.327 | 4,893 |
| 10 | 8.397 | 7,000 |
| 20 | 16.307 | 9.107 [1]) |

De helderheid neemt dus eerst langzaam, dan steeds sneller af, maar deze snelheid bereikt spoedig een maximum, als de ster ruim 1 grootteklasse beneden het oorspronkelijke licht is gedaald. Dan wordt de snelheid van afname weer langzamer, om ten slotte tot een logarithmische lijn te naderen.

Het langzame begin van de daling wordt bij de nieuwe sterren niet waargenomen, omdat dan het proces van opvlamming nog niet uitgewerkt is. De Nova Persei en de Nova Aquilae hadden beide hun maximum één dag nadat zij reeds de 1ste grootte bereikt hadden, terwijl de Nova Persei nog één dag vroeger reeds de 3de grootte bereikt had. Als uitgangspunt $t = 0$ mag dus niet het oogenblik van maximum genomen worden, maar 1 of 2 dagen vroeger. Daarna komt een snelle afname, die echter weldra langzamer wordt, en door periodieke schommelingen begeleid wordt. Het blijkt bij vergelijking van de waargenomen en de hier berekende lichtkromme dat zij bij het verder verloop niet overeenstemmen; de gemiddelde waargenomen helderheid neemt veel langzamer af, dan hier berekend is. Hier komen blijkbaar andere invloeden in het spel, die buiten de hier gegeven eenvoudige theorie vallen. Alleen voor het eerste tijdvak van snelle lichtafname is op overeenstemming te rekenen.

Wij nemen als ideaalmaximum van Nova Persei 0,0 aan, iets hooger dan de grootst waargenomen helderheid, omdat daarbij het einde der opvlamming reeds samenvalt met het begin van de expansie; en het ideale begintijdstip $t = 0$ op 21 Februari. Dan vindt men uit de $m - m_0$ van de waargenomen vereffende lichtkromme de volgende waarden voor $At$.

| Datum | waarg. $m$. | $At$ | $t$ | quotient | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 Febr. | 1.00 | 0,97 | $4^d$ | 0.24 | $2{,}8.10^{-6}$ |
| 27 ,, | 1.62 | 1.35 | 6 | 0.22 | 2,6 ,, |
| 1 Mrt. | 2.07 | 1.62 | 8 | 0.20 | 2,3 ,, |
| 3 ,, | 2.42 | 1.85 | 10 | 0.18 | 2,2 ,, |
| 5 ,, | 2.73 | 2.07 | 12 | 0.17 | 2,0 ,, |
| 7 ,, | 3.02 | 2.30 | 14 | 0.16 | 1,9 ,, |
| 9 ,, | 3.27 | 2.53 | 16 | 0.16 | 1,8 ,, |
| 11 ,, | 3.48 | 2.71 | 18 | 0.15 | 1,7 ,, |
| 13 ,, | 3.65 | 2.88 | 20 | 0.14 | 1,7 ,, |

[1]) De waarden van 1,0 tot 2,5 zijn met de formule 5$b$, van 2,5 tot 20 met formule 5$a$ berekend.

Uit de afname van het quotient blijkt, dat de invloeden, die naderhand de afname in sterker mate verlangzamen, dan de theorie eischt, ook reeds in dit eerste gedeelte merkbaar beginnen te worden. In elk geval is de orde van grootte van de $A$, die hier gevonden wordt, wel juist; en daaruit zijn conclusies over de constitutie der Novae af te leiden.

Drukt men alle grootheden in het absolute stelsel uit, dan wordt $t$ in seconden gemeten; nemen wij voor het quotient in bovenstaande tabel 0,21, dan wordt

$$A = 0{,}21 : 86400 = 2{,}5 \,.\, 10^{-6}.$$

Bij de Nova Aquilae vindt men ongeveer dezelfde waarde.

II.

De verdeeling van druk en temperatuur voor $t = 0$, die voor een gelijkvormige expansie noodig is, en de samenhang van $A$ met deze verdeeling wordt bepaald door formule 3), waar wij nu de indices 0 weglaten:

$$-\frac{1}{r\varrho}\frac{dp}{dr} = A^2$$

of

$$\frac{dp}{dr} = -A^2 r\varrho$$

of

$$p = +A^2 \int_R^r \varrho r \, dr \, .$$

waarin $R$ de straal van het buitenoppervlak is, waar $p = 0$ is. Neemt men een bepaalde dichtheidsverdeeling aan, die bestaat op het oogenblik van opvlamming, dan bepaalt deze formule den druk, dus ook de temperatuur als functie van $r$:

$$T = \frac{A^2}{H\varrho}\int_R^r \varrho r \, dr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Voor de dichtheid zijn de waarden genomen, die Emden voor de evenwichtsvormen van bolvormige kosmische gasmassa's berekend heeft (bij $n = 2^1/_2$, $k = 1{,}4$); de integratie is mechanisch uitgevoerd. De integratieintervallen zijn 4 × kleiner genomen, dan de eenheid van $r_1$ bij Emden; in onze eenheid uitgedrukt is de straal van het buitenoppervlak $= 21{,}67$. Het resultaat van de integratie is:

| $r$ | $\log \varrho$ | $21.67^2 \int_R^r \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{r\,dr}{R^2}$ | $I = \frac{21.67^2 \varrho_0}{\varrho} \int_R^r \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{r\,dr}{R^2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.00000 | 22,5274 | 22.53 |
| 2 | 9.95523 | 20,6746 | 22.92 |
| 4 | 9.82604 | 16.0941 | 24.02 |
| 6 | 9.62544 | 10.8138 | 25.62 |
| 8 | 9.36944 | 6.3898 | 27.30 |
| 10 | 9.06954 | 3.3527 | 28:56 |
| 12 | 8.72945 | 1.5525 | 28.94 |
| 14 | 8.34375 | 0.6148 | 26.61 |
| 16 | 7.88832 | 0.1922 | 24.84 |
| 18 | 7.29284 | 0.03928 | 20.04 |
| 20 | 6.32566 | 0.00315 | 15.12 |

De integraal $I$ is evenredig met de temperatuur. Hier blijkt dus uit, dat *voor de gelijkvormige expansie een temperatuurverdeeling noodig is, die zeer weinig van een overal gelijke temperatuur afwijkt.* Wanneer niet een oppervlakkige temperatuurverhooging door wrijving tegen een nevelmassa plaats vindt, maar door een katastrofe de geheele massa tot binnen in gloeiend wordt, is een vrijwel gelijke temperatuur door de geheele massa ook te verwachten, en in dit geval zal, zooals hier blijkt, vrijwel een gelijkvormige uitzetting plaats vinden.

Nu is voor

$$I = \frac{21.67\, \varrho_0}{\varrho} \int_R^r \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{r\,dr}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$T = \frac{IR^2 A^2}{21{,}67^2 . H} = \frac{IR^2 A^2 \mu}{21{,}67^2 . 8{,}3.10^7}$$

als $\mu$ het moleculair gewicht is van het gas, waaruit de ster bestaat. Vult men hier de gevonden waarde van $A$ in, dan wordt de gemiddelde temperatuur ($I = 25$):

$$T = \frac{25 \times 6.25.10^{-12}}{21{,}67^2 \times 8{,}3.10^7} R^2 \mu = 4.10^{-21} R^2 \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dit geeft voor $T = 10^4$ graden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R^2\mu = 2{,}5.10^{24}$ | dus voor | $\mu = 1$ (gediss. $H$) | $\mu = 50$ (metalen) |
| | | $R = 1{,}6 \times 10^{13}$ | $2{,}3 \times 10^{11}$ |
| | | $= 23 \times$ zon | $3{,}5 \times$ zon. |

en voor $T = 10^5$ graden

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R^2\mu = 2{,}5.10^{25}$ | dus | $R = 5 \times 10^{12}$ | $7 \times 10^{11}$ |
| | | $= 71 \times$ zon | $10 \times$ zon |

Daar de massa bij deze hooge gloeihitte sterk gedissocieerd zal zijn, zijn de eerste waarden dichter bij de waarheid, dan die voor $\mu = 50$. Er blijkt uit, dat *een Nova op het oogenblik van grootste helderheid* niet slechts in lichtkracht, maar *ook in straal en volume een veel reusachtiger lichaam is, dan de zon.* De voorstelling, dat een nieuwe ster ontstaat, doordat een donker lichaam van de grootte van onze zon, dus een gewone afgekoelde dwergster, plotseling tot kolossale temperatuur stijgt, is met deze berekeningen in strijd; voor $R = 7.10^{10}$, de straal van onze zon, zou bij $\mu = 50$ en de waargenomen $A$ de temperatuur slechts 1000° worden; voor $T = 10^{6}$ zou de $A$ 10 maal grooter zijn, dus de tijd, waarin de ster haar licht verliest, 10 maal kleiner worden.

Deze uitkomst stemt overeen met de waarde 0",011 voor de parallaxe van Nova Persei, door KAPTEYN afgeleid uit de onderstelling, dat de nevelringen, die een half jaar later gefotografeerd werden, door gereflecteerd sterlicht ontstonden. Dit geeft een lichtkracht 10000 maal grooter dan van de zon; daar de intensiteit van de oppervlaktestraling niet veel anders was, dan bij een gewone witte ster — HERTZSPRUNG vond bij Nova Aquilae een gelijksoortige intensiteitsverdeeling als bij $\alpha$ Aquilae [1]) — moet de straal van de Nova verscheidene tientallen maal de straal van de zon geweest zijn.

Wanneer onze interpretatie van de donkere lijnen in het spectrum juist is, die de heldere lijnen steeds aan de violette zijde begeleiden, dan vindt men daaruit ook een groote waarde voor $R$. De snelheid, waarmee de buitenste deeltjes zich naar ons toe bewegen is $R\,{}^{df}/_{dt}$. Op het tijdstip, dat het licht 2 grootteklassen gedaald is, was ${}^{df}/_{Adt} = 1$, dus $R\,{}^{df}/_{dt} = AR = 2{,}5.10^{-6}.\ R.$ Voor $R =$ de straal van de zon zou dit 1,7 K.M. worden. De waargenomen verplaatsing van de donkere lijnen was zoo veel als met een snelheid van 700 K.M. overeenstemt. De werkelijke snelheid moet echter kleiner zijn, omdat de absorbtielijn voor een deel door de aangrenzende breede emissielijn uitgewischt wordt; neemt men aan, dat zij omstreeks 100 of 200 K.M, is geweest, dan vindt men voor $R$ een bedrag van 60 of 120 maal de straal van de zon, dus weer een waarde van dezelfde orde van grootte.

De Novae in hun eerste grootste helderheid bezitten dus het karakter van reuzensterren; zal hun massa niet buitengewoon groot zijn, dan moet hun dichtheid reeds gering zijn vóór de expansie. De hier gevonden betrekking tusschen $T$, $R$ en $A$ kan daaromtrent niets leeren, omdat zij de dichtheid niet bevat. Een andere aan-

---

[1]) Astronomische Nachrichten Bd 207. Nr. 4950.

wijzing voor zulk een geringe dichtheid ligt echter in het feit, dat na een daling van 4 grootteklassen het spectrum in de minima der lichtschommelingen steeds meer het karakter van een nevelvlekkenspectrum kreeg, en nóg eenige maanden later de ster een nevelvlek was geworden. In dit stadium is de dichtheid zoo gering geworden, dat de zichtbare emissie van het geheele lichaam tot de achterste lagen uitgaat en toch slechts een geringe vlaktehelderheid geeft; dat deze toestand optreedt, als de expansiefactor misschien 10 of 20 is geworden, bewijst, dat ook de oorspronkelijke dichtheid reeds ver beneden 1 moet zijn geweest.

III.

De oorspronkelijke bewegingsvergelijking 1) kan nog zoo geschreven worden, dat er geen dimensies in voorkomen.

Wij stellen

$$r = \gamma s \qquad \Delta = \gamma x \qquad t = \delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

waarin $\gamma$ een lineaire maat is, $\delta$ een tijdsbedrag, en $s$, $x$, en $z$ numerieke getallen. Dan worden de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dz^2} = -\dfrac{7}{2}\,\alpha\beta\dfrac{\delta^2}{\gamma^2}\dfrac{dy}{ds} = -B\dfrac{dy}{ds} \\[2ex] s = s_0 + x\,; \qquad y = \left(\left(\dfrac{s}{s_0}\right)^2\dfrac{ds}{ds_0}\right)^{2/5} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

waarin $\beta$ een functie van de coordinate $s_0$ is. De functie $\beta$ en de constanten $\alpha, \beta, \gamma$ die te zamen de bijzondere constitutie en afmeting van een sterlichaam bepalen, zijn in de eene coëfficient $B$ vereenigd. Het verloop van de $x$ met $z$ is alleen afhankelijk van deze $B$; het geldt voor alle lichamen, die dezelfde $B$ hebben. De vergelijkingen (11) bepalen alle mogelijke bewegingen, voortgaande, onregelmatige of periodieke, die in een kosmische gasmassa kunnen plaats vinden, voorzooverre zij enkel functie van $r$ zijn en de gravitatie er bij te verwaarloozen is. Zonder deze bewegingen zelve te berekenen, is nu uit deze formules een gelijkvormigheidsbetrekking af te leiden, die de veranderingen in verschillende sterren met elkaar in samenhang brengt. Wanneer voor verschillende kosmische gasbollen de verdeeling van $\beta$ langs den straal dezelfde is, zal voor hen

$$x = \frac{\Delta}{\gamma} = f\left(\frac{r}{\gamma}, \frac{t}{\delta}\right)$$

dezelfde functie moeten zijn, mits voor hen $B$, dus $\alpha\beta\dfrac{\delta^2}{\gamma^2}$ hetzelfde getal is. Wanneer men voor elk een passende tijd- en afstandsschaal

aanneemt, dan zijn de bewegingen en variaties, daarin uitgedrukt, voor al deze lichamen identiek.

Nemen wij aan, dat er een periodieke oplossing van de vergelijkingen (11) bestaat, waarbij de deeltjes radiaal heen en weer bewegen, en de dichtheid periodiek adiabatisch grooter en kleiner wordt, dan zal deze bewegingstoestand voor al zulke lichamen gelden, mits de perioden der variaties in $\delta$ als maateenheid en de afmetingen van de lichamen in $\gamma$ worden uitgedrukt. Dan moet

$$\alpha_1 \delta_1^2 \gamma_1^{-2} = \alpha_2 \delta_2^2 \gamma_2^{-2}$$

zijn. Nu is $\alpha = HT_{00}$ (in het centrum), dus evenredig met de temperatuur in het centrum. Noemt men $P$ de periode van de variaties en $R$ den straal van den gasbol, dan volgt hieruit

$$P_1^2 : P_2^2 = \frac{R_1^2}{T_1} : \frac{R_2^2}{T_2} .$$

Mag men aannemen, dat zulke gelijksoortige lichamen dezelfde temperatuur hebben, dan wordt de lichtkracht evenredig met $R^2$, dus met $P^2$. Anders zal toch de temperatuur met een of andere macht van $R$ samenhangen, en bestaat de meer algemeene betrekking

$$P^2 \backsim L^n$$

of

$$2 \log P = Const. + n \log L$$

of

$$2 \log P = Const. - 0{,}4\, n \times M$$

als $M$ de absolute grootte voorstelt. Zulk een betrekking is door Miss Leavitt gevonden voor de veranderlijke sterren van het $\delta$ Cephei-type in de kleine Magelhaensche wolk [1]). Zij vond uit 25 sterren met perioden van 1,25 tot 127 dagen, dat de periode met de helderheid toeneemt, en wel zoo dat de log. van de periode per grootteklasse met 0,48 verandert.

De Cepheïden zijn reuzensterren, waarop de onderstellingen in zooverre toepasselijk zijn, dat de zwaartekracht, reeds klein door de geringe dichtheid, nog grootendeels door den stralingsdruk zal worden opgeheven. Ze zijn alle nagenoeg van hetzelfde spectraaltype, dus zal de temperatuur bij hen weinig verschillen. Het voor hen gevonden verband tusschen periode en lichtkracht laat zich dus eenvoudig verklaren, als men aanneemt, dat de lichtwisseling uit een pulseeren van den gloeienden gasbol ontstaat; niet, zooals dikwijls is ondersteld, een pulseerende deformatie, maar een pulseerende expansie en

---

[1]) Harvard Circular Nr. 173.

contractie. Hierbij zullen de absorbeerende lagen aan den voorkant van de ster beurtelings van ons af en naar ons toe bewegen, dus zal in het spectrum een periodieke verschuiving optreden. Deze verschuiving is doorgaans als aanwijzing van een baanbeweging opgevat, en daarom zijn de Cepheïden onder de spectroscopische dubbelsterren opgenomen. Maar onder deze nemen zij toch een zeer exceptioneele plaats in. Berekent men uit de baanelementen de massa, dan vindt men bij de Cepheïden buitengewoon veel kleinere waarden dan bij de andere spectroscopische dubbelsterren, terwijl toch hun volume heel veel grooter is dan de zon. Al is nu een exorbitant geringe dichtheid niet a priori onmogelijk, toch kan in de relatief geringe radiale snelheid een aanwijzing gevonden worden, dat hier een andere verklaring gegeven moet worden dan bij de gewone spectroscopische dubbelsterren.

Kan echter uit een expansie en contractie een zoo groote radiale snelheid ontstaan — van eenige tientallen kilometers per seconde — als de waarnemingen leeren?

Voor de lichtkracht van $\delta$ Cephei en $\eta$ Aquilae vond ADAMS uit het spectrum 60 $\times$ die van de zon, voor een gemiddelde Cepheïde met een periode van 6,6 dagen vond HERTZSPRUNG uit de eigen bewegingen 600 $\times$ die van de zon. Neemt men, naar de overeenkomst in spectraaltype en kleur, een gelijk uitstralingsvermogen per oppervlakte-eenheid aan, dan volgt daaruit voor den straal 8 resp. 24 maal de straal van de zon. Wordt de maximum expansie of contractie door den factor $f = 1 + \Delta f$ aangegeven, dan is de grootste radiale snelheid:

$$V = \frac{2\pi \Delta f . R}{86400 P},$$

waar $P$ de periode in dagen en $R$ de straal is. In kilometers is $R$ 8 resp. $24 \times 7.10^5$. Neemt men voor $P$ 6 dagen, dan wordt

$$V = \frac{6{,}3 \Delta f \times 8 \text{ (of } 24) \times 7.10^5}{4{,}3 \times 10^5} = 82 \text{ resp. } 246 \Delta f \text{ KM.}$$

Daar deze Cepheïden in visueele lichtsterkte wat minder dan 1 grootteklasse, in photographische helderheid wat meer fluctueeren, nemen wij voor de variatie in totale uitstraling een grootteklasse aan; dus $\log L$ varieert een bedrag 0,20 boven en beneden het gemiddelde. Varieert de straal als het getal $f$, dan de dichtheid als $f^3$, de temperatuur als $f^{6/5}$ en de uitstraling als $f^{24/5}$; uit $\log L = \pm 0{,}20$ volgt dan $\log f = \pm 0{,}04$ dus $f$ wisselt tusschen 1,1 en 0,9. In de uitdrukking voor $V$ moet dus voor $\Delta f$ 0,1 genomen worden en de grootste radiale snelheid wordt 8 resp. 25 KM. per seconde. Deze

waarde moet nog wat verminderd worden, omdat spectrografisch de gemiddelde snelheid van het geheele voorste oppervlak gemeten wordt, waarvan alleen de middelste gedeelten de hier berekende snelheid hebben. Maar ook dan stemt de hier gevonden waarde voldoende met de gemeten snelheden (10 à 20 KM. per seconde) overeen, om een verklaring van de lichtwisseling en de variatie in radiale snelheid door contractie en expansie toe te laten.

Er zijn een paar andere bezwaren tegen deze verklaring. Het eene is hetzelfde bezwaar, dat ook tegen de verklaring door een baanbeweging bestaat: dat de maximum helderheid samenvalt met de grootste snelheid naar ons toe. Het andere ligt in den door Miss Leavitt gevonden coëfficient 0,48. Mag men voor deze Cepheïden gelijkheid van spectraalklasse, dus van uitstralend vermogen en van $T$ aannemen, dan wordt de lichtkracht evenredig met het oppervlak, dus

$$P^2 \backsim L.$$

of

$$\log P = Const. - 0{,}2\ M.$$

In dit geval moest de coefficient dus 0,2 zijn, terwijl Miss Leavitt een veel sterker verandering van de periode, dus een veel geringer verandering van de lichtsterkte vindt. Het is daarom moeilijk, de afwijking te verklaren door een samenhang van de temperatuur $T$ met de lineaire afmeting $R$; want daarbij zou dan $T$ des te kleiner moeten zijn, naarmate de ster grooter is. Misschien kan een verklaring gevonden worden door aan te nemen, dat de massa der Cepheïden inderdaad klein is, dus de dichtheid uiterst klein, zoo klein, dat de door de eene kant uitgezonden lichtstralen het geheele sterlichaam kunnen doordringen, zonder geheel geabsorbeerd te worden. Is een lichtende gasbol zoo ijl, dat wij de emissie ook van de achterste lagen onverzwakt waarnemen, dan zal het totale licht van zulk een gasbol niet meer evenredig met het oppervlak, maar met de massa zijn, dus voor twee lichamen van gelijke massa en verschillende afmeting even groot. Tusschenvormen zijn denkbaar, waarin het totale licht dan met een lagere macht van $R$, b.v. de eerste, evenredig is. In zulk een toestand zou de coëfficient van $M$ in de formule voor $\log P$ ongeveer 0,40 worden.

**Physiologie.** — De Heer ZWAARDEMAKER biedt een mededeeling aan van den Heer EUG. DUBOIS: „*De beteekenis der grootte van het neuron en zijn deelen*".

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

Het bestaan van bepaalde hoeveelheidsbetrekkingen van het neuron en zijn deelen tot het lichaamsgewicht behoeft nu wel niet meer betwijfeld te worden [1]). Bij homoneure zoogdiersoorten (soorten met dezelfde inrichting van het zenuwstelsel), welker lichaamsgewichten tot elkander staan als $P:1$, verandert het volume van homologe neuronen — zooals het volume (of het gewicht) der hersenen — evenredig aan $P^{0.56}$, het volume van hun centraal deel, het cellichaam evenredig aan $P^{0.28}$. Men mag aannemen, dat de ideale waarden zijn $P^{0.55\cdots}$ en $P^{0.277\cdots}$.

Deze betrekkingen zijn het best na te gaan aan de perifere zenuwvezel. Aangezien deze verreweg het grootste deel van het neuron waartoe zij behoort uitmaakt, verandert bij homoneure soorten ook het volume der homologe perifere zenuwvezels vrij nauwkeurig evenredig aan $P^{0.56}$. En gegeven dat de lengte van de zenuwvezel, bij *volkomen gelijkvormige* homoneure soorten, evenredig aan de longitudinale dimensie van het dier, dat is aan $P^{0.33}$ moet veranderen, ligt het besluit voor de hand, dat zoowel de doorsnede als de lengte der homologe perifere zenuwen van homoneure soorten, die in de werkelijkheid — om physiologische redenen — *niet volkomen* gelijkvormig kunnen zijn, *ongeveer* evenredig met de longitudinale dimensie van het dier verandert.

Bij volkomen gelijkvormigheid zou, waar de zenuwlengte evenredig aan $P^{0.33\cdots}$ toeneemt, de doorsnede evenredig aan $P^{0.66\cdots}$ en het volume evenredig aan $P$ moeten toenemen. Dit nu is physiologisch onmogelijk, zooals in den samenhang moge blijken. De beschikbare numerieke gegevens, physiologisch beschouwd, strekken inderdaad tot het besluit, dat *de lengte en de doorsnede gelijkmatig* toenemen, dat is dan beide evenredig aan $P^{0.28}$ en derhalve in dezelfde verhouding als het cellichaam voluminenzer wordt. Dit geldt zoowel voor de neuronen met perifere zenuwvezels die de influxies centripetaal voortgeleiden, de gevoelszenuwvezels, als voor

[1]) Deze Verslagen, Deel XXVI, Vergadering van 23 Maart 1918, p, 1416—1425.

de neuronen met perifere zenuwvezels door welke influxies naar buiten afvloeien, de bewegingszenuwvezels.

Ook voor de neuronen van de hersenen (zeker, zoo al niet morphologisch, dan toch als functioneele eenheden met de perifere neuronen te vergelijken) mag, blijkens de gelijke hier geldende hoeveelheidsbetrekkingen, hetzelfde worden aangenomen als voor de neuronen met perifere zenuwvezels.

Evenwel zijn *directe* gegevens, waarnaar de betrekkelijke grootte der doorsneden van homologe zenuwvezels kan beoordeeld worden, nog maar zeer beperkt beschikbaar. De meeste hebben betrekking op het oog en wel op zenuwuiteinden, waar het netvliesvlak de grootte van een bijzonder belangrijke groep van impulsies aanvoerende zenuwleidingen aangeeft. Vele van deze gegevens zijn door LAPICQUE, in samenwerking met LAUGIER en WATERLOT [1]), ons aan de hand gedaan, door metingen van de oogmiddellijn bij tal van Zoogdieren, Vogels, Reptielen en Amphibiën; daaruit leeren wij bij benadering de relatieve grootte van het netvlies kennen. Nam LAPICQUE, op grond van deze metingen, oorspronkelijk (in 1908) aan, dat de oogmiddellijnen vrij wel evenredig aan de macht $^1/_8$ van het lichaamsgewicht veranderen, later (in 1910) beschouwt hij als nauwkeuriger evenredigheid de macht $^1/_7$ van het lichaamsgewicht. Naar de eerste schatting van LAPICQUE zou het netvliesvlak ongeveer evenredig aan $P^{2/8}$ of $P^{0.25}$ moeten veranderen, daarentegen evenredig aan $P^{2/7}$ of $P^{0.2857}$ naar zijn laatste schatting. De gegevens als zoodanig laten inderdaad slechts schatting van de algemeene uitkomst toe.

Enkele voorbeelden mogen hier volstaan, in de eerste plaats ontleend aan de tabellen van LAPICQUE en zijn medewerkers. Voor den relatie-exponent hier bedoeld, dien ik door $r_0$ zal aangeven in de formule

$$\left(\frac{P}{p}\right)^{r_0} = \frac{O}{o}$$

en

$$r_0 = \frac{log\ O - log\ o}{log\ P - log\ p}$$

waar $P$ en $p$ de lichaamsgewichten en $O$ en $o$ de netvliesvlakken (hier juister de aan deze bij benadering evenredige doorsneden van den oogbol) aanduiden, vind ik de volgende waarden.

Bij vergelijking van het oogvlak, berekend uit de oogmiddellijn van Equus caballus en Antilope (dorcas?) 0.2643, van Canis lupus

[1]) Zie deze Verslagen, Deel XXVI, (1918), p. 1425, noot 1).

en Canis vulpes 0.2668, Felis pardus en Felis domestica 0.2390, Mustela putorius en Mustela erminea 0.3004; als gemiddelde van deze drie Carnivorenparen 0.2687.

Van de door WATERLOT onderzochte Reptielen geeft de reusachtige Hagedis Varanus niloticus, met 7500 G. lichaamsgewicht en 12.5 mM. oogmiddellijn, vergeleken met den kleinen Gekko Hemidactylus Brooki (3 indiv.), die slechts 4.9 G. zwaar is en een oogmiddellijn heeft van gemiddeld 4.25 mM., voor $r_0$ de waarde 0.2942. Dezelfde Waraan met een Smaragdhagedis, Lacerta viridis (bij LAPICQUE) van 16.8 G. gewicht en 5.8 mM. oogmiddellijn vergelijkend, vind ik $r_0 = 0.2517$. Het gemiddelde van deze twee waarden is 0.2730.

Van Amphibiën noem ik (ook naar LAPICQUE) Rana fusca, met 53.0 G. lichaamsgewicht en 6.6 mM. oogmiddellijn, en Hyla arborea, met 4.8 G. lichaamsgewicht en 4.6 mM. oogmiddellijn. Deze geven $r_0 = 0.3006$.

Een paar Visschen bij WELCKER[1]), Cyprinus carpio en Gobio fluviatilis (2 indiv.), van resp. 1817.3 G. en 42.2 G. lichaamsgewicht en 1550 en 238 m. G. ooggewicht (waarnaar hier de doorsnede berekend wordt) geven $r_0 = 0.3290$.

Opgaven van uit directe metingen nauwkeurig berekende *netvlies*vlakken van eenige volwassen soorten van waterzoogdieren, die voor een deel zeer veel in lichaamsgrootte verschillen, zijn te vinden in de groote verhandeling van PÜTTER[2]). De meest homoneure soorten, Phoca barbata en Phoca vitulina, welker lichaamslengten tot elkander stonden als 3 : 1.75, hadden netvliesvlakken van 2543 en 1980 $mM^2$. Gelijkvormigheid dezer dieren aannemend vindt men, bij een gewichtsverhouding van slechts ruim 5 : 1, $r_0 = 0.2972$.

Van twee Tandwalvisschen, elkander wel minder nabestaand, maar met veel grooter gewichtsverschil, Hyperoodon rostratus en Phocaena communis, was de lengteverhouding 6 : 1 en de grootte der netvliesvlakken 5000 en 1225 $mM^2$. Weder gelijkvormigheid aannemend, vindt men voor de verhouding der lichaamsgewichten 216 : 1 en dan $r_0 = 0.2617$. Daar evenwel Hyperoodon wat slanker gebouwd is dan Phocaena, moet de werkelijke gewichtsverhouding iets kleiner geweest zijn; de werkelijke waarde van $r_0$ was aldus iets hooger.

---

[1]) H. WELCKER—A. BRANDT, Gewichtswerthe der Körperorgane bei dem Menschen und den Thieren. Archiv für Anthropologie, Bd. 28 (1902), p. 60.

[2]) A. PÜTTER, Die Augen der Wassersäugetiere. Zoologische Jahrbücher, Abteilung für Anatomie und Ontogenie der Tiere. Jena 1903, pag. 167, 174, 198, 209, 239, 243, 272, 280. De berekeningen van de grootte der niet gemakkelijk te vergelijken netvliesvlakken werden verricht door A. LERCH.

De reusachtige Balaenoptera physalus, die eveneens slanker is dan Phocaena communis, vergelijkend met deze laatste, van nog verdere verwantschap, maar die zij 5323 maal in gewicht, berekend naar de lengte, overtreft, vindt men, bij eene verhouding der netvliesvlakken van 11500 : 1225 mM², dat $r_0 = 0.2610$. Ook deze waarde zou zeker iets grooter worden, als het werkelijk gewicht, in plaats van het uit de lengte gevondene, in rekening had kunnen gebracht worden.

De afwijkingen der gevonden exponenten van de waarde 0.277 .. komen niet hinderlijk voor, als men bedenkt, dat

1°. de vergeleken soorten niet alle volkomen homoneure zijn,

2°. ook als invividu voor hunne soort niet altijd typisch zijn,

3°. uit de oogmiddellijn (in één geval het ooggewicht) slechts bij benadering juist het netvliesvlak te berekenen is,

4°. in andere gevallen het lichaamsgewicht niet direct bepaald werd.

Op grond van deze en vele andere gegevens, beschouwd in het licht hunner physiologische beteekenis, meen ik te mogen aannemen, dat de grootte van het netvliesvak bij homoneure soorten van Gewervelde dieren inderdaad gemiddeld evenredig aan $P^{0.28}$ of nauwkeuriger $P^{0.277..}$ verandert, en dat dezelfde evenredigheid algemeen geldt voor het vlak der doorsnede van de homologe zenuwvezels.

Omtrent deze verhoudingen bij individuen binnen eene soort staan nog zoo goed als geen directe gegevens ter beschikking. LAPICQUE [1]) geeft aan, dat bij Canis familiaris de oogmiddellijn slechts verandert van 20 tot 23 mM., waar het lichaamsgewicht verandert van 5 tot 40 K.G., dat is ongeveer als de vijftiende machtswortel van dat gewicht. Voor $r_0$ vindt men hier 0.1344, hetgeen zeggen wil, dat de individueele oculaire relatie-exponent in dezelfde verhouding (in aanmerking van den nauwkeurigheidsgraad dezer metingen) is afgenomen, met betrekking tot hetgeen men tusschen verschillende soorten waarneemt, als de encephalische relatie-exponent. Dat de gevonden waarde dichter ligt bij de helft van 0.28 dan van 0.22 zij ter loops opgemerkt.

Metingen der dikte van homologe zenuwvezels bij individuen van verschillend gewicht eener soort, ter beoordeeling van de hier bedoelde verhouding, ontbreken geheel, maar ik meen het voor waarschijnlijk te mogen houden, dat de doorsnede der perifere zenuwvezels gelijk blijft en dat daarentegen de witte zenuwvezels der hersenen zoowel in de lengte als in de doorsnede evenredig aan $P^{0.14}$ (of $P^{0.11}$?) veranderen, waarmede in verband staat het ont-

[1]) L. LAPICQUE, La grandeur relative de l'oeil et l'appréciation du poids encéphalique. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1908 (2). Tome 147, p. 210.

breken der insnoeringen van RANVIER aan die zenuwvezels in de hersenen en het gelijk blijven van het getal der insnoeringen aan de perifere zenuwvezels bij groote en kleine individuen van dezelfde soort, terwijl van soort tot soort dat getal evenredig met de lengte van de perifere zenuwvezel verandert[1]).

De beteekenis van de functie $P^{0.28}$ moet in de verrichtingsfunctie van de zenuwvezel en het netvlies, namelijk de voortplanting van de impulsies of influxies, gezocht worden. Evenzoo van dezelfde betrekking tusschen het lichaamsgewicht en het volume der gangliëncel, welk volume ongetwijfeld verband moet houden met de hoeveelheid der impulsies, die zij kan opnemen en afgeven.

Het eerst heeft GÖTHLIN (in 1907) het denkbeeld uitgesproken, dat de snelheid, waarmede de zenuw-influxie zich in een ascilinder voortplant in bepaalde betrekking schijnt te staan met de middellijn van den ascilinder en met de dikte van de mergscheede, toen hij beproefde op de witte zenuwvezel de kabel-formules van WILLIAM THOMSON toe te passen[2]). Tien jaar later acht GÖTHLIN terecht de gegevens ter beoordeeling van die betrekking nog bedroevend zeldzaam[3]). Hij herinnert (in 1917) er aan, dat volgens de buitengewoon belangrijke onderzoekingen van CHAUVEAU, in 1878, de voortgeleiding in de motorische zenuwvezels van den larynx van het Paard ongeveer 8 maal sneller is dan in de motorische zenuwvezels van den oesophagus van dat dier[4]) en brengt dat verschil in snelheid van voortplanting van de „influx nerveux" in verband met de zeer verschillende dikte der bedoelde zenuwvezels[5]). In de zeer dunne en tevens merglooze vezels der miltzenuw van het Rund is de snelheid volgens A. FISCHER[6]) slechts $^{1}/_{11}$ van die in de trage pharynx-

[1]) A. E. BOYCOT, On the Number of Nodes of Ranvier in different stages of the Growth of Nerve Fibres in the Frog. Journal of Physiology. Vol. 30 (1904). London, p. 370—380. Aldaar ook vergelijking van Cavia porcellus en Mus musculus.

[2]) G. F. GÖTHLIN, Experimentella Undersökningar af Ledningens Natur i den Hvita Nervsubstansen. Uppsala 1907, p. 120 seq.

[3]) Relation entre le fonctionnement et la structure des éléments nerveux. Upsala 1917, p. 15.

[4]) A. CHAUVEAU, Vitesse de propagation des excitations dans les nerfs moteurs des muscles rouges de faisceaux striés, soustraits à l'empire de la volonté. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Tome 87. Paris 1878, p. 238—242. Aldaar, p. 138—142, ook: Vitesse de propagation des excitations dans les nerfs moteurs des muscles de la vie animale, chez les animaux mammifères.

[5]) A. VAN GEHUCHTEN en M. MOLHANT, (Contribution à l'étude anatomique du nerf pneumogastrique chez l'Homme. Le Névraxe. Vol. 13. Louvain 1912, p. 96) bij het Konijn.

[6]) A. FISCHER, Ein Beitrag zur Kenntnis des Ablaufs der Erregungsvorgänge im marklosen Warmblüternerven. Giessen 1911. cf. Göthlin, p. 15.

zenuwen van het Paard. GÖTHLIN voegt hieraan toe (p. 16), dat alleen door aan te nemen, dat de influxie zich op dezelfde wijze voortplant in de zenuwvezel als de electriciteit in een kabel, men kan begrijpen waarom de voortplantingssnelheid volgens de afmetingen der vezels verandert. Met de verdikking van de mergscheede, die als „relatieve isolator" dienst doet, vermindert blijkbaar de capaciteit van den kabel en met de vergrooting van de doorsnede van den "geleidenden" ascilinder vermindert de weerstand van den kabel. Inderdaad verhoogen beide dan gelijkelijk het geleidingsvermogen van de zenuwvezel en wordt het aldus begrijpelijk, dat (zooals DONALDSON en HOKE en ook anderen vonden) in alle Gewervelde dieren de gemiddelde doorsnede der mergscheede gelijk blijft aan die van den ascilinder, dien zij omhult. Daarbij, aldus doet GÖTHLIN weder terecht opmerken, heeft men zich de zenuwvezel geenszins voor te stellen als een even passieven geleider als bijvoorbeeld een telegraafdraad. Integendeel maken vele omstandigheden het noodzakelijk, aan te nemen, dat in alle lange zenuwvezels, die snelle geleiders zijn, de influxie gedurende hare voortplanting zich op een of andere wijze regenereert en aldus de energieverliezen compenseert bij de voortplanting in eene steeds grooter wordende ruimte[1]).

CHAUVEAU onderstelde blijkbaar verband tusschen de grooter of geringer snelheid van voortplanting der „excitations" in de zenuwen en de al of niet willekeurigheid der bewegingen die zij opwekken. Het staat thans wel vast, dat men hier aan meer tastbare oorzaken te denken heeft.

Onze kennis werd belangrijk vooruitgebracht door de onderzoekingen van CARLSON (in 1904 en 1906)[2]). Hij toonde aan, dat bij Reptielen (Slangen), Amphibiën (Kikvorsch), Visschen (de Zeeprik Bdellostoma), Koppootigen (Octopus, Loligo), Slakken (Naakte landslak, Zeehaas) en Kreeften (Spinkrab, Hommer, Molukkenkreeft) evenredigheid bestaat tusschen de voortplantingssnelheid der impulsies in de motorische zenuw en de snelheid der contractie van de spier. In ieder dier wordt de vlugger werkende spier door een sneller

---

[1]) Vergelijk: J. B. JOHNSTON, On the Significance of the Caliber of the Parts of the Neurone in Vertebrates. Journal of Comparative Neurology and Psychology. Vol 18. Philadelphia 1908, p. 609—618.

[2]) A. J. CARLSON, The Rate of the Nervous Impulse in the Spinal Cord and in the Vagus and the Hypoglossal Nerves of the Californian Hagfish (Bdellostoma Dombeyi). American Journal of Physiology. Vol. X. Boston 1904, p. 401—418.

——, Further evidence of the direct relation between the Rate of Conduction in a Motor Nerve and the Rapidity of Contraction in the Muscle. Ibid. Vol. XV. Boston 1906, p. 136—143.

geleidende zenuw voorzien. Alle zenuwen zijn als het ware gestemd op de spier, die zij voorzien.

Dit verband vastgesteld zijnde, ging LAPICQUE met LEGENDRE[1]) na welk anatomisch kenmerk der zenuwvezels beantwoordt aan die physiologische eigenschappen. Zij vonden bij den gewonen Kikvorsch (Rana esculenta), dat met de snelheid van voortplanting der influxie, te meten door de snelheid der spiercontractie, regelmatig toeneemt de dikte van de zenuwvezels. Uit de door hen medegedeelde waarden is af te leiden, dat de bedoelde snelheid in de zenuwvezel evenredig met de *doorsnede* van de zenuwvezel verandert. Ook voor het Konijn bleek hun, dat o.a. de zenuwvezels voor den snellen Adductor magnus dikker zijn dan die voor den Semitendinosus, die een langzame spier is. Algemeen geldt dus wel: „Les fibres nerveuses sont d'autant plus rapides qu'elles sont plus grosses".

Verder toonde LAPICQUE aan, dat de lichaamsbewegingen van verschillende Amphibiën des te vlugger of langzamer zijn, naarmate de voortplantingssnelheid in de zenuwen der achterpooten grooter of kleiner is[2]). Bij de langzame Aardpad (Bufo vulgaris) is de snelheid in de zenuw voor den musculus gastrocnemius slechts ongeveer half zoo groot als bij den gewonen Kikvorsch (Rana esculenta), die vlug en ver springt. De Kikvorschpad (Pelobates fuscus) overtreft in de snelheid harer bewegingen ver de eigenlijke Padden en heeft ook even snelle zenuwen in haar achterpooten als de Kikvorsch. Doch ook de Groene Pad (Bufo viridis), die vlugger en behendiger is dan de Aardpad, betrekkelijk wijde sprongen maakt en goed zwemt en klimt, staat in de snelheid der zenuwen van de achterpooten met den Kikvorsch gelijk. Bufo calamita springt wel niet als de Kikvorsch, maar loopt bijna even snel als een muis (vandaar zijn andere naam *cursor*), zwemt snel en behendig, klimt beter dan eenige andere Pad en graaft (met haar achterpooten de aarde uitwerpend) gemakkelijk holen; zij heeft ongeveer de zenuwsnelheid van den Kikvorsch. Hetzelfde is het geval met den Boomkikvorsch (Hyla arborea), die gevleugelde insekten, als zijn prooi, bespringt.

Nu is bij een langzame Amerikaansche Pad (Bufo lentiginosus),

---

[1]) L. LAPICQUE et R. LEGENDRE, Relation entre le diamètre des fibres nerveuses et leur rapidité fonctionnelle. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Paris 1913 (2). Tome 157, p. 1163—1166. Ook: La rapidité fonctionnelle des fibres nerveuses mesurée par la chronaxie et son substratum anatomique. Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1914, N⁰. 4, Paris 1914, p. 248—252.

[2]) LOUIS LAPIQUE, Rapidité nerveuse des membres postérieurs chez divers Batraciens anoures. Bulletin du Muséum d'histoire naturelle, Année 1914, N⁰. 6, p. 363—366.

die zoo groot is als onze Aardpad, de gemiddelde diameter der vezels van den nervus ischiadicus, volgens DONALDSON en HOKE, 11.2 micra, tegen 14.7 bij een ongeveer even zwaren kikvorsch (Rana virescens). Bij een gewone Amerikaansche Hagedis (Sceloporus undulatus), van 8.2 gram lichaamsgewicht, was de gemiddelde diameter der zenuwvezels in den plexus brachialis 9.8 micra, daarentegen slechts 6.2 micra bij de zeker ten minste zes maal zwaarder Padhagedis (Phrynosoma cornutum), die haren naam daaraan te danken heeft, dat zij veeleer als een pad, dan gelijk de spreekwoordelijk vlugge hagedis, tot welker familie zij toch behoort, zich beweegt. Voor een even groote snelheid als de genoemde Hagedis zou de zenuwvezel van de zooveel zwaardere „Horned Toad" den dubbelen diameter (12.7 micra) moeten hebben. De Amerikaansche landschildpad Chrysemys marginata, hoewel vermoedelijk nauwelijks minder dan een kilogram wegend, dat is stellig wel honderd maal meer dan de genoemde kleine Hagedis, heeft in haren plexus brachialis toch nog slechts zenuwvezels van gemiddeld 12.4 micra diameter [1]). Deze zou 18.7 micra moeten zijn voor gelijke snelheid als die Hagedis.

Ook wijst GÖTHLIN er op, dat garnalen van de geslachten Crangon, Palaemon e.a., die tot de vlugste diersoorten behooren, dikke, van mergscheeden voorziene zenuwvezels bezitten [2]). In den staart van Palaemon hadden L. en M. LAPICQUE ook de grootste snelheid van zenuwen en spieren gevonden van alle Invertebraten, die zij onderzochten. [3])

Naar een mogelijken invloed van de lichaamsgrootte op de voortplantingssnelheid van de zenuwinfluxie werd het eerst gezocht door ALCOCK, aan den nervus ischiadicus van den Kikvorsch en, uitwendig, aan den nervus medianus van den Mensch [4]). Hij vindt bij den Mensch, zoowel als bij den Kikvorsch, dat in alle onderzochte individuen de snelheid (per eenheid van lengte) dezelfde is en dus onafhankelijk van de lichaamsgrootte. Kleine verschillen in de snelheidswaarden, nl. van gemiddeld 67.5 M. per seconde bij twee

[1]) Zie deze zenuwdikten bij H.H. DONALDSON and G. W. HOKE, On the Areas of the Axis Cylinder and Medullary Sheath as seen in Cross Sections of the Spinal Nerves in Vertebrates. Journal of Comparative Neurology and Psychology. Vol. 15, Philadelphia 1905, p. 9—11.

[2]) G. F. GÖTHLIN, Die doppelbrechenden Eigenschaften des Nervengewebes. Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Ny Följd, Bd. 51 (1913), p. 84.

[3]) LOUIS et MARCELLE LAPICQUE, Quelques chronaxies chez les Mollusques et Crustacés marins. Comptes rendus de la Société de Biologie. Année 1910. Vol. 2 (69). Paris 1910, p. 280.

[4]) N. H. ALCOCK, On the Rapidity of the Nervous Impulse in Tall and Short Individuals. Proceed. Roy. Society, Vol. 72 (1903). London 1904, p. 414—418.

mannen van gemiddeld 1887 mM. hoogte en gem. 65.9 M. bij twee mannen van gemiddeld 1721 mM. hoogte, worden verwaarloosd, klaarblijkelijk beschouwd als aan fouten van het experiment te wijten. De gemiddelde lichaamsgewichten dezer mannen kunnen, naar de tabellen van HASSING[1]), gesteld worden op 85 en 67 KG. en daarmede kan een relatie-exponent voor de impulsiesnelheid berekend worden van 0.1007, waaraan evenwel op zichzelf niet veel beteekenis mag worden toegeschreven.

Belangrijker voor de beoordeeling van den invloed der lichaamsgrootte op de voortplantingssnelheid der impulsies in homologe zenuwen zijn de proeven van MÜNNICH[2]). De door hem gevonden snelheid (66 M. in den nervus medianus) van den mensch stemt goed overeen met de gemiddelde snelheid volgens ALCOCK en de latere bepaling van HELMHOLTZ en BAXT (64.56 M., in 1870), hetgeen wel voor de betrouwbaarheid der methode pleit. De meeste beteekenis voor ons onderwerp hebben evenwel de snelheidsbepalingen in den nervus ischiadicus van eenige zoogdieren, nl. drie honden van verschillende grootte of ras, twee katten en een konijn. Terecht legt MÜNNICH nadruk er op, dat de betrouwbaarheid van de uitkomsten zijner dierproeven grooter moet zijn dan van experimenten aan den mensch, waar de zenuw niet kan worden blootgelegd. Bovendien is voor eene beoordeeling van den invloed der dimensie van de zenuw op de voortplantingssnelheid der zenuwinfluxies van belang, dat onder de honden van MÜNNICH een groot en een klein individu onderzocht werd, welker lichaamsgewichten onderling meer dan 6 maal zooveel verschilden als die van de lange en korte mannen van ALCOCK. MÜNNICH vond niet onaanzienlijke afwijkingen tusschen een grooten en een kleinen hond, waarbij het ras geene rol speelde, en een bijzonder belangwekkende afwijking bij een vertegenwoordiger van het zoo merkwaardige Taksenras. Ook de bij de katten gevonden snelheden zijn van groote beteekenis. Hoewel MÜNNICH zelf, zich niet bewust zijnde, dat de gevonden numerieke verschillen iets konden beduiden, het in het midden laat of zij op onderscheiden voortplantingssnelheid berusten of slechts door de onvolkomenheid der methode veroorzaakt werden, is er nu wel niet meer aan te twijfelen, dat zij werkelijke beteekenis hebben. Ja in dit verband komt mij zelfs de veel kleiner, door ALCOCK tusschen groote en kleine mannen

---

[1]) H. VIERORDT, Anatomische, physiologische und physische Daten und Tabellen. 3 Aufl. 1906, p. 589.

[2]) FERDINAND MÜNNICH, Ueber die Leitungsgeschwindigkeit im motorischen Nerven bei Warmblütern. Zeitschrift für Biologie. Bd. 66. München und Berlin 1916, p. 1—22.

gevonden afwijking niet *geheel* verwerpelijk voor, nu daarmede parallel blijkt te gaan die tusschen de honden van veel aanzienlijker gewichtsverschil en deze uitkomsten in overeenstemming zijn met hetgeen omtrent de beteekenis van de dimensies der zenuwen zich aan ons opdrong.

Bij een hond, „brauner Bastard von der Grösse eines Foxterriers” en die aldus wel 7 à 8 K.G. moet gewogen hebben, vindt MÜNNICH eene snelheid van 61 M. per seconde, gelijk aan die bij het konijn, dat slechts ongeveer $^1/_4$ van dat lichaamsgewicht kan bezeten hebben. De snelheid is derhalve bij het Konijn betrekkelijk groot en nu vinden wij bij dit delvend Knaagdier ook dikker zenuwvezels dan bij den Hond. Als gemiddelde diameter in den plexus brachialis vonden DONALDSON en HOKE 13.3 micra bij een konijn en 11.6 micra bij een (vermoedelijk 8 maal zwaarder) herdershond. Een bepaalde verhouding tusschen de snelheid en de doorsnede is daaruit evenwel niet af te leiden, daar hier verschillende zenuwen en verschillende hondenrassen vergeleken worden.

Bij zijne grootste kat vond MÜNNICH eene snelheid van 81 meter per seconde, bij een ander exemplaar, waarvan hij zich genoopt voelt aan te geven, dat het volwassen is en waarbij hij op een korter zenuwstuk experimenteerde, welk exemplaar dus wel kleiner zal geweest zijn, was de snelheid 75 meter. Daar zelfs de grootste kat nauwelijks de helft van het gewicht van een middelmatigen Foxterrier kan bereikt hebben is zeker de snelheid bij de Kat bijzonder groot. Ongetwijfeld staat hiermede in verband de aanzienlijke dikte van de zenuwvezels bij de Kat, gemiddeld in den plexus brachialis 16 micra diameter tegen 11.6 micra bij een 5 maal zwaarderen hond volgens DONALDSON en HOKE.[1]) Overigens onderscheidt zich de Kat ook door bijzonder groote gangliëncellen (een eigenaardigheid van alle Felis-soorten). De spiervezels van de extremiteiten schijnen ook bijzonder dik te zijn. Reeds CAVAZZANI had gevonden, dat de cellen der cervicale en der lumbale ganglia spinalia bijzonder groot zijn en gelijk aan de overeenkomstige cellen van 5 maal zwaarder honden.[2]) Ook LEVI vond de cellen van het vijfde cervicale ganglion spinale bij de Kat veel grooter dan bij een ongeveer even zwaren hond (diameter 81 tegen 65.6 micra). Zij bereikten eerst bij een 7 maal zwaarderen hond (van 23 K.G. gewicht) bijna gelijken diameter (79.7 micra).[3]) Volgens LEVI heeft de kat ook grooter gangliëncellen,

[1]) L. c.

[2]) E. CAVAZZANI, Sur les ganglions spinaux. Archives Italiennes de Biologie. Tome 28. Turin 1897, p. 52. Herdershonden, jachthonden en volwassen kat.

[3]) G. LEVI, I ganglî cerebrospinali Supplemento al Vol. VII dell' Archivio

in de voorste hoornen der intumescentia lumbalis van het ruggemerg, dan de Vos, en van alle door hem onderzochte Zoogdieren, waaronder het Rund, de grootste pyramidencellen in de cerebrale schors.[1]) Uit bijzonder vergelijkbare metingen van HARDESTEY is gebleken, dat de gemiddelde diameter van homologe cellen der intumescentia cervicalis bij de Kat niet veel kleiner diameter bezitten dan bij den 6 maal zwaarderen voshond (53.5 micra tegen 58.7 micra).[2]) De spiervezels in den rectus femoris waren bij de kat dikker dan bij eenig ander Zoogdier, dat LEVI onderzocht, met uitzondering alleen van het Paard; terwijl de gemiddelde diameter bij de Kat 55 micra bedroeg, vond hij hem bij een ongeveer tweemaal zwaarderen hond (van 6.3 K.G. gewicht) slechts 36.2 micra groot.[3])

Duidelijk blijkt aldus, dat de gauwe spieren van den kattepoot door dikke zenuwvezels snelle impulsies ontvangen uit groote gangliëncellen.

Iets dergelijks geldt voor den molpootigen Taks. Nog wat sneller dan in den nervus ischiadicus van een 9 maal zwaarderen slagershond „von der Grösse einer Deutschen Dogge" plantten zich de impulsies voort in die zenuw van een taks (met 88 meter snelheid per seconde, tegen 85 meter bij den slagershond).

Uit de door MÜNNICH aangegeven snelheden van voortplanting der influxie van 61 M. per seconde in den nervus ischiadicus van den bastaardhond van foxterrier-grootte, en 85 M. per seconde bij den slagershond, eveneens van verbasterd ras, die zoo groot was als een Duitsche dog en dus ongeveer 8 maal het gewicht van zijn kleineren soortgenoot moet bezeten hebben, kan men een interindividueelen relatie-exponent voor de snelheid, waarmede de influxies zich in den nervus ischiadicus voortplanten, van 0.1595 berekenen. Deze stemt voldoende overeen met den boven, uit een opgaaf van LAPICQUE voor de doorsnede van den oogbol binnen de soort Canis familiaris afgeleiden exponent 0.1344, en de afwijkingen van de waarde 0.28 zijn zoo groot, om voor beide gevallen het besluit toe te laten, dat hier niet dezelfde betrekking der homoneure soorten, doch de andere, de interindividueele, geldt, welke door een exponent van de halve

---

Italiano di Anatomia e di Embriologia. Firenze 1908, p. 177, en: Studî sulla grandezza delle cellule. I. Ibid. Vol. V. Firenze 1906, p. 332.

[1]) Ibid. (1906), p. 334 en 337. Vergelijk ook: K. BRODMANN, Vergleichende Lokalisationslehre der Grosshirnrinde. Leipzig 1909, p. 81.

[2]) Journal of Comp. Neurology. Philadelphia 1902. Vol. 12, N°. 2. p. 160.

[3]) L.c. (1906), p. 327.

grootte van dien der soorten wordt aangeduid. Daarmede is evenwel niet gezegd, dat de *doorsnede* der zenuwvezel in gelijke verhouding verandert als dat oogvlak, want aangezien van individu tot individu binnen eene soort de zenuwvezellengte verandert zonder verandering van het getal der insnoeringen van RANVIER, waar de weerstand voor de zenuwinfluxie veel grooter moet zijn dan in de internodia, wordt bij het grooter dier de weerstand, omgekeerd evenredig aan de lengte van de zenuwvezel, geringer. Ik stel mij voor, dat aldus de zenuwvezel van individu tot individu binnen eene soort werkelijk niet dikker, alleen langer wordt. Anders is het bij homoneure soorten; daar neemt het getal der internodia en dus ook der insnoeringen evenredig met de lengte van de zenuwvezel toe, waardoor de snelheid der influxie (per eenheid van lengte) niet veranderd wordt; deze is aldus direct van de doorsnede afhankelijk.

Vergelijkt men de voortplanting der influxies in de zenuwvezel met de beweging van de electriciteit in een leiding, in welke de weerstand (de reciproque waarde van het geleidingsvermogen) omgekeerd evenredig is aan de doorsnede en evenredig aan de lengte, dan wordt in de verhoudingen der grootte in het zenuwstelsel veel duidelijk dat anders onbegrijpelijk bleef. De gangliëncel is dan, in zekeren zin, te vergelijken met een electrischen condensator of accumulator, die geladen en ontladen wordt.

In de eerste plaats wordt duidelijk, dat alleen bij vergelijking van homoneure soorten de regelmatige hoeveelheidsbetrekkingen van het neuron en zijn deelen tot het lichaamsgewicht gevonden worden. Voor den relatie-exponent voor het volume der grootste gangliëncellen uit de voorste hoorns der intumescentia cervicalis vindt men tusschen het Paard en de Muis, naar de gegevens van HARDESTY, de waarde 0.2387, daarentegen 0.3931 tusschen de Kat en de Muis; tusschen het Paard en de Kat is de exponent slechts 0.0851. Een Kat, die het gewicht van het Paard bezat, zou 2.763 maal volumineuzer gangliëncel voor de motorische zenuwvezel der klauwspieren hebben dan de cel behoorend bij de langste motorische zenuwvezel van het Paard. HARDESTY (p. 166) wijst erop, dat een Amerikaansche Vleermuis (Atalapha cinerea Pal.), die belangrijk kleiner is dan de Huismuis, aanmerkelijk grooter cellichaam in de voorste hoorns der intumescentia cervicalis bezit dan deze laatste, hetgeen hij in verband brengt met de innervatie van de vleugels. Met deze groote functioneele beteekenis der voorste ledematen als vleugels bij de Vleermuizen brengt ook OBERSTEINER het feit in verband, dat terwijl bij de meeste Zoogdieren de cellen der intumescentia lumbalis merkbaar grooter zijn dan die in de intumescentia cervicalis,

het bij de Vleermuizen juist omgekeerd is. [1]) Uit de veel onder opgaven van KAISER kan men afleiden, dat de relatie-exponent voor het volume der grootste gangliëncellen van het halsmerg van de grooter Vleermuis Plecotus auritus in vergelijking met den Mol slechts 0.1568 is. [2]) Die Vleermuis heeft dus veel grooter gangliencel dan de Mol, betrokken op gelijk lichaamsgewicht. OBERSTEINER wijst aan, dat de Mensch en de Orangoetang opvallend kleine cellen in hun cervicaal merg hebben [3]).

Inderdaad zijn ook, volgens HARDESTY's metingen, homologe cellen van de cervicale intumescentie bij den Mensch iets kleiner dan bij den voshond, dien hij vier maal [4]) en niet veel grooter dan bij de Kat, die hij meer dan twintig maal in lichaamsgewicht overtreft. Zoowel bij Macacus, Cynocephalus, Ateles als bij den Mensch zijn ook de zenuwvezels van den plexus brachialis in vergelijking met die van andere Zoogdieren, de lichaamsgrootte in aanmerking genomen, dun.

Blijkbaar is hier de geringe vlugheid der spieren, maar betrekkelijke fijnheid der spiervezels voor de hand en de vingers, als vereischte harer fijn geregelde samenwerking, met die geringe dikte der zenuwvezels en het betrekkelijk klein volume der gangliëncellen, waarmede zij verbonden zijn, in betrekking te brengen.

Van groote beteekenis kunnen de afmetingen der perifere „geleiders" en der met deze verbonden „accumulatoren" worden voor de hersenhoeveelheid. Waar zij spieren moeten voorzien, die zoowel sterk als vlug zijn, worden de zenuwvezels ook bijzonder dik, de cellichamen groot en aldus de neuronen volumineus, waaraan ook voluminenze hersenneuronen moeten beantwoorden. Van de raadsels van den meer dan de Menschapen hersenrijken Olifant, aan welken men daarom bijzondere „geistige Höhe" meende te moeten toeschrijven, van de door hun hersenhoeveelheid even hoog boven de Anthropoieden staande Ateles en Cebus, van de Waterzoogdieren, onder welke de Mysticeten relatief meer hersenen bezitten dan de Honden — zoodat men zelfs over de bijzondere „intelligentie" der Walvisschen zich in beschouwingen is gaan verdiepen —, de

[1]) H. OBERSTEINER, Bemerkungen zur Bedeutung der wechselnden Grösse von Nervenzellen. (Del Volume Jubilare in onore L. BIANCHI. Catania 1913), p. 4.

[2]) O. KAISER, Die Funktionen der Ganglienzellen des Halsmarkes. Haag 1891, p. 63.

[3]) L. c. p. 4. Voor den Gorilla, welks ruggemerg W. WALDEYER onderzocht (Das Gorilla-Rückenmark. Abhandlungen der Kön. Preus Akademie der Wissenschaften Berlin. Jahr 1888. Physikalisch-mathematische Classe. Abt. III, S. 1—147) kan wel hetzelfde worden aangenomen. Vergel. HARDESTY, l.c., p. 168.

[4]) Reeds CAVAZZANI (l. c., p. 52 en 53) had gevonden, dat de spinale gangliëncellen bij den Mensch kleiner zijn dan bij herdershonden en jachthonden, kleiner zelfs dan bij de Kat.

Denticeten, evenals de Robben, daarin bijna met de Anthropoieden op een lijn te stellen [1]), van de betrekkelijk hoog gecephaliseerde Krokodillen en van de Visschen, die door hun hersenhoeveelheid voor de Reptielen in het algemeen niet onderdoen, van al deze raadsels ligt de oplossing nu voor de hand [2]). De tromp van den Olifant, die de hoofdrol speelt in het leven van het dier, is niet alleen sterk en vlug, maar ook van zeer volumineuze spieren voorzien. Die van den Aziatischen Olifant meet 2 M., bij een lichaamslengte van $3^1/_2$ M. Den langen staart der genoemde Amerikaansche Apen bewegen gauwe, sterke spieren, welke aan die dieren nog meer diensten bewijzen dan die hunner handen en voeten. Maar ook hun armen en beenen zijn met betrekking tot den romp zeer lang, vooral bij Ateles, die daaraan zijn bijnaam Spinaap te danken heeft, en daardoor spierrijk. De Walvisschen hebben een buitengewoon vlug en sterk bewegingsapparaat in hun lang lichaam voor den staart, die bewonderenswaard, als een scheepsschroef, de ontzaglijke massa met groote snelheid voortbeweegt en behendig richt. Bij de Robben stuwen de een soort staart vormende vinvoeten (Phoca) het lichaam, door vrij ingewikkelde doch vlugge bewegingen, voort of wel (Otaria) zeer

---

[1]) Met onvolwassen dieren rekenend hebben sommige onderzoekers wel al te hooge cephalisatie aangenomen. Zoo is de Zeehond met $12^1/_2$ KG. lichaamsgewicht niet volwassen (LOUIS LAPIQUE, Sur le poids encéphalique des Mammifères amphibies. Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. 1912, N°. 1, p. 2). Een volwassen vrouwelijke, reeds vele jaren geleden onderzocht door E. H. WEBER (Ueber den Bau des Seehunds, Phoca vitulina. Verhandlungen der Kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Math. Phys. Classe. Jahrgang 1850, p. 108), die in gevangenschap nog eenigszins vermagerd was, woog 43.11 K.G. Het dier bezat 266,5 gram hersenen, waaruit een cephalisatie-coëfficiënt $k = 0.6766$ te berekenen is. Van een in den Amsterdamschen dierentuin sedert 1902 geleefd hebbend, toen reeds behoorlijk volwassen vrouwelijke Otaria californiana was bij haar dood, in Nov. 1913, het lichaamsgewicht 74 K.G., het hersengewicht 374.5 gram, waaruit $k = 0.7025$ te berekenen is. Ook van dit dier was het lichaamsgewicht gedurende het gezonde leven wel iets hooger. De berekende cephalisatie-coëfficienten zijn aldus voor beide Robben stellig wat boven normaal.

Wat de Walvisschen betreft, zij verwezen naar het in Band 12, p. 503, van de vierde uitgaaf van BREHM's Tierleben (1915) genoemde gewicht van een 22.5 M. lange Balaenoptera sulfurea (naar mij ontoegankelijke bepalingen van LUCAS) van 63 Am. tonnen, d. i. 64000 K.G. De versch uitgenomen hersenen van een 18.8 M. (= 60 Noorw. voet) lange Balaenoptera musculus wogen, volgens G. A. GULDBERG (Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1885. Christiania 1886, p. 128) 6700 gram. Gelijkvormigheid aannemend met de andere Balaenoptera-soort vindt men voor deze een lichaamsgewicht van 37385 K.G. en daarmede een cephalisatie-coëfficient 0.3841.

[2]) De beteekenis van den invloed van het gehoor en andere zintuigen op de hersenhoeveelheid dezer Gewervelde dieren is evenwel ook niet gering.

groote vinhanden bewijzen zoodanige diensten aan het dier, terwijl dan de ook hier naar achteren gerichte voeten meer als een door krachtige spieren bediend stuur fungeeren. Bij de Visschen is het weder de staart, die de stuwkracht aan de spieren van het achterlijf ontleent. De Krokodillen hebben een krachtigen roeistaart. Bij al deze Gewervelde waterdieren moeten de locomotorische spieren niet alleen vlug, maar wegens de groote dichtheid van het medium, waarin de beweging plaats heeft, ook bijzonder massief zijn; dus uit dikke, maar ook talrijke spiervezels bestaan. Vandaar zeer volumineuze en tevens zeer talrijke neuronen. Inderdaad toonde LEGENDRE aan, dat de zenuwvezels van het ruggemerg en de wortels van den Dolphijn (Delphinus delphis L.) onder andere veel dikker zijn dan bij den Mensch, het Hert, den Hond, het Konijn en de Muis. Hij verklaart de hooge cephalisatie van dat Waterzoogdier ten deele door de dikte zijner zenuwvezels [1]).

De onderlinge betrekking der dimensies van spier- en zenuwvezels thans niet verder behandelend, wil ik er evenwel op wijzen, dat tusschen homoneure soorten, de veranderingen der dimensies van het neuron en zijn deelen, in functie van het lichaamsgewicht, *geheel* verklaren de veranderingen van het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht; dat derhalve het *getal* der neuronen (anders dan ik aanvankelijk mogelijk achtte) gelijk blijft. Dit moet dan ook gelden voor de sarconeuronen, derhalve voor de spiervezels.

Dat nu bij homoneure soorten het „cellichaam" van het neuron volumineuzer moet worden, naar evenredigheid van de arithmetische lengteafmeting van het lichaam, is een gevolg van de lang bekende dynamische verhouding, dat het gewicht (de massa) van het dier volgens de derde macht van de homologe lengteafmetingen toeneemt, de spierkracht daarentegen evenredig aan de doorsnede van homologe spieren. Reeds 90 jaar geleden is door STRAUS D'URKHEIM [2]) helder in het licht gesteld, dat aldus dieren van verschillende grootte als geheel zich even snel bewegen moeten. Daarvoor is ook toeneming van de „geaccumuleerde" influxie in het cellichaam van het neuron noodig, en aldus van diens volume, evenredig aan ongeveer $\sqrt[3]{P}$ of $P^{0.33}$... Maar ook de snelheid van voortplanting der influxie in de zenuwvezel en de tijd van voortplanting bij iedere beweging moet bij die homoneure diersoorten daaraan beantwoorden. Daarom is de snelheid iets grooter dan bij gelijkvormigheid van de cel en zoowel de door-

[1]) R. LEGENDRE, Notes sur le système nerveux central d'un Dauphin (Delphinus delphis). Bulletin du Muséum d'histoire naturelle, 1912, N⁰. 1, p. 6—7. Pl. I.

[2]) Sur l'Anatomie comparée des animaux articulés. Paris 1828, p. 188 seq.

snede van de vezel grooter, als hare lengte iets geringer geworden, beide evenredig aan $P^{0.055}$... Vandaar de verhouding $P^{0.277}$...: 1, zooals in den aanhef besproken werd. $P^{0.333}$. : $P^{0.055}$. $= P^{0.222}$. $\times$ $P^{0.055}$..

Door deze wijze van zien, die steunt op de in het zenuwstelsel bestaande hoeveelheidsbetrekkingen, kunnen de imponderabilia der „geistigen Höhe", der „Intelligenz" en niet zelden ook der „Entwicklungsstufe" uit den voorgrond onzer beschouwingen van het verband tusschen structuur en verrichtingen van het zenuwstelsel verdwijnen, hetgeen aan de vruchtbaarheid van onderzoekingen op dit gebied, onder andere en vooral wat betreft de hersenschors, slechts kan ten goede komen.

Een treffend bewijs hiervoor leveren de onderzoekingen van Otto Mayer over de dichtheid, in welke in de hersenschors van Apen de cellen voorkomen [1]). Hij bepaalde namelijk bij zeven genera, in 10 schorsvelden (volgens Brodmann), door de geheele dikte der schors, het gemiddeld getal cellen per 0.01 m.M³. Zijn resultaten noopten hem met nadruk erop te wijzen, dat de dichtheden volstrekt niet parallel gaan met de volgorde der onderzochte dieren in het zoölogisch systeem. Een uitkomst die sterk doet denken aan het ontbreken van systematische volgorde in de „relatieve hersengewichten".

Ik heb daarom de dichtheden behandeld op dergelijke wijze als de hersengewichten, door n.l. ze in verband te beschouwen met de lichaamsgewichten. Te dien einde heb ik naar de opgaven van Mayer de gemiddelde dichtheden der geheele schors (over die tien belangrijke velden) berekend en vind dan voor den Chimpanse (Anthropopithecus troglodytes) een gemiddelde celdichtheid 1765.4, voor den Gibbon (Hylobates syndactylus) 3160, voor den Kapucijneraap (Cebus capucinus) 3580.9, voor den Saimiri (Chrysothrix sciurea) 3603.4 en voor het Marmoset-aapje (Hapale jacchus) 3448.1, welke gemiddelden evenmin systematische volgorde vertoonen als de dichtheden in de afzonderlijke velden.

Deze bonte wanorde nu maakt plaats voor regelmaat, zoodra de grootte der dieren in rekening wordt gebracht.

De celdichtheid bij den Chimpanse verhoudt zich tot die van den Siamang als 1 : 1.79. De Chimpanse is 8 maal zwaarder dan deze Gibbon-soort en merkwaardigerwijs nu moeten, bij homoneuren toestand, de cellen evenredig aan $8^{0.28} = 1.79$ volumineuzer zijn bij den Chimpanse dan bij dien Gibbon. Tusschen deze homoneure soorten verandert dus de celdichtheid nauwkeurig omgekeerd evenredig met

[1]) Otto Mayer, Mikrometrische Untersuchungen über die Zelldichtigkeit der Grosshirnrinde bei den Affen. Journal für Psychologie und Neurologie. Band 19. Leipzig 1912, p. 233—251. 2 Tafeln.

het volume van iedere cel. Met andere woorden: bij een Gibbon, die de grootte bezat van den Chimpanse, zou de celdichtheid in de schors der groote hersenen gelijk zijn aan die van den Chimpanse. Men kan dus aannemen, dat deze Anthropoieden van gelijke cephalisatie (gelijke hersenhoeveelheid, in functie van het lichaamsgewicht) ook in de organisatie hunner hersenschors gelijk staan. De cellen moeten gelijkvormig zijn tusschen beide, zoowel wat de dendriten en het overige interstitium als het cellichaam betreft.

Vergelijkt men Cebus met Hapale, dien hij 6 maal in lichaamsgewicht overtreft (de gewichten zijn gemiddeld 1300 en 215 gram; het hersengewicht van Cebus is 125, dat van Hapale ongeveer 8 gram), dan vindt men de corticale celdichtheid bij Cebus 1.7 maal grooter dan bij een Hapale van gelijk gewicht. In ongeveer dezelfde verhouding, namelijk 1.8 : 1, is evenwel ook bij Cebus de cephalisatie grooter dan bij Hapale, een goede overeenstemming, als men bedenkt, dat verschillende individuen vergeleken werden. Met Chrysothrix (Saimiri) vergeleken (wiens lichaamsgewicht ongeveer 400 gram bedraagt en die 24 gram hersenen bezit) heeft Cebus 1.5 maal hooger cephalisatie en een Saimiri van gelijk lichaamsgewicht als Cebus zou bijna 1.4 maal grooter celdichtheid hebben. Bij deze verwante Amerikaansche Apen is dus, in functie van het lichaamsgewicht, de celdichtheid evenredig aan de cephalisatie: hoe grooter de hersenhoeveelheid, in functie van het lichaamsgewicht, hoe grooter de celdichtheid.

Een Cebus evenwel van het lichaamsgewicht van Hylobates syndactylus zou slechts $^2/_3$ van de celdichtheid van dien langarmigen aap hebben, niettegenstaande deze laatste $^3/_5$ van het hersengewicht van de gedachte groote Cebus-soort heeft. Hier is de celdichtheid ongeveer omgekeerd evenredig met de cephalisatie.

Bijzonder merkwaardig is nu de vergelijking der celdichtheid van den Chimpanse met die van den Mensch, waarmede hij in lichaamsgewicht ongeveer overeenkomt. HAMMARBERG[1]) bepaalde bij normale menschelijke hersenen de celdichtheid per 0.001 $mM^3$, d.i. $^1/_{10}$ der inhoudseenheid van MAYER, in verschillende schorsgebieden, waarvan eenige met de velden volgens BRODMANN te vergelijken zijn. Aldus in den lobus occipitalis de area striata of veld 17 van BRODMANN. Op gelijke inhoudseenheid als bij MAYER berekend vindt men hier 386 cellen, terwijl MAYER's chimpanse er 2888 heeft of 7.5 maal meer. Aldus in de area gigantopyramidalis of veld 4 van BRODMANN 152, tegen eene dichtheid bij dien chimpanse van 1172 of 7.7 maal

[1]) C. HAMMARBERG, Studien über Klinik und Pathologie der Idiotie, nebst Untersuchungen über die normale Anatomie der Hirnrinde. Upsala 1895.

meer. In de area frontalis agranularis of veld 6 is de dichtheid bij den Mensch slechts 111, tegen 1136 of 10.2 maal meer bij den door MAYER onderzochten chimpanse [1]).

Daar nu het geheele schorsoppervlak bij den Chimpanse, volgens de metingen van BRODMANN [2]) ongeveer een derde van dat bij den Mensch is, de regio praecentralis (het vierde en het zesde veld) van den Chimpanse ongeveer twee derde van, de area striata ongeveer gelijk is aan die bij den Mensch, moet, volgens deze bepalingen, worden aangenomen, dat het absoluut getal der zenuwcellen in de cerebrale schors van den Mensch veel geringer is dan bij den Chimpanse; het grootst is het verhoudingsgetal in de area striata (7, tegen 6 in de regio praecentralis). Aangezien evenwel de menschelijke hersenen functioneel zeker meer gecompliceerd (wat men gewoonlijk noemt hooger ontwikkeld) zijn, zou aldus blijken, dat niet het getal der neuronen, doch de menigvuldigheid hunner onderlinge verbindingen, welke vooral het interstitium vormen, aan die meer gecompliceerde (hooger) verrichtingen beantwoordt.

---

[1]) In het gedeelte van den gyrus frontalis superior, dat behoort tot de area frontalis agranularis of het zesde veld van BRODMANN, heb ik de celdichtheid in de diepste helft der derde laag en evenzoo in de diepste helft der vierde laag van het gedeelte van den lobus occipitalis, dat beantwoordt aan de area striata of BRODMANN's zeventiende veld, *geschat* naar de teekeningen (Tafel I, Fig 2 en Tafel II, Fig. 4), namelijk naar de verhouding tusschen de overige, door HAMMARBERG geteekende en tevens berekende dichtheden. Aldus werd ook de celdichtheid der onbeduidende eerste laag in het gedeelte van den gyrus centralis anterior, dat behoort tot de area gigantopyramidalis of het vierde veld van BRODMANN, geschat.

HAMMARBERG berekende het getal der cellen per inhoudseenheid uit 10 op elkander volgende doorsneden, ieder van 0,01 m.M. dikte of 5 doorsneden van 0,02 m.M. dikte, MAYER daarentegen uit slechts een enkele doorsnede van 0,01 m.M. dikte. Daar ook stukken van cellen worden medegeteld moet naar de laatste methode het getal iets grooter uitvallen. Te oordeelen naar HAMMARBERG's teekeningen kan het verschil evenwel niet aanzienlijk zijn.

[2]) K. BRODMANN, Neue Forschungsergebnisse der Grosshirnrindenanatomie, mit besonderer Berücksichtigung anthropologischer Fragen. Gesellsch. Deutscher Naturforscher und Aerzte. Verhandlungen 1913. Leipzig 1913, p. 9, 22 en 25.

Het hersengewicht van den onderzochten chimpanse bedroeg slechts 295 gram; het gemiddelde in den volwassen staat kan men op circa 400 gram stellen. De verhouding der schorsvlakken tot die bij den Mensch kan dus wel iets gunstiger worden. Met hooger hersengewicht zou de celdichtheid van den chimpanse ook evenredig minder geworden, het getal der cellen dus gelijk gebleven zijn. Wel is de schors bij den Mensch zeker iets dikker, waardoor de werkelijke verhoudingsgetallen kleiner moeten zijn dan de berekende.

**Natuurkunde**. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren G. HOLST en E. OOSTERHUIS: *„Enkele opmerkingen over het audion als versterker"*.

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

1. In een onlangs verschenen artikel heeft G. VALLAURI [1]) eenige rekeningen medegedeeld over het audion als versterker. Hij wijst er op dat men in het gebied, waar het audion gebruikt wordt, met eenige benadering de anodestroom $I$ als een lineaire functie van de traliespanning $v$ en de anodespanning $V$ mag voorstellen:

$$I = av + bV + c.$$

Is in de anodeketen een weerstand $R$ geplaatst, dan laat zich eenvoudig berekenen, dat de stroomvariaties $I_\smile$ in de anodeketen op de volgende wijze samenhangen met de variaties $v_\smile$ van de traliespanning.

$$I_\smile = \frac{a}{1+bR} v_\smile.$$

VALLAURI neemt nu als maat voor de versterking de verhouding $\frac{I_\smile}{v_\smile}$. Het wil ons voorkomen, dat men bevredigender resultaten verkrijgt, wanneer men niet $\frac{I_\smile}{v_\smile}$, doch de dimensielooze verhouding van de spanningsvariaties aan den weerstand $R$ tot de variaties der traliespanning als versterkingsgetal aanneemt. De versterking wordt dan $G = \frac{aR}{1+bR}$ en voor groote waarde van $R$: $G_{max} = \frac{a}{b}$.

Zet men in plaats van den weerstand een zelfinductie $L$ in den anodeketen, dan wordt bij een frequentie $n$ der traliespanning:

$$G = \frac{\text{spanningsvariatie aan zelfinductie}}{\text{variatie der traliespanning}} = \frac{2\pi nLa}{\sqrt{1+4\pi^2n^2b^2L^2}}.$$

en voor groote waarde van $L$: $G_{max} = \frac{a}{b}$.

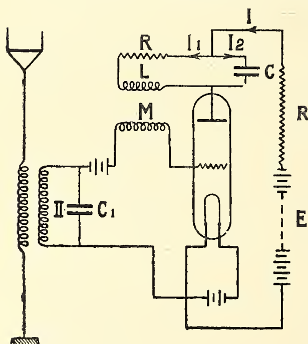
Schakelt men een capaciteit $C$ evenwijdig aan de zelfinductie $L$ dan wordt:

$$G = \frac{2\pi nLa}{\sqrt{(1-4\pi^2n^2LC)^2 + 4\pi^2n^2b^2L^2}}.$$

[1]) Nuovo Cimento (13) 169, 1917.

$G$ wordt nu een maximum voor $4\pi^2 n^2 LC = 1$ d. w. z. wanneer de keten $(LC)$ op resonantie met de traliespanning is ingesteld[1]). Wij vinden wederom $G_{max} = \frac{a}{b}$. De op bovengenoemde wijze gedefinieerde versterking heeft dus in allerlei schakelingen dezelfde maximale waarde $\frac{a}{b}$, zoodat er inderdaad een eigenschap van het audion door wordt aangegeven. Dat het een voor de hand liggende definitie is komt vooral ook uit in het geval, dat men met meerdere in serie geschakelde audions te doen heeft. De spanning aan den weerstand of zelfinductie in de anode keten van het eerste audion wordt daarbij aan de tralie van het volgende gelegd. De verhouding van de variaties in de traliespanningen der beide audions is dan gelijk $G$. Ook de variaties in de anode stroomen zullen dus in die verhouding staan en deze laatste kan men nu gemakkelijk meten. Inderdaad vonden wij voor de maximale verhouding der anode stroomvariaties een waarde, die vrijwel gelijk $\frac{a}{b}$ is.

2. Om de versterkende werking van een audion te vergrooten gebruikt men algemeen schakelingen waarbij men, naar het voorbeeld van FRANKLIN, de anode keten bijv. inductief terugkoppelt aan de tralie keten.




Wij hebben voor nevenstaande schakeling[2]) berekend welke der characteristieke grootheden van het audion voor het terugkoppelen van belang is.

Wij hebben aangenomen dat in de secundaire keten II een gedempte trilling optreedt en de spanning aan den condensator $C_1$ van de gedaante is

$$v = f(t) = w \sin 2\pi nt \left(1 - e^{-\rho t}\right) e^{-\sigma t}$$

Men kan dan voor het systeem het volgende stel vergelijkingen opschrijven

[1]) Terwijl men in de beide vooraf besproken gevallen, om de maximale versterking te verkrijgen, een grooten weerstand resp. zelfinductie moet nemen, komt men in dit geval met normale waarden van $C$ en $L$ uit.

[2]) Verg. VALLAURI loc. cit. fig. 7.

$$I = av + bV + c \qquad I = I_1 + I_2$$

$$W - RI_1 - L\frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad v = f(t) - M\frac{dI_1}{dt}$$

$$W - \frac{1}{C}\int I_2\, dt = 0 \qquad V = E - R' I - W.$$

Hierin is $W$ de spanning aan den condensator $C$ en $M$ de wederzijdsche inductie van de terugkoppelspoel.

Uit deze vergelijkingen kan men een differentiaalvergelijking voor $W$ afleiden

$$\alpha\frac{d^2 W}{dt^2} - \beta\frac{dW}{dt} + \gamma W = \delta + Raf(t) + Laf'(t).$$

waarin

$$\alpha = CL(1 + bR')$$
$$\beta = CR(1 + bR') + bL + aM.$$
$$\gamma = 1 + b(R + R')$$
$$\delta = R(c + bE).$$

De oplossing van deze vergelijking wordt van de gedaante:

$$W = \frac{\delta}{\gamma} + e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t}\; P \sin\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}t + \varphi\right)$$
$$+ e^{-\sigma t} aw\, A \sin(2\pi\, nt + \chi)$$
$$- e^{-(\rho+\sigma)t} aw\, B \sin(2\pi\, nt + \psi).$$

Is de keten $(LRC)$ op resonantie ingesteld met de aankomende trilling, dan moet $\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} = 4\pi\, n\alpha$ zijn. Noemen wij verder den dempingsfactor $\frac{\beta}{2\alpha} = D$ dan vinden wij voor het variabele gedeelte van $W$ een uitdrukking van den volgenden vorm:

$$W_v = aw\frac{4\pi^2 n^2 + D^2}{1 + b(R + R')}\left\{\begin{array}{ll} e^{-Dt} & F \sin(2\pi\, nt + \xi) \\ + e^{-\sigma t} & G \sin(2\pi\, nt + \eta) \\ - e^{-(\rho+\sigma)t} & H \sin(2\pi\, nt + \zeta) \end{array}\right\}$$

waarin $F$, $G$ en $H$ uitsluitend functies zijn van $\sigma$, $\rho$, $L$, $R$ en $D$. De eerste vier grootheden zijn onafhankelijk van het audion, de laatste $D$ bevat wel is waar $a$ en $b$, doch daar men $M$ elke waarde kan geven, die men wil, kan men steeds op een bepaalde gunstigste demping instellen, onafhankelijk van het gebruikte audion.

Wij komen dus tot het resultaat, dat bij deze schakeling, wanneer $R$ en $R'$ niet buitensporig groot zijn, $W_v$ evenredig wordt met $a$ en niet met $\frac{a}{b}$, zooals wij bij de schakelingen van § (1) vonden.

*Eindhoven.* *Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' gloeilampen fabrieken.*

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over de dissociatiewarmte van twee-atomige gassen in verband met de verhoogde valentie-aantrekkingen* $\sqrt{A}$ *der vrije atomen.*"

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS)

## *Inleiding.*

1. In een reeks Verhandelingen in deze Verslagen[1]) over de additiviteit der waarden van $b$ en $\sqrt{a}$ der toestandsvergelijking, en over de grondwaarden dezer grootheden bij verschillende elementen in verband met het periodiek systeem, bepaalde ik de volgende waarden van $b \cdot 10^5$ en $\sqrt{a} \cdot 10^2$, uitgedrukt in z.g. „normale" eenheden.

De waarden van $b_k \cdot 10^5$ (per Gr. atoom), tot dusver gevonden, vindt men in Tabel I vereenigd.

TABEL I. (Waarden van $b_k \cdot 10^5$).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| H = 59 (34 ; 14) | | | | | | He = 105 |
| Li = 145 | | C = 100 (75) | N = 85 (60) | O = 70 (50) | F = 55 | Ne = 76 |
| Na = 270 | | Si = 155 | P = 144 | S = 125 | Cl = 110 à 115 | Ar = 144 |
| K = 480 | | Ti = 180 | | | | |
| Cu = 110 | | Ge = 210 | As = 195 | Se = 180 | Br = 165 | Kr = 177 |
| Rb = 580 | | Zr = 235 | | | | |
| Ag = 150 | | Sn = 265 | Sb = 250 | Te = 235 | I = 220 | X = 228 |
| Cs = 710 | | Ce = 290 | | | | |
| Au = 150 | Hg = 150 | Pb = 320 à 375 | Bi = 305 | | | Nt = 277 |
| | | Th = 400 | | | | |

Men herinnert zich dat deze grondwaarden een groote regelmatigheid vertoonen. Van de koolstofgroep af is in iedere horizontale rij

1) Deze Verslagen **24**, 1284, 1300 en 1635; **25**, 142, 434 (1916); **25**, 1498; **26**, 45 en 305 (1917). Zie ook Journ. de Chim. Phys. **14**, 3 (1916), en Zeitschr. f. anorg. u. allg. Chem. 104, 56—156 (1918).

van het periodiek systeem de daling naar rechts 15 *eenheden*, in iedere verticale rij de stijging naar beneden 55 *eenheden*. De elementen der valentielooze Heliumgroep sluiten hierbij blijkbaar op natuurlijke wijze aan de elementen der voorafgaande Halogeengroep aan.

In deze Heliumgroep werden de waarden van $b_k$ direct uit die van $T_k$ en $p_k$ berekend; zoo ook de waarde 59 voor H uit die van $H_2$ [1]. De andere waarden zijn uit de *verbindingen* der verschillende elementen berekend. (voor Cl schijnt de waarde 115 beter te voldoen dan 110). Uit $T_k$ en $p_k$ kan men voor N, P, O, Cl uit $N_2$, $P_4$, $O_2$ en $Cl_2$ *direct* berekenen $b = 86$, 135, 71 en 113 à 125 (naarmate bij $Cl_2$ de gegevens van Dewar dan wel de nieuwere van Pellaton worden gebruikt).

Met deze grondwaarden nu kunnen *alle* waarden van $b$ bij de meest verschillende verbindingen *additief* worden opgebouwd. Voor H gelden hierbij ook de „gecondenseerde" waarden 34 en 14; voor C, N en O de gecondenseerde waarden 75, resp. 60 en 50. De hiervoor geldende regels vindt men in de beide geciteerde grondverhandelingen van 1916 in Deze Verslagen en in het Journ. de Ch. Ph.

Op deze additieve wet zijn geen uitzonderingen gevonden; die welke bij een paar organische stoffen (b.v. de *aminen*) nog aanwezig waren, zijn thans alle verdwenen, dank zij de nieuwere, opzettelijk naar aanleiding dezer afwijkingen ingestelde bepalingen van $T_k$ en $p_k$ door Berthoud [2]) te Neuchâtel. De door Vincent en Chappuis vroeger bepaalde kritische drukken bleken alle in hooge mate foutief te zijn [3]). Het is te voorzien dat dit ook wel het geval zal zijn met andere oudere bepalingen.

Wij merken nog op dat de waarden van $b$ voor H, Li, Na, K, Rb en Cs zich verhouden als $^1/_2 : 1^1/_4 : 2^1/_8 : 4 : 5 : 6$.

De gevonden waarden van $b$ zijn *geheel onafhankelijk* van den *toestand*, waarin zich het atoom bevindt: hetzij als *vrij* atoom, b.v. in het metallische tin, dan wel als *deel* van een molecuul als in $SnCl_4$. Het zal dadelijk blijken dat dit *niet* met de grondwaarden van $\sqrt{a}$ het geval is.

**2.** Voor de waarden van $10^2 \sqrt{a_k}$ per Gr. atoom, wederom in „normale" eenheden uitgedrukt, werden tot nog toe de in tabel II

---

[1]) Het spreekt vanzelf dat hiervoor de nieuwste gegevens werden gebruikt; voor $H_2$ en Ne de zeer onlangs door K. Onnes, Crommelin en Cath gevonden waarden.

[2]) Journ. de Chim. Phys. **15**, 3 (1917).

[3]) Zoo bleek bij $NH_2.C_2H_5$ $pk = 55{,}5$ te zijn, terwijl V. en Ch. 66 vonden; bij $NH(C_2H_5)_2$ werd 36,6 gevonden tegen 40 door V. en Ch.; etc. Ook bij $C_3H_7Cl$ vond Berthoud 45,2 tegen 49 door V. en Ch. Fouten dus van 10 à 20 %!

vereenigde waarden gevonden; de vet gedrukte getallen hebben betrekking op de *verhoogde* waarden der *vrije atomen*, de andere op die welke in *verbindingen* worden gevonden: de *restwaarden* derhalve.

TABEL II. (Waarden van $\sqrt{a_k}\,.\,10^2$).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| H = 1,1<br>(3,2 ; 1,6) | | | | | | He = 0,8 |
| Li = ?<br>**23** | | C = 3,1<br>32 | N = 2,9 | O = 2,7 | F = 2,9 | Ne = 2,1 |
| Na = ?<br>**27** | | Si = ?<br>**34** | P = 6,4 | S = 6,3 | Cl = 5,4 | Ar = 5,2 |
| K = ?<br>**33** | | Ti = ?<br>**35** | | | | |
| | | Ge = ?<br>36 | As = 7 | Se = 7 | Br = 6,9 | Kr = 6,9 |
| Rb = ?<br>**35** | | Zr = ?<br>**37** | | | | |
| | | Sn = ?<br>**38** | Sb = 8,9<br>33 | Te = 9 | I = 8,8 | X = 9,1 |
| Cs = ?<br>**38** | | Ce = ?<br>**39** | | | | |
| | Hg = 10,7 | Pb = ?<br>**40** | Bi = 11<br>36 | | | Nt = 11,5 |
| | | Th = ?<br>**41** | | | | |

Niet uit de grondwaarden van $a$ kunnen de waarden van $a$ van alle mogelijke verbindingen *additief* worden opgebouwd — maar die van $\sqrt{a}$ uit de in bovenstaande tabel aangegeven grondwaarden van $\sqrt{a}$. Ook hier zijn geen belangrijke afwijkingen gevonden; die bij de aminen zijn wederom grootendeels door de nieuwere bepalingen van Berthoud (l.c.) verdwenen.

De waarden van $\sqrt{a_k}$ bij de edelgassen (direct uit die van $T_k$ en $p_k$ berekend) passen wederom uitstekend in de voor iedere horizontale rij geldende waarden. Van deze kan men zeggen, dat (van af de koolstofgroep) de waarden van $\sqrt{a_k}$ in *verbindingen* voor iedere horizontale rij van het periodiek systeem *ongeveer gelijk* zijn, en van de 0ᵉ tot en met de 5ᵉ rij bij benadering door de geheele getallen 1, 3, 5, 7, 9, 11 kunnen worden voorgesteld.

De voor N, P, O en Cl direct uit $N_2$, $P_4$, $O_2$ en $Cl_2$ berekende waarden van $\sqrt{ak}$ zijn resp. 2,6, 6,4, 2,6 en 5,4 à 5,8 (Dewar of Pellaton).

Voor H gelden in verbindingen slechts de waarden 3,2 en voornamelijk 1,6. De waarde 1,1 uit $T_k$ en $p_k$ van $H_2$ direct berekend, wordt alleen bij $H_2$ zelf gevonden.

**3.** Evenwel — wat bij $b$ uit den aard der zaak *niet* werd gevonden — bij de grondwaarden van $\sqrt{a}$ moet er op worden gelet, dat de aangegeven aantrekkingen door *schaduwwerking* geheel of gedeeltelijk kunnen worden *vernietigd*. Zoo wordt de waarde van $\sqrt{a}$ van een naar alle zijden door atomen of atoomgroepen omringd centraalatoom — als bv. C in $CH_4$, $C_2H_6$, etc., Si in $SiCl_4$, Sn en Ge in $SnCl_4$ en $GeCl_4$, N en P in $NH_3$ en $PH_3$ — overal $= 0$ gevonden, zoodat deze ingesloten atomen *geenerlei aantrekkende werking naar buiten* uitoefenen [1]).

Maar zoodra het C-atoom weer *gedeeltelijk vrij komt*, bij *dubbelbindingen* bv. als in $C_2H_4$ (men stelle zich de positie van het C-atoom slechts stereochemisch voor) — dan verheft zich de waarde van $\sqrt{a_k}$ onmiddellijk van 0 tot 1,55, de halve grondwaarde 3,1 derhalve. En wanneer het C-atoom *geheel vrij* komt, bij *driedubbele bindingen* bv. als in $C_2H_2$, dan vindt men ook terstond de volle waarde 3,1.

Deze regel gaat overal op. Een interessant voorbeeld is het *isoamyleen*. Hier zijn drie enkel gebonden en twee dubbelgebonden C-atomen. Men berekent dus voor $\sqrt{a_k}$ de waarde $3 \times 0 + 2 \times 1{,}55 + + 10 \times 1{,}6 = 19{,}1$. Gevonden uit $T_k$ en $p_k$ is 19,2. Inderdaad een uiterst merkwaardige bevestiging van den regel.

Hetzelfde geldt voor benzol en naphtaline. Maar voor de enkel gebonden C-atomen in de *substitutiegroepen* geldt weer de oude waarde 0. Zoo is bij Toluol $= C_6H_5.CH_3$ de waarde van $\sqrt{a_k} = = 6 \times 1{,}55 + 1 \times 0 + 8 \times 1{,}6 = 22{,}1$, terwijl 22,2 gevonden wordt; bij o-Xylol $= C_6H_4(CH_3)_2$ berekent men $6 \times 1{,}55 + 2 \times 0 + + 10 \times 1{,}6 = 25{,}3$, geheel identiek met de uit $T_k$ en $p_k$ gevonden waarde 25,3. Men zou deze voorbeelden nog met tallooze andere kunnen vermeerderen, maar hiervoor verwijzen wij naar de vroegere grondverhandelingen.

Wij zijn nu genaderd tot de *hoofdvraag*: wat geschiedt er, indien de atomen niet meer in verbindingen, zooals N in $N_2$, Cl in $Cl_2$, etc. — maar *geheel vrij* kunnen optreden, zooals bij de *metalen*, of bij de *vrije atomen* Cl, Br en I in het bij hooge temperaturen zich ont-

---

[1]) Hierdoor waren wij (zie de tabel) dan ook buiten staat de waarden van $\sqrt{a_k}$ in verbindingen op te geven voor Si, Ti, Ge en Sn, hoewel daarvan toch verbindingen bekend zijn, waarvan $T_k$ en $p_k$ zijn bepaald. Maar juist in *die* verbindingen ($SiCl_4$, $GeCl_4$ enz.) is de aantrekking van het centrale atoom Si, Ti, Ge, Sn uitgeschakeld.

ledend $Cl_2$, $Br_2$, $I_2$, of bij H, N en O in de zich eveneens bij zeer hooge temperaturen dissociëerende gassen $H_2$, $N_2$, $O_2$?

Dan stijgen — en dit is misschien wel de merkwaardigste onzer uitkomsten, welke ten volle bevestigd worden door het straks volgende aangaande de dissociatiewarmten — de waarden van $\sqrt{a}$ onmiddellijk tot de *sterk verhoogde* waarden **30** à **40** (in plaats van 1 tot 11). Deze verhoogde waarden zijn dus de eigenlijke *valentie-aantrekkingen*, terwijl de in verbindingen gevonden waarden slechts de z.g. *restwaarden* representeeren: hetgeen nog overblijft voor werking naar buiten, nadat de hoofdvalenties verzadigd zijn, en dus naar buiten werkeloos zijn geworden.

Dat men bij de elementen der Heliumgroep alleen de gewone restwaarden vindt, niettegenstaande deze atomistisch optreden, komt natuurlijk daarvandaan dat deze elementen *valentieloos* zijn.

Bij Arsenicum werd slechts een partieel verhoogde waarde gevonden, wijzende op een dissociatie van $As_4$ bij $T_k$ tot een bedrag van 20%, terwijl Phosphorus bij $T_k$ nog volkomen normaal $= P_4$ bleek te zijn. Voor Se en Te vonden wij dissociatiebedragen (altijd bij $T_k$) van 30%, resp. 80%. In de Halogeengroep is bij $Br_2$ en $I_2$ een slechts zeer geringe dissociatie (5 en 10%) geconstateerd. Naarmate de atomen meer en meer als *vrije atomen* optreden, bevestigt zich in een groep het toenemend *metaalkarakter:* As $\rightarrow$ Sb $\rightarrow$ Bi; Se $\rightarrow$ Te; enz.

Behalve de stijging van 0 tot 1,55 en 3,1 bij *koolstof* — alnaarmate het C-atoom geheel of slechts gedeeltelijk beschaduwd is door omringende atomen of atoomgroepen, waaraan het is *gebonden* — vindt dus een verdere stijging van $\sqrt{a}$ plaats, en wel tot 32, de *tiendubbele* waarde, wanneer het C-atoom zich ook van deze bindingen vrijmaakt en *geheel zelfstandig* als *atomistische* koolstof kan optreden. Vandaar de enorm hooge waarde der kritische temperatuur, nl. 6500 abs., welke in geval van $C_2$ slechts ongeveer 120° abs. zou hebben bedragen, zooals gemakkelijk is te berekenen. Koolstof zou dan met $N_2$, $O_2$ etc. vergelijkbaar zijn geworden, terwijl het thans op één lijn staat met een uiterst moeilijk smeltbaar metaal.

Bij *Tellurium* vindt men nog de eigenaardigheid dat de normale restaantrekking 9, welke o.a. bij $TeCl_4$ gevonden wordt, [1]) bij $TeCl_2$

[1]) Dat bij $TeCl_4$ het centrale Te-atoom geen schaduwwerking uitoefent evenals C in $CCl_4$, Ge in $GeCl_4$, etc., ligt aan de configuratie van het molecuul. Terwijl de vier chlooratomen bij $CCl_4$ regelmatig in de *ruimte* rondom het C-atoom gelegen zijn (in de richting der vier hoekpunten van een tetraëder), moet men bij $TeCl_4$ onderstellen dat de Cl-atomen in één *vlak* rondom het centrale Te-atoom gelegen zijn. Ook bij $PCl_3$ en $POCl_3$, $AsH_3$ en $AsCl_3$, $SbH_3$ en $SbCl_3$ vindt men

— waar twee valenties zijn vrijgekomen — reeds tot 13 is verhoogd. Bij geheel vrij metallisch Te zal $\sqrt{a}$ nog verder, en wel tot ongeveer 30, stijgen.

Welke gevolgen dit gedrag van moleculen en atomen t. o. der door hen uitgeoefende aantrekking voor de eigenschappen van vele stoffen (vluchtigheid, oppervlaktespanning, etc.) kan hebben, is door mij elders [1]) uitvoerig uiteengezet.

### 4. Dissociatiewarmte van tweeatomige gassen.

Aldus voorbereid, kunnen wij thans overgaan tot het eigenlijke onderwerp van deze Verhandeling, nl. de berekening der *dissociatiewarmten* $Q$ uit de waarden der verhoogde valentieaantrekkingen $\sqrt{A}$, waarvan boven sprake was, en die in tabel II, voor zoover tot dusver bekend, zijn vereenigd (de onder de elementen vet gedrukte getallen).

Nemen wij als voorbeeld de waterstof. Voor de inwendige energie van het ongedissocieerde gas $H_2$ kan men schrijven:

$$E_{H_2} = (E_0 - Q_0) - \frac{a}{v} + c_{H_2} T, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

waarin $E_0$ de z.g. *Energiekonstante* van de *ongebonden* H-atomen, derhalve $E_0 - Q_0$ die van de *gebonden* $H_2$-atomen in $H_2$ voorstelt. $Q_0$ is derhalve de geabsorbeerde (inwendige) dissociatiewarmte (in arbeidseenheden bv.) bij de dissociatie $H_2 \rightarrow 2H$, en wel bij $T = 0$ — d. w. z. de chemische energie (bij $T = 0$), welke vrijkomt bij de vorming van 1 Gr.mol. $H_2$ uit de afzonderlijke H-atomen.

Voor het gedissocieerde H + H heeft men blijkbaar:

$$2E_H = E_0 - \frac{4A}{v} + 2c_H T. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Terwijl nl. bij $H_2$ de grootheid $a$ de gewone restaantrekking (per Gr.mol.) tusschen de *moleculen* voorstelde, stelt thans $A$ de verhoogde valentieaantrekking tusschen de afzonderlijke, thans vrije, *atomen* voor, en wel per Gr. atoom, derhalve $4A$ per Gr. mol. = 2 Gr. atomen.

In den *idealen gastoestand*, waar $v$ zeer groot is, zal men eenvoudig hebben:

$$E_{H_2} = (E_0 - Q_0) + c_{H_2} T \quad ; \quad 2E_H = E_0 + 2c_H T,$$

geen volledige schaduwwerking, hetgeen bij deze stoffen waarschijnlijk is toe te schrijven aan de betrekkelijk grootere uitgebreidheid van het centrale atoom. Bij $SbCl_3$ vindt men zelfs weer de volle restwaarde 9. (Vergel. de geciteerde Verhandelingen in Deze Verslagen).

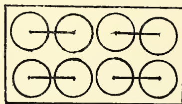
[1]) Zie Chemisch Weekblad van 14 Sept. 1918, N°. 37 (p. 1124—1137).

en daar deze twee energiehoeveelheden juist de *totale* (inwendige) dissociatiewarmte $Q$ zullen verschillen, zoo heeft men alsdan:

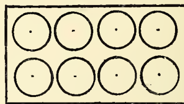
$$Q = 2E_H - E_{H_2} = Q_0 + (2c_H - c_{H_2})T, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

de bekende uitdrukking voor $Q$ in functie van $T$, wanneer $c_H$ de limietwaarde der specifieke warmte bij konstant (groot) volume van 1 Gr. atoom H voorstelt, en $c_{H_2}$ dezelfde grootheid bij $H_2$. Daar $c_{H_2} = 5$ is, en $c_H = 3$ (in Gr. kal.), zoo zal bij $H_2 \rightarrow 2H$ voor $Q$ kunnen geschreven worden $Q = Q_0 + T$.

Wanneer het volume echter kleiner en kleiner wordt, en de grootheden $\frac{a}{v}$ en $\frac{A}{v}$ grooter en grooter worden, zal er eindelijk een (fictief) volume komen, waarin het verschil der beide energieën $= 0$ is geworden, doordat het dan t. o. der inwendige Energie geheel onverschillig zal zijn, of de atomen afzonderlijk in die kleine ruimte aanwezig zijn, dan wel tot moleculen vereenigd — d.w.z. wanneer ook de translatie-energieën niet verschillen, dus bij $T = 0$.



$H_2$



H + H

Voor het verschil $Q' = 2E'_H - E'_{H_2}$ heeft men in dit geval:

$$Q' = Q_0 - \frac{4A}{v_1} + \frac{a}{v_1} + (2c_H - c_{H_2})T, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

waarin $v_1$ het bovenbedoelde kleine volume voorstelt, hetwelk wij nog nader zullen hebben te preciseeren. Uit ($d$) volgt nu onmiddellijk bij $T = 0$, als wanneer $Q' = 0$ moet wezen:

$$Q_0 = \frac{4A}{v_1} - \frac{a}{v_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en dit is de eenvoudige, door ons gezochte betrekking tusschen de dissociatiewarmte $Q_0$ bij $T = 0$, en de beide aantrekkingen $A$ en $a$.

Wij moeten thans het kleine volume $v_1$ bepalen. Klaarblijkelijk zal dit van de orde van het limietvolume zijn, hetwelk de moleculen zelf (zie de bovenstaande figuur) in *ongedwongen* toestand innemen, d.w.z. het door $b_g$ uitgedrukte volume — en niet b.v. het geringere volume $b_1$ in den vloeistoftoestand, waar tengevolge der geringere ruimte de moleculen *samengedrukt* zullen zijn, en welke dus een

*geforceerden* en géén vrijen, ongedwongen toestand voorstelt. [1]) Nu is $b_g$ nagenoeg $= b_k$, zoodat wij kunnen stellen:

$$v_1 - b_g = \gamma b_k,$$

waarin $\gamma(>1)$ niet ver van de eenheid verwijderd zal zijn. Stellen wij $4A = na$, dan wordt (1):

$$Q_0 = \frac{(n-1)a_1}{v_1} = \frac{(n-1)\varepsilon a_k}{\gamma b_k},$$

wanneer wij $a_1$, de aantrekking in het kleine volume $v_1$, $= \varepsilon a_k$ stellen. Hierin zal $\varepsilon(>1)$ iets meer van de eenheid verschillen dan $\gamma$, zoodat $\varepsilon > \gamma$ zal zijn. Voor $a_k : b_k$ kunnen wij nu verder $\frac{27}{8\lambda} R T_k$ schrijven, waarin $\lambda$ slechts weinig kleiner dan 1 is, zoodat wij ten slotte verkrijgen, wanneer $\gamma\lambda : \varepsilon = \theta$ wordt gesteld:

$$Q_0 = (n-1)\frac{27}{8\theta} R T_k, \qquad \qquad (1a)$$

waardoor $Q_0$ kan berekend worden als $A$ en $a$, derhalve ook $n$, en $T_k$ bekend zijn. Maar aangezien wij bij $H_2$, $N_2$, $O_2$ etc. de waarden van $A$ niet kennen; daarentegen wel benaderd die van $Q_0$, zoo zullen wij den *omgekeerden* weg volgen, en liever $n$ uit $Q_0$ berekenen. Wij kunnen dan zien of de zoo berekende waarden van $\sqrt{A}$ inderdaad van de verwachte grootte-orde zijn, vergeleken bij de reeds bekende waarden van $\sqrt{A}$ bij nabijliggende elementen van het periodiek systeem (zie Tabel II). Wij verkrijgen dan:

$$n = 1 + \frac{4}{27}\theta\frac{Q_0}{T_k},$$

dus

$$4A = a\left(1 + \frac{4}{27}\theta\frac{Q_0}{T_k}\right),$$

wanneer voor $R$ gezet wordt 2, de waarde in Gr. kal., waardoor wij dus nu ook $Q_0$ in Gr. kal. uitgedrukt kunnen laten. De waarde

---

[1]) Hierbij is ook ondersteld dat $b_g$ niet $= 4m$ is, wanneer $m$ het *werkelijke* volume der moleculen voorstelt, maar eenvoudig $= m$ zelf. Volgens de nieuwere beschouwingen is dit laatste theoretisch minstens evengoed te rechtvaardigen als de vroegere onderstelling $b_g = 4m$, welke speciaal op botsingen van *mathematische bollen*, en niet van *werkelijke moleculen* (welke heel wat van den bolvorm kunnen afwijken, bv. de langgerekte moleculen der koolwaterstoffen) betrekking heeft. Trouwens wanneer men langs anderen weg de werkelijke grootte der moleculen berekent, dan vindt men hiervoor altijd waarden, welke met $b_k$ ($= b_g$), uit $T_k$ en $p_k$ berekend, overeenstemmen, en *niet* met $^1/_4\, b_k$. Men vergelijke hiervoor o.a. mijn Artikel in Deze Verslagen van 31 Oct. 1914, speciaal p. 826 (midden) en de Noot op p. 825—826.

van $a$ heeft betrekking op 1 Gr.mol. $H_2$. Stelt derhalve $a'$ de waarde van één *gramatoom* voor (*deze* waarden zijn in tabel II opgenomen), dan is $a = 4a'$ en wordt ten slotte:

$$\sqrt{A_k} = \sqrt{a'_k} \times \sqrt{1 + {}^4/_{27}\theta\, {}^{Q_0}/_{T_k}}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wanneer wij $A$ en $a'$ beide bij de kritische temperatuur nemen. Deze beide grootheden hebben dus nu behoorlijk op 1 Gr.atoom betrekking. Onder het wortelteeken heeft $Q_0$ echter, volgens de afleiding der formule, op 1 Gr.mol. betrekking. Daar $\varepsilon$ steeds $> \gamma\lambda$ zal wezen, zoo zal $\theta = \gamma\lambda : \varepsilon$ *iets kleiner* dan de eenheid zijn, ook nog wanneer wij in aanmerking nemen dat $R$ niet precies $= 2$ is, maar iets kleiner. De uit (2) *berekende* waarden van $\sqrt{A_k}$ zullen dus eerder *te groot* dan te klein zijn, wanneer wij in het volgende voorloopig $\theta = 1$ zullen nemen.

**5. Berekening der waarden van $\sqrt{A_k}$ uit $Q_0$.**

Beginnen wij met de *waterstof*. ISNARDI (1915) bepaalde $Q_0 = 95000$ Gr. kal., terwijl LANGMUIR (methode bekend) in 1912 133000 Gr. kal. aangaf. Maar in 1914 vond deze laatste 70000 à 80000 Gr. kal.

Wij zijn dus zeker niet ver van de waarheid verwijderd, wanneer wij bij $H_2$ de waarde van $Q_0$ op rond 80000 Gr.kal. stellen. Met $T_k = 33{,}18$ (K. ONNES, CROMMELIN, CATH, 1917) wordt dus $Q_0 : T_k = 2400$, alzoo ${}^4/_{27} Q_0 : T_k = 356$. En aangezien $\sqrt{a'_k} = 1{,}1$ is (zie tabel II), zoo wordt (alle waarden van $\sqrt{a'_k}$ en $\sqrt{A_k}$ zijn in het vervolg nog met $10^{-2}$ te vermenigvuldigen):

$$\sqrt{A_k} = 1{,}1 \times \sqrt{357} = 20{,}8 = \mathbf{21},$$

wat zeer goed overeenstemt met wat wij bij Li (23) en Na (27) hebben gevonden (zie tabel II).

Voor *Stikstof* berekent BRINER[1]) uit een enkele opgave van LANGMUIR $Q_0 =$ minstens 150000 Gr. kal. Dit getal komt ons in verband met de waarden bij $H_2$ en bij $O_2$ te hoog voor, en m.i. zal 130000 Gr. kal. dichter bij de waarheid zijn. Berekenen wij intusschen $\sqrt{A_k}$ uit beide waarden van $Q_0$, dan wordt ${}^4/_{27}\, Q_0 : T_k = {}^4/_{27} \times \times \begin{pmatrix} 150000 \\ 130000 \end{pmatrix} : 126 = {}^4/_{27} \times \begin{pmatrix} 1190 \\ 1032 \end{pmatrix} = 176$ à 153. En daar $\sqrt{a'_k} = 2{,}6$ is, zoo zal

$$\sqrt{A_k} = 2{,}6 \times \sqrt{{}^{177}_{154}} = 34{,}6 \text{ à } 32{,}3 = \mathbf{35} \text{ à } \mathbf{32}$$

zijn. Aangezien in verband met $C = 32$ ook voor N een waarde in de nabijheid van 32 kan worden verwacht, zoo is ook hier de uitkomst een bevestiging van onze formule (1) of (1$a$), temeer wanneer men

[1]) Journal de Chem. Phys. **12**, 119 (1914) en **13**, 219 en 465 (1915).

bedenkt, dat door $\theta = 1$ te stellen, de uitkomst allicht iets te groot zal zijn.

Voor *Zuurstof* is door SIEGEL [1]) gevonden $Q_0 = 160000$ Gr.kal. Derhalve wordt hier $^4/_{27} Q_0 : T_k = {^4/_{27}} \times (160000 : 154.25) = {^4/_{27}} \times 1040 = 154$. Met $\sqrt{a'_k} = 2,6$ vindt men dan verder:

$$\sqrt{A_k} = 2,6 \times \sqrt{155} = 32,4 = \mathbf{32},$$

wat alweer uitstekend uitkomt.

In de tweede plaats zullen wij de *Halogenen* onderzoeken.

Vooreerst het *Chloor*. Door PIER [2]) werd voor $Q_0$ de waarde 113000 Gr.kal. gevonden. De kritische temperatuur is volgens PELLATON 144° C = 417°,1 abs., zoodat $^4/_{27}\, Q_0 : T_k = {^4/_{27}} \times 271 = 40,2$ wordt. Derhalve zal met $\sqrt{a'_k} = 5,6$ ongeveer (uit de kritische data van DEWAR zou nl. volgen 5,43, uit die van PELLATON 5,75)

$$\sqrt{A_k} = 5,6 \times \sqrt{41,2} = 35,0 = \mathbf{35}$$

worden. Hoewel ons dit wat hoog voorkomt, aangezien 32 à 30 kan worden verwacht, zoo is de *orde* van grootte toch weer in overeenstemming met het voor $\sqrt{A}$ bij andere elementen daarvoor gevondene. Wellicht is $Q_0$ wat te hoog, of ook $\sqrt{a'_k} < 5,6$; en is misschien ook $\theta$ in dit geval, waar $a_k : a_1$ verder van de eenheid zal verwijderd zijn dan bij $H_2$, $N_2$ en $O_2$, welke zooveel lagere kritische temperaturen hebben, zóóveel kleiner dan 1, dat de gevonden waarde 35 tot ± 32 zal moeten worden verlaagd.

Wat *Broom* betreft, zoo vonden PERMAN en ATKINSON [3]) voor $Q_0$ de waarde 57000 Gr.kal. Met $T_k = 302°,2$ C = 575,3 abs. wordt $^4/_{27} Q_0 : T_k = {^4/_{27}} \times 99 = 14,7$. Met $\sqrt{a'_k} = 7$ berekent men alzoo:

$$\sqrt{A_k} = 7 \times \sqrt{15,7} = 27,7 = \mathbf{28},$$

een alleszins mogelijke waarde.

Ten slotte het *Jodium*. STARK en BODENSTEIN (1910) vonden hiervoor $Q_0 = 35500$ Gr.kal., zoodat met $T_k = 512°$ C = 785°,1 abs. voor $^4/_{27}\, Q_0 : T_k$ wordt gevonden $^4/_{27} \times 45,2 = 6,7$. Daardoor wordt met $\sqrt{a'_k} = 9$:

$$\sqrt{A_k} = 9 \times \sqrt{7,7} = 25.0 = \mathbf{25}.$$

Ook deze waarde, hoewel wat klein, is toch volstrekt niet onmogelijk.

**6. Besluit.**

Uit het bovenstaande is wel duidelijk gebleken, **dat de dissociatie-warmten $Q_0$ bij de ontleding der moleculen**

[1]) Zeitschr. f. physik. Chem. **87**, 642 (1914). Vergel. ook BRINER, l.c.

[2]) Ibid. **62**, 385 (1908).

[3]) Ibid. **33**, 215 (1900).

$H_2$, $N_2$, $O_2$, $Cl_2$, etc. in hunne atomen geheel worden verantwoord door de door ons in vroegere verhandelingen gevonden vergroote valentie-aantrekkingen $\sqrt{A}$ der afzonderlijke atomen.

Door middel van (1) of ($1^a$) zijn wij dus voortaan in staat $Q_0$ te berekenen, wanneer $\sqrt{a}$ en $\sqrt{A}$ bekend zijn, of omgekeerd volgens (2) $\sqrt{A}$ te berekenen, wanneer $Q_0$ bekend is.

In de bekende formule van GIBBS-PLANCK voor de dissociatie van gassen [1])

$$log\ K = -\frac{Q_0}{RT} + \Sigma\left[\nu_1\left(\frac{c_1}{R}+1\right)\right] log\ T + (\Sigma\nu_1)\ log\ p + \Sigma(\nu_1 C_1), \quad (3)$$

waarin $K$ de dissociatiekonstante voorstelt in de betrekking $\frac{k_2^{\nu_2}}{k_1^{\nu_1}} = K$ (bij tweeatomige gassen, waar $k_2 = \frac{2x}{1+x}$, $k_1 = \frac{1-x}{1+x}$ is, zal dus $\frac{4x^2}{1-x^2} = K$ zijn, wanneer $x$ de z.g. dissociatiegraad en $k_1$ etc. de z.g. moleculaire concentraties voorstellen), kunnen wij nu niet alleen de konstanten $C_1$ etc. (de z.g. *chemische konstanten* der componenten), en dus ook $\Sigma(\nu_1 C_1) = C$ theoretisch nader komen — dit is in den laatsten tijd op grond van waarschijnlijkheidsoverwegingen, in verband met het z.g. warmtetheorema van NERNST en de PLANCK'sche

[1]) Het behoeft wel geen betoog, dat deze formule *niets* te maken heeft met het z.g. *warmtetheoreem* van NERNST, zooals vele leerlingen en napraters van dezen geleerde ten onrechte meenen (zie vele artikelen in vele tijdschriften). De formule is in nuce reeds door GIBBS in 1878 gegeven, en later door PLANCK (1887), v. D. WAALS (1891), mij (1892), DUHEM (1893) en vele anderen herhaaldelijk voor verschillende gevallen uitgewerkt. [Zie o.a. mijn *Lehrbuch der math. Chemie* (BARTH, 1901), p. 1—13, 25—28, en de „*Sechs Vorträge*" (VIEWEG 1906), p. 64 ff. Deze laatste zijn oorspronkelijk verschenen in het Chem. Weekbl 1905].

NERNST heeft alleen iets gezegd aangaande de konstante $\Sigma(\nu_1 C_1) = C$ — welke met de entropiekonstanten samenhangt — *in verband met zijn theorema*. Daardoor kon hij n.l. de bedoelde grootheden $C_1$ (de „chemische konstanten") in *verband* brengen met de konstanten der *dampdrukvergelijkingen* bij zeer lage temperatuur. Maar dit alles heeft natuurlijk niets uitstaande met formule (3) zelf, welke *geheel onafhankelijk* van het warmtetheorema is. Dit laatste zegt alleen iets aangaande het tot 0 naderen van entropie, specifieke warmte, etc. in gecondenseerde systemen, in verband ook met de quanten-theorie van PLANCK.

Differentieert men formule (3) ($p$ konstant) t. o. v. $T$, dan komt er

$$\left(\frac{d\,log\,K}{dT}\right)_p = \frac{Q_0}{RT^2} + \frac{\Sigma\{\nu_1(c_1/R+1)\}}{T}.$$

En wijl $\left(\frac{d\,log\,K}{dT}\right)_p = \frac{Q}{RT^2}$ is, zoo is $Q_{p=konst.} = Q_0 + \Sigma[\nu_1(c_1+R)]T$, derhalve $Q_{v=konst.} = Q_0 + \Sigma(\nu_1 c_1)\,T$, in volkomen overeenstemming met ($c$) van § 4.

quantentheorie, o. a. door LORENTZ, PLANCK, SACKUR, TETRODE e. a. gedaan — maar ook de *reactiewarmten* $Q_0$ bij $T=0$ berekenen. Tot nog toe waren wij er op aangewezen $Q_0$, evenals ook $C = \Sigma\,(\nu_1 C_1)$ *experimenteel* uit een paar waarden van $x$ te bepalen, maar thans zouden wij in staat zijn voor iedere gasreactie de waarde van $log\ K$ bij gegeven temperatuur en druk volledig te kunnen berekenen, zoodra slechts de waarden der chemische konstanten en van $\sqrt{A}$ en $\sqrt{a}$, *voor ieder element afzonderlijk*, nauwkeurig bekend zijn.

Dit moet dus nu voortaan de taak zijn der physici: *deze* waarden volledig te leeren kennen. Ze zijn fundamenteel voor de kennis van het gedrag der op elkaar reageerende chemische stoffen. Is men dan voorts ook volledig bekend met alle waarden van $b$ voor de verschillende elementen, dan zijn van iedere enkelvoudige of samengestelde stof $T_k$ en $p_k$ bekend, en derhalve ook hun verder thermisch gedrag.

Wat de waarden van $b$, en van $\sqrt{a}$ en $\sqrt{A}$ betreft, hiermede is door mij reeds een begin gemaakt; ik hoop dit werk te kunnen voortzetten.

Of dus nu ten slotte een stof als $H_2$ of Na bij gewone temperaturen en drukken in den vorm van *moleculen*, bv. $H_2$, dan wel in dien van *vrije atomen*, als Na, zal optreden, hangt geheel af van de waarden van $C$ en van $Q_0$ (derhalve van $\sqrt{a}$ en $\sqrt{A}$). Hoe grooter $Q_0$, en hoe kleiner $C$ zal zijn, hoe kleiner de waarde van $K$, derhalve van $x$ — des te eerder zal dus de beschouwde stof in den toestand van moleculen, en *niet* in dien van atomen optreden.

Ik wil er nog op wijzen dat de coëfficient van $log\ T$, nl. $\Sigma\left[\nu_1\left(\frac{c_1}{R}+1\right)\right]$, ten onrechte door NERNST, POLLITZER en vele leerlingen van NERNST stereotiep $=1{,}75$ wordt gesteld. Bij $2HI \rightarrow H_2 + I_2$ zal deze coëfficient $= -2 \times {}^7/_2 + 1 \times {}^7/_2 + 1 \times {}^7/_2 = 0$ zijn (zooals trouwens genoegzaam bekend is), en dus niet $= 1{,}75$. Bij $H_2 \rightarrow 2H$ zal hij $= -1 \times {}^7/_2 + 2 \times {}^5/_2 = 1{,}5$ zijn, wat alweer niet $= 1{,}75$ is! Hetzelfde geldt bij vele andere reacties. Men zal dus goed doen bij iedere reactie de waarde van den bedoelden coëfficient afzonderlijk vast te stellen. Zoo ook wat de konstante $C$ betreft. Het gaat niet aan de chemische konstanten $C_1$ alle in de nabijheid van 3 aan te nemen; deze zullen trouwens ook wel verschillend zijn of men met een twee-atomige dan wel een één-atomige stof te doen heeft, hetgeen de theorie dan ook uitwijst.

Vele waarden van $Q_0$ zijn onnauwkeurig, omdat ze uit de proeven berekend zijn door middel van een formule met foutieve coëfficienten (1,75 en foutieve waarden van $C$); het zal daarom

aanbeveling verdienen bij een reactie niet alleen de waarden van $Q_0$, maar ook van den genoemden coëfficient en van de konstante $C = \Sigma(\mathbf{r}_1 C_1)$ uit de *proeven zelf* te berekenen. Alleen zoodoende kan men nauwkeurige experimenteele waarden van $Q_0$ verkrijgen.

Doordat wij in de berekeningen van § 5 dus niet altijd met volkomen betrouwbare waarden van $Q_0$ konden rekenen, zoo zijn ook de voor $\sqrt{A}$ gevonden waarden natuurlijk niet *volkomen* nauwkeurig. Ook in verband met het stellen van $\theta = 1$, hetgeen mede niet geheel waar zal zijn, is derhalve de overeenstemming tusschen de gevonden waarden van $\sqrt{A}$, en die welke wij op grond der reeds (op geheel onafhankelijke wijze) gevonden waarden (zie tabel II) konden verwachten, wel zeer opmerkelijk te noemen.

*La Tour près Vevey*, Augustus 1918.

**Sterrenkunde.** — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. W. J. A. SCHOUTEN: „*De verdeeling der absolute magnituden onder de sterren in en buiten den Melkweg.*" (Eerste Mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer W. DE SITTER).

## 1. *Inleiding.*

Het behoort tot de belangrijkste problemen der statistische astronomie om na te gaan, hoe in ieder deel der ruimte de sterren met heldere en zwakke absolute magnituden gemengd zijn en van welk deel der sterren de lichtkracht tusschen bepaalde grenzen ligt. Daarbij wordt onder lichtkracht de schijnbare helderheid der sterren verstaan, wanneer men ze op de eenheid van afstand geplaatst denkt en voor deze eenheid zullen we, in navolging van Prof. KAPTEYN, den afstand nemen, die overeenkomt met een parallax van 0".1.

De eerste bepaling der lichtkrachtwet is afkomstig van Prof. KAPTEYN en gepubliceerd in *Publ. Groningen* N°. 11 [1]). Daarna is door verschillende astronomen dit onderzoek volgens andere methoden herhaald. Behalve den arbeid van COMSTOCK en WALKEY, die gebruik maakten van gemeten parallaxen en wier uitkomsten daarom, tenzij groote omzichtigheid gebruikt is, geen groot vertrouwen verdienen, zijn de onderzoekingen van SEELIGER en SCHWARZSCHILD het meest bekend.

We hebben in onze dissertatie de drie genoemde methoden gediscussieerd en de verkregen resultaten vergeleken. Het bleek daarbij, dat tegen SEELIGERS onderzoek ernstige bezwaren zijn in te brengen, zoodat we aan de door hem gevonden frequentiefunctie der absolute magnituden geen groote waarde mogen toekennen. Ook meenen we daar te hebben aangetoond, dat de methode van KAPTEYN om verschillende redenen verre te verkiezen is boven die van SCHWARZSCHILD.

Nadat wij dit onderzoek hadden volbracht, kwam de sterke wensch bij ons op, zelf een werkelijke bepaling der lichtkrachtwet uit te voeren volgens de methode, die naar onze meening de beste is. Het is ons bekend, dat een dergelijke bepaling reeds geruimen tijd wordt voorbereid op het Astronomisch Laboratorium te Groningen. Tot

[1]) Ook in deze Verslagen, Deel IX, 1901.

die voorbereiding behooren de tellingen van sterren van bepaalde magnitude, die in *Publ. Groningen* Nos. 18 en 27 zijn verschenen, en de gemiddelde parallaxen der sterren van bepaalde magnitude en galactische breedte, die spoedig gepubliceerd zullen worden en ons zeer welwillend door Prof. KAPTEYN en Dr. VAN RHIJN ten gebruike zijn afgestaan.

Het spreekt van zelf, dat onze voorloopige resultaten vervangen moeten worden door die van de definitieve oplossing, zoodra deze beschikbaar zijn. We hebben echter gemeend onze uitkomsten toch te mogen publiceeren, omdat zij ten deele op ander materiaal berusten, omdat zij een beeld geven van de nauwkeurigheid, die thans reeds te bereiken is en omdat zij wellicht van dienst kunnen zijn gedurende den tijd, dat de definitieve resultaten nog toeven.

In deze mededeeling geven we de uitkomsten, die we vonden, toen we volgens KAPTEYNS methode de lichtkrachtwet trachtten te bepalen voor den geheelen hemel en voor vijf zones van verschillende galactische breedte.

We stellen ons voor in een tweede mededeeling de resultaten te publiceeren, die men vindt, wanneer SCHWARZSCHILDS methode op hetzelfde materiaal wordt toegepast. Tevens hopen we dan onze uitkomsten met die van andere onderzoekers te vergelijken.

Gaarne betuigen we ook op deze plaats onzen hartelijken dank aan Prof. KAPTEYN voor zijn welwillende hulp, die ons onderzoek ten goede kwam.

## 2. *Het waarnemingsmateriaal.*

Bij een toepassing van KAPTEYNS methode moeten we de volgende gegevens aan de waarnemingen ontleenen:

1°. de getallen $N_{m,\mu}$, de aantallen sterren van bepaalde schijnbare magnitude en eigenbeweging,

2°. de grootheden $\pi_{m,\mu}$, de parallaxen voor sterren van bepaalde magnitude en eigenbeweging,

3°. de waarde van $\varrho$, de waarschijnlijke fout der foutenkromme log. $\pi/\pi_0$, waarin $\pi$ de ware en $\pi_0$ de waarschijnlijke parallax voorstelt.

We hebben bij ons onderzoek den hemel in 5 zones verdeeld. De galactische breedte zullen we met $b$ aanduiden.

Zone I = het deel van den hemel tusschen $b = -10°$ en $b = +10°$.
Zone II = „ „ „ „ „ met $b$ van $-10°$ tot $-30°$ en $+10°$ tot $+30°$.
Zone III = „ „ „ „ „ „ $b$ „ $-30°$ „ $-50°$ „ $+30°$ „ $+50°$.
Zone IV = „ „ „ „ „ „ $b$ „ $-50°$ „ $-70°$ „ $+50°$ „ $+70°$.
Zone V = „ „ „ „ „ „ $b$ „ $-70°$ „ $-90°$ „ $+70°$ „ $+90°$.

De aantallen $N_{m,\mu}$ hebben we met behulp van tellingen in catalogi van sterren met bekende eigenbeweging afgeleid uit de aantallen

sterren van bepaalde magnitude en galactische breedte. Deze getallen $N_m$ hebben we voor de verschillende zones ontleend aan de tabellen van *Publ. Groningen* N°. 18, zooals deze gecorrigeerd zijn in *Publ. Groningen* N°. 27.

De uitkomsten, die VAN RHIJN in het laatstgenoemde werk publiceerde, verdienen groot vertrouwen, daar zij door verschillende onafhankelijke studies bevestigd werden. Zoo zijn de resultaten van NORT en SEARES in mooie overeenstemming met die van VAN RHIJN en ook de uitkomsten van CHAPMAN en MELOTTE stemmen overeen met de Groningsche tellingen, nadat zij gecorrigeerd zijn voor een fout in de reductiemethode, die VAN RHIJN aanwees.

Bij onze tellingen werden de sterren naar hun magnituden verdeeld in groepen van 1—2.9, 3.0—3.9, 4.0—4.9, . . . . 12.0—12.9. Naar hun eigenbewegingen werden ze afgeteld tusschen de grenzen 0—2″.9, 3″.0—4″.9, 5″.0—7″.9, 8″.0—9″.9, 10″.0—14″.9, 15″.0—19″.9, 20″.0—29″.9, 30″.0—49″.9 en >49″.9.

De volgende catalogi werden gebruikt:

1. L. BOSS. Preliminary Catalogue of 6188 Stars, 1910.

2. A. AUWERS. Catalog der Astronomischen Gesellschaft, Zone + 15° bis + 20°, 1896.

3. W. G. THACKERAY. Greenwich 1910 Catalogue of Stars, Zone + 24°0′ to + 32°0′. Analysis of Number and Percentages of Proper Motions. *Monthly Notices* **77**, 204—212, 1917.

F. W. DYSON and W. G. THACKERAY. The Systematic Motions of the Stars between Dec. + 24° and Dec. + 32°. *Monthly Notices* **77**, 581—596, 1917.

4. F. W. DYSON and W. G. THACKERAY. New Reduction of GROOMBRIDGE's Catalogue of Circumpolar Stars, 1905.

5. J. C. KAPTEYN and W. DE SITTER. The Proper Motions of 3300 Stars of different Galactic Latitudes, derived from photographic plates, prepared by Prof. ANDERS DONNER. *Publ. Groningen* N°. 19, 1908.

6. J. C. KAPTEYN. The Proper Motions of 3714 Stars derived from plates taken at the observatories of Helsingfors and the Cape of Good Hope. With the co-operation of Dr. H. A. WEERSMA. *Publ. Groningen* N°. 25, 1914.

7. Dr. A. A. RAMBAUT. A photographic Determination of the Proper Motion of 250 Stars in the Neighbourhood of Σ 443. *Monthly Notices* **73**, 616—630, 1913.

8. A. VAN MAANEN. Remarks on the Motion of the Stars in and near the double Cluster in Perseus. *Report of the Nineteenth Meeting of the American Astronomical Society. Popular Astronomy* **25**, 108—110, 1917.

9. W. G. Thackeray. Notes on some Proper Motions derived from a Comparison of Carrington's Catalogue with the Greenwich Places for 1900. *Monthly Notices* **67**, 146—148, 1906.

Boss' catalogus is slechts gebruikt voor sterren, helderder dan $5^m.8$.

Auwers' catalogus werd alleen gebruikt bij onze bepaling van $N_{m,\mu}$ voor den geheelen hemel.

De eigenbewegingen, die in *Publ. Groningen* N°. 25 uit de Kaapsche platen zijn afgeleid, zijn weinig nauwkeurig. Deze platen waren oorspronkelijk niet bestemd voor het bepalen van eigenbewegingen en zijn absoluut gemeten. We hebben daarom bij het bepalen van gemiddelden aan deze platen slechts een gering gewicht toegekend.

Geen correcties zijn aangebracht om onze uitkomsten voor de verschillende catalogi te herleiden op eenzelfde magnitudeschaal of om de eigenbewegingen te corrigeeren voor waarnemingsfouten of op eenzelfde fundamentaalsysteem te herleiden. Deze correcties zijn, naar we meenen, bij de betrekkelijke onnauwkeurigheid der getallen te verwaarloozen. Bovendien hebben we steeds de getallen $N_{m,\mu}$ voor iedere magnitude in percentages van het aantal $N_m$ uitgedrukt en deze percentages bleken slechts weinig te varieeren met de magnitude.

Onze tellingen ter bepaling van $N_{m,\mu}$ voor den geheelen hemel omvatten 38818 eigenbewegingen, terwijl bovendien in de vijf zones resp. 8273, 10857, 6981, 3144 en 1488 sterren geteld werden.

We zijn nu in staat de aantallen sterren van bepaalde magnitude en eigenbeweging te bepalen. De uitkomsten, die we voor den geheelen hemel vonden, zijn in tabel 1 opgenomen.

We hebben bij ons verder onderzoek geen gebruik gemaakt van de aantallen sterren met $\mu > 50''$. Het is zeer bezwaarlijk deze met voldoende nauwkeurigheid uit het nog zoo schaarsche materiaal van bekende eigenbewegingen af te leiden. Het zal blijken, dat we tengevolge van deze beperking de gevonden lichtkrachtkromme niet tot de zwakste sterren kunnen uitbreiden.

We kunnen nu de aantallen $N_{m,\mu}$ voor de verschillende zones bekend zijn, ook nagaan, hoe de sterren met bepaalde eigenbeweging aan den hemel verdeeld zijn met betrekking tot den Melkweg. Daartoe hebben we de aantallen sterren met E. B. resp. $> 10''$, $5''$, $3''$ en $0''$ voor iedere magnitude per 100 vierkante graden berekend. Het bleek, dat de aantallen met $\mu > 5''$ geen galactische condensatie vertoonen, behalve misschien voor de sterren zwakker dan $9^m.0$. De aantallen met $\mu > 3''$ toonen duidelijk voor alle magnituden een condensatie in de richting van den Melkweg, zij het ook in mindere mate dan de aantallen sterren met $\mu > 0''$.

TABEL 1. De aantallen sterren van bepaalde magnitude en eigenbeweging voor den geheelen hemel.

| $m$ \ $\mu$ | 0—2.9 | 3.0—4.9 | 5.0—7.9 | 8.0—9.9 | 10.0—14.9 | 15.0—19.9 | 20.0—29.9 | 30.0—49.9 | > 49.9 | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1—2.9 | 31 | 26 | 13 | 8 | 14 | 6 | 13 | 10 | 11 | 132 |
| 3.0—3.9 | 48 | 41 | 39 | 19 | 39 | 18 | 28 | 14 | 17 | 263 |
| 4.0—4.9 | 303 | 167 | 128 | 50 | 113 | 57 | 39 | 29 | 21 | 907 |
| 5.0—5.9 | 1090 | 665 | 575 | 222 | 329 | 140 | 117 | 72 | 52 | 3262 |
| 6.0—6.9 | 4019 | 2675 | 1528 | 564 | 728 | 349 | 185 | 123 | 82 | 10253 |
| 7.0—7.9 | 14664 | 8268 | 4150 | 1092 | 1716 | 530 | 374 | 281 | 125 | 31200 |
| 8.0—8.9 | 44996 | 27517 | 11992 | 2417 | 3718 | 930 | 744 | 464 | 186 | 92964 |
| 9.0—9.9 | 108257 | 78185 | 32478 | 8420 | 9142 | 2165 | 1203 | 480 | 241 | 240571 |
| 10.0—10.9 | 270748 | 172763 | 136019 | 29009 | 29653 | 2579 | 2579 | 645 | 645 | 644640 |
| 11.0—11.9 | 705391 | 436968 | 288711 | 74909 | 43697 | 4681 | 3121 | 1561 | 1561 | 1560600 |

Deze uitkomst stemt overeen met wat KAPTEYN reeds in 1893 vond en met de resultaten, die DYSON en THACKERAY onlangs uit een discussie van de Greenwich 1910 Catalogue vonden.

De gemiddelde parallaxen $\pi_{m,\mu}$ voor den geheelen hemel en voor de verschillende galactische zones hebben we niet rechtstreeks bepaald. Zij zijn, naar wij meenen, voor ons toch slechts voorloopig onderzoek met voldoende nauwkeurigheid uit vroegere onderzoekingen af te leiden.

KAPTEYN vond in *Publ. Groningen* N°. 8 voor deze gemiddelde parallaxen

$$\pi_{m,\mu} = a\, \mu^b\, \varepsilon^{m-5.0}$$

waarin $a = 0''.0038$, $b = 0.71$ en $\varepsilon = 0.905$.

Hierbij was gebruik gemaakt van de waarde 16.7 Kilometer per seconde voor de snelheid der zon. Wanneer we de nieuwere waarde, 19.5 Kilometer per seconde, aanvaarden, verminderen de gemiddelde parallaxen $\pi_m$, die KAPTEYN bij de afleiding van zijn formule gebruikte, met 14°/₀. Wanneer we nu aannemen — zooals ook VAN RHIJN doet [1]) — dat deze correctie aan de gemiddelde parallaxen $\pi_m$ alleen de waarde van $a$ in $\pi_{m,\mu}$ verandert, vinden we $a = 0''.0032^5$.

KAPTEYNS parallaxen stemmen na deze correctie overeen met de waarden, die Dr. VAN RHIJN in zijn proefschrift afleidde uit een onderzoek, waarbij andere en nieuwere gegevens werden gebruikt dan KAPTEYN ten dienste stonden en waarbij ten deele ook een andere methode werd toegepast. Hieruit volgt, dat de parallaxen $\pi_{m,\mu}$, zooals zij in *Publ. Groningen* N°. 8 gegeven zijn, groot vertrouwen verdienen.

Om uit deze parallaxen, die voor den geheelen hemel gelden, de $\pi_{m,\mu}$ voor de verschillende galactische zones af te leiden, hebben we aangenomen, dat de $\pi_{m,\mu}$ voor de verschillende galactische zones zich op dezelfde wijze verhouden als de $\pi_m$ van deze zones.

Deze onderstelling is vrij willekeurig en zal vermoedelijk niet geheel juist zijn. Er is echter reden om aan te nemen, dat de fout, die wij op deze wijze maken, niet heel groot is. Wij meenden daarom bij ons toch slechts voorloopig onderzoek van de genoemde hypothese te mogen uitgaan.

We hebben reeds meegedeeld, dat wij door de groote welwillendheid van Prof. KAPTEYN en Dr. VAN RHIJN in de gelegenheid waren gebruik te maken van de gemiddelde parallaxen voor sterren van bepaalde magnitude en galactische breedte, die binnenkort in *Publ. Groningen* N°. 29 gepubliceerd zullen worden. Deze parallaxen zijn voor te stellen door de volgende formules:

---

[1]) Dissertatie Groningen 1915, pag. 35.

| | | |
|---|---|---|
| Zone I | log. $\pi_m$ | $= 8.883 - 0.142\ m$ |
| II | | $= 8.904 - 0.142\ m$ |
| III | | $= 8.957 - 0.142\ m$ |
| IV | | $= 9.024 - 0.142\ m$ |
| V | | $= 9.066 - 0.142\ m$ |
| Geheele hemel | | $= 8.943 - 0.142\ m$ |

**TABEL 2.**

De gemiddelde parallaxen der sterren van bepaalde magnitude en eigenbeweging voor den geheelen hemel.

| $m$ \ $\mu$ | 1.5 | 4.0 | 6.5 | 9.0 | 12.5 | 17.5 | 25 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.6 | 0".0065 | 0".0132 | 0".0187 | 0".0237 | 0".030 | 0".037 | 0".049 | 0".068 |
| 3.6 | .0057 | .0115 | .0163 | .0206 | .026 | .033 | .042 | .059 |
| 4.6 | .0049 | .0100 | .0142 | .0178 | .023 | .029 | .037 | .051 |
| 5.6 | .0043 | .0087 | .0123 | .0155 | .020 | .025 | .033 | .045 |
| 6.6 | .0037 | .0076 | .0107 | .0135 | .017 | .022 | .028 | .039 |
| 7.6 | .0033 | .0066 | .0093 | .0117 | .014 | .019 | .025 | .034 |
| 8.6 | .0029 | .0057 | .0081 | .0103 | .012 | .016 | .022 | .029 |
| 9.6 | .0025 | .0050 | .0071 | .0090 | .011 | .014 | .019 | .026 |
| 10.6 | .0022 | .0043 | .0061 | .0077 | .009 | .012 | .016 | .023 |
| 11.6 | .0019 | .0036 | .0051 | .0065 | .008 | .010 | .014 | .020 |

We hebben nu — wanneer we de vroeger door KAPTEYN gebruikte parallaxen $\pi_{m_{\text{KAPTEYN}}}$ noemen en de bovengenoemde gemakshalve met $\pi_{m_{\text{VAN RHIJN}}}$ aanduiden — $\pi_{m,\mu}$ voor den geheelen hemel en voor de 5 zones berekend door de getallen uit Tabel G van *Publ. Groningen* N°. 8 te vermenigvuldigen met een factor $\frac{\pi_{m_{\text{VAN RHIJN}}}}{\pi_{m_{\text{KAPTEYN}}}}$.
De parallaxen, die op den geheelen hemel betrekking hebben zijn opgegeven in tabel 2.

We hebben geen poging gedaan om zelf opnieuw de waarschijnlijke afwijking te bepalen van de foutenkromme log. $\pi/\pi_0$. Bovendien hebben we ondersteld, dat $\varrho$ niet varieert met de galactische breedte. De door KAPTEYN gevonden waarde 0.19 hebben we zoowel bij onze oplossing voor den geheelen hemel als voor de 5 galactische zones gebruikt. Het is echter in *Publ. Groningen* N°. 11 gebleken, dat de waarde van $\varrho$ weinig invloed heeft op de uitkomst.

### 3. *Toepassing van* KAPTEYNS *methode.*

We hebben de methode van KAPTEYN geheel onveranderd toegepast. Voor een uitvoerige beschrijving van deze methode verwijzen we naar de reeds geciteerde verhandeling in *Publ. Groningen* N°. 11. We zullen ons beperken tot een korte bespreking der gemaakte hypothesen en een verklaring van de in dit opstel opgenomen tabellen.

De onderstellingen, die bij KAPTEYNS onderzoek gemaakt zijn, waren een drietal:

1°. de densiteit is alleen een functie van $r$;

2°. de lichtkrachtkromme is onafhankelijk van den afstand tot de zon en er bestaat geen absorptie van het licht in de ruimte;

3°. de grootheden $z = \log. \pi/\pi_0$ zijn verdeeld volgens de foutenwet.

De eerste hypothese is noodzakelijk, wanneer we frequentiefuncties zoeken, die betrekking hebben op den geheelen hemel. We zoeken dan gemiddelde waarden voor de onbekende grootheden en kunnen zoodoende geen rekening houden met de veranderingen in de waarden met de galactische breedte en lengte. KAPTEYNS methode is echter even goed bruikbaar, wanneer we rekening willen houden met den invloed van de galactische breedte door voor de verschillende galactische zones afzonderlijke oplossingen te maken.

De tweede onderstelling is moeilijk te ontkomen. Wanneer we zekerheid hebben, dat de frequentiefunctie der absolute magnituden overal in de ruimte dezelfde is, biedt KAPTEYNS methode een middel om na te gaan, of er een merkbare absorptie van het licht in de

ruimte bestaat en, anderzijds, wanneer we weten, dat er geen absorptie is, kunnen we onderzoeken, of de lichtkrachtkromme varieert met den afstand tot de zon. Daar evenwel noch het een noch het ander vaststaat, zijn we voorloopig wel genoodzaakt de genoemde onderstelling te maken.

Wanneer we de frequentiefunctie bepalen voor de verschillende galactische zones afzonderlijk, wordt deze moeilijkheid belangrijk verminderd. We kunnen dan de lichtkrachtkrommen vergelijken, die voor de verschillende zones gevonden zijn. Wanneer het nu blijkt, dat deze krommen overeenstemmen, dan is het in hooge mate onwaarschijnlijk, dat de verdeeling der lichtkrachten verandert met den afstand tot de zon. Wanneer de lichtkrachtwet van $r$ afhangt en niet van $b$, zouden we een waaiervormige samenstelling van het sterrenstelsel vinden, die niet ondenkbaar is, maar toch in hooge mate onwaarschijnlijk.

Wanneer we mogen aannemen, dat de verdeeling der lichtkrachten onafhankelijk is van den afstand tot de zon, stelt KAPTEYNS methode ons in staat de absorptie te bepalen of tenminste na te gaan, of deze eenigen invloed heeft op de gevonden verdeeling der sterren in de ruimte.

De derde hypothese was inderdaad, toen KAPTEYN deze voor de eerste maal maakte, een vrij willekeurige aanname en het moet worden toegegeven, dat andere resultaten zouden zijn gevonden, wanneer van een andere onderstelling was uitgegaan. De hypothese werd gemaakt, omdat toen ter tijd nog te weinig parallaxen gemeten waren om den vorm van de frequentiekromme $log.\ ^{\pi}/_{\pi_0}$ rechtstreeks uit de gegevens af te leiden. Misschien zou dit thans bij een herhaling van het onderzoek mogelijk zijn. Het is echter van weinig belang thans te discussieeren over de vraag, of deze hypothese al dan niet gerechtvaardigd is, daar SCHWARZSCHILD heeft bewezen, dat de genoemde betrekking bestaat voor een specialen vorm van densiteit- en lichtkrachtwet, welke vorm, mede door zijn onderzoekingen, in hooge mate waarschijnlijk werd gemaakt.

We hebben uit het in § 2 genoemde waarnemingsmateriaal de lichtkrachtwet afgeleid. De ruimte werd verdeeld in een aantal bolschillen, waarvan de stralen gemakshalve zoo gekozen waren, dat $log.\ r$ met 0.2 toeneemt. Daarna werd met behulp van de formule voor $\pi_{m,\mu}$ voor ieder der gevonden aantallen $N_{m,\mu}$ de gemiddelde parallax bepaald. Met behulp van de gevonden waarde voor de waarschijnlijke afwijking van de fontenkromme $log.\ ^{\pi}/_{\pi_0}$ werd dan berekend, welk deel der gevonden aantallen in iedere schil voorkomt.

De getallen $N_{m,\mu}$, die wij voor den geheelen hemel vonden, zijn in tabel 1 opgenomen en de bijbehoorende parallaxen $\pi_{m,\mu}$ in tabel 2. We hebben in tabel 3 aangegeven, hoe deze aantallen sterren over de verschillende bolschillen verdeeld zijn. Overeenkomstige tabellen hebben we voor de vijf zones berekend.

Uit deze tabellen hebben we nu andere afgeleid, die de aantallen sterren van iedere absolute magnitude per volumeneenheid in de verschillende bolschillen aangeven. Voor den geheelen hemel hebben we onze resultaten medegedeeld in tabel 4. Tusschen de vetgedrukte lijnen staan de aantallen sterren van de schijnbare magnituden 3.0 tot 10.0. Deze zijn het meest betrouwbaar.

De densiteiten in de verschillende bolschillen werden bepaald door telkens in twee opeenvolgende schillen de aantallen sterren van een bepaalde absolute magnitude te vergelijken. De relatieve densiteit van twee opeenvolgende bolschillen werd gevonden als gemiddelde van drie bepalingen, die resp. berustten op de sterren van de schijnbare grootten 3.0 tot 8.0, 3.0 tot 9.0 en 3.0 tot 10.0. De densiteit in de vijfde schil, d. i. die waarvoor de gemiddelde parallax 0''.0296 is, werd als eenheid genomen, waarna de densiteit op iederen afstand van de zon, uitgedrukt in deze eenheid, bekend is.

De gemiddelde densiteit voor den geheelen hemel verandert ongeveer op dezelfde wijze met den afstand tot de zon als KAPTEYN vond. In zone I is de dichtheid op groote afstanden aanzienlijk meer dan het gemiddelde, in zone III, IV en V daarentegen minder.

Met behulp van de gevonden densiteiten hebben we nu uit tabel 4 en de overeenkomstige voor de galactische zones het aantal sterren per volume-eenheid berekend, nadat de dichtheid herleid was tot die voor $\pi = 0''.0296$. Daartoe werd ieder getal in de laatstgenoemde tabellen verminderd met de logarithme van de densiteit der bijbehoorende bolschil. Op deze wijze is b.v. tabel 5 gevonden uit tabel 4.

Uit de juist gevonden tabellen kan nu terstond de lichtkrachtwet voor den geheelen hemel en voor de 5 zones worden afgeleid. De getallen, die tusschen de vetgedrukte lijnen staan, stemmen in iedere kolom goed overeen. We hebben in tabel 5 het gemiddelde van deze getallen genomen (niet van de logarithmen) en de logarithme van het gemiddelde opgegeven in den laatsten regel van de tabel. Bij het middelen werd gelijk gewicht toegekend aan alle getallen, behalve die uit de 4 eerste bolschillen. Deze getallen zijn weinig betrouwbaar, omdat zij klein zijn, maar vooral omdat wij genoodzaakt waren sterren met een eigenbeweging $> 50''$ per eeuw van ons onderzoek uit te sluiten. Daardoor hebben de gevonden lichtkrachtkrommen slechts beteekenis tot $M = 5.0$.

TABEL 3. De aantallen parallaxen voor den geheelen hemel.

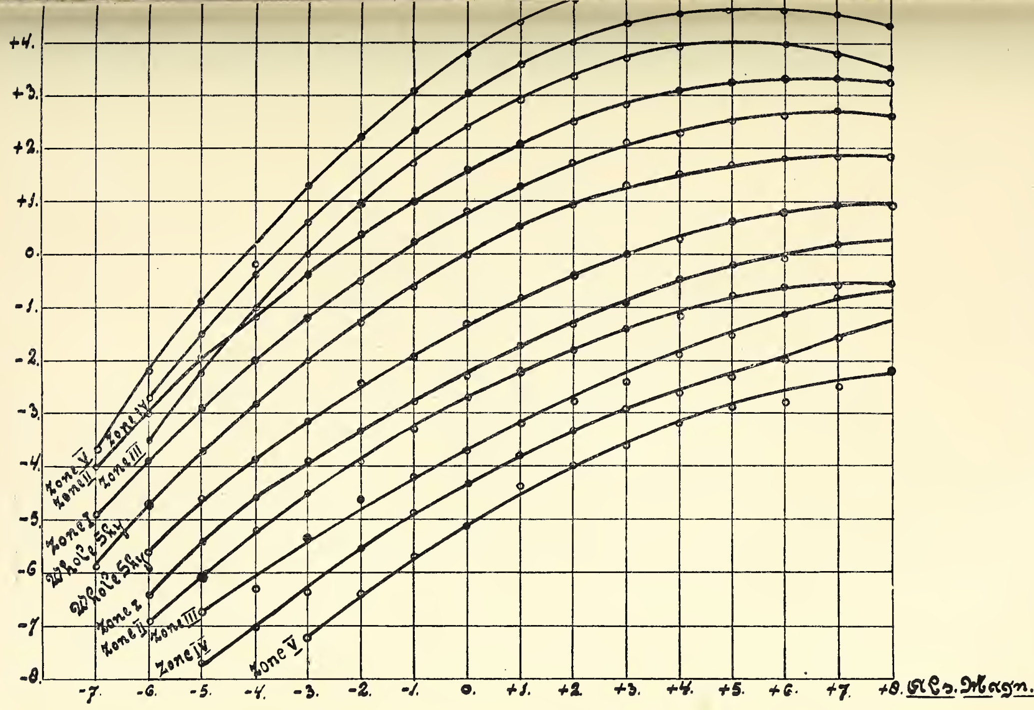
| $\pi$ | Mag. / $\bar{\pi}$ | 2.6 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 | 10.6 | 11.6 | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0″.00000—0″.00100 | | 0 | 1 | 6 | 33 | 228 | 83 | 4325 | 17045 | 55568 | 212210 | 289499 |
| .00100 — .00158 | 0″.00118 | 1 | 2 | 20 | 94 | 469 | 3339 | 9806 | 28249 | 90900 | 245902 | 378782 |
| .00158— .00251 | .00187 | 3 | 6 | 55 | 247 | 1170 | 4603 | 15720 | 45170 | 112684 | 341132 | 520790 |
| .00251— .00398 | .00296 | 7 | 14 | 99 | 435 | 1781 | 6153 | 20643 | 52073 | 119250 | 328492 | 528947 |
| .00398— .00631 | .00469 | 14 | 25 | 147 | 579 | 1957 | 6700 | 18139 | 46380 | 139905 | 234121 | 447967 |
| .00631— .0100 | .00743 | 16 | 38 | 150 | 597 | 1780 | 4721 | 12972 | 28374 | 77002 | 133400 | 259050 |
| .0100 — .0158 | .0118 | 24 | 47 | 146 | 503 | 1430 | 3155 | 6896 | 15180 | 34288 | 43900 | 105569 |
| .0158 — .0251 | .0187 | 21 | 46 | 121 | 389 | 806 | 1030 | 2715 | 5702 | 11082 | 17370 | 39282 |
| .0251 — .0398 | .0296 | 15 | 26 | 65 | 171 | 358 | 678 | 1222 | 1752 | 2806 | 2247 | 9340 |
| .0398 — .0631 | .0469 | 11 | 28 | 56 | 117 | 147 | 553 | 267 | 347 | 465 | 202 | 2193 |
| .0631 — .1000 | .0743 | 6 | 10 | 17 | 27 | 37 | 47 | 62 | 53 | 45 | 47 | 351 |
| .1000 — .158 | .118 | 2 | 2 | 4 | 7 | 7 | 10 | 11 | 5 | 0 | 16 | 64 |
| > .158 | .204 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| | | 121 | 246 | 886 | 3200 | 10171 | 31075 | 92778 | 240330 | 643995 | 1559039 | 2581841 |

TABEL 4. De log. van het aantal sterren per volume-eenheid.

| π \ M | —7.0 | —6.0 | —5.0 | —4.0 | —3.0 | —2.0 | —1.0 | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | 11.0 | 12.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0″.00118 | 3.503 | 3.804 | 4.804 | 5.476 | 6.274 | 7.027 | 7.494 | 7.954 | 8.462 | 8.894 | | | | | | | | | | |
| .00187 | | 4.580 | 4.881 | 5.843 | 6.496 | 7.171 | 7.766 | 8.299 | 8.758 | 9.145 | 9.636 | | | | | | | | | |
| .00296 | | | 5.548 | 5.849 | 6.703 | 7.341 | 7.954 | 8.492 | 9.018 | 9.420 | 9.779 | 0.220 | | | | | | | | |
| .00469 | | | | 6.449 | 6.701 | 7.470 | 8.066 | 8.595 | 9.129 | 9.562 | 9.969 | 0.449 | 0.672 | | | | | | | |
| .00743 | | | | | 7.107 | 7.483 | 8.079 | 8.679 | 9.153 | 9.577 | 0.016 | 0.356 | 0.797 | 1.028 | | | | | | |
| .0118 | | | | | | 7.883 | 8.175 | 8.667 | 9.205 | 9.658 | 0.002 | 0.342 | 0.684 | 1.038 | 1.145 | | | | | |
| .0187 | | | | | | | 8.425 | 8.766 | 9.186 | 9.693 | 0.009 | 0.116 | 0.537 | 0.859 | 1.148 | 1.343 | | | | |
| .0296 | | | | | | | | 8.879 | 9.118 | 9.516 | 9.936 | 0.257 | 0.534 | 0.790 | 0.947 | 1.151 | 1.055 | | | |
| .0469 | | | | | | | | | 9.344 | 9.750 | 0.051 | 0.371 | 0.470 | 1.046 | 0.730 | 0.843 | 0.970 | 0.608 | | |
| .0743 | | | | | | | | | | 9.681 | 9.903 | 0.133 | 0.334 | 0.471 | 0.575 | 0.695 | 0.627 | 0.556 | 0.575 | |
| .118 | | | | | | | | | | | 9.804 | 0.804 | 0.105 | 0.348 | 0.348 | 0.503 | 0.544 | 0.202 | — | 0.707 |
| .204 | | | | | | | | | | | | 9.979 | 9.979 | — | 9.979 | 9.979 | 0.456 | — | — | — |

TABEL 5. De log. van het aantal sterren per volume-eenheid, gereduceerd tot $\pi = 0''.0296$.

| $\pi$ \ M | —7.0 | —6.0 | —5.0 | —4.0 | —3.0 | —2.0 | —1.0 | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | 11.0 | 12.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0″.00118 | 4.141 | 4.442 | 5.442 | 6.114 | 6.912 | 7.665 | 8.132 | 8.592 | 9.100 | 9.532 | | | | | | | | | | |
| .00187 | | 4.976 | 5.277 | 6.239 | 6.892 | 7.567 | 8.162 | 8.695 | 9.154 | 9.541 | 0.032 | | | | | | | | | |
| .00296 | | | 5.741 | 6.042 | 6.896 | 7.534 | 8.147 | 8.685 | 9.211 | 9.613 | 9.972 | 0.413 | | | | | | | | |
| .00469 | | | | 6.527 | 6.779 | 7.548 | 8.144 | 8.573 | 9.207 | 9.634 | 0.047 | 0.527 | 0.750 | | | | | | | |
| .00743 | | | | | 7.153 | 7.529 | 8.125 | 8.725 | 9.159 | 9.623 | 0.062 | 0.402 | 0.843 | 1.074 | | | | | | |
| .0118 | | | | | | 7.902 | 8.194 | 8.686 | 9.224 | 9.677 | 0.021 | 0.361 | 0.703 | 1.057 | 1.164 | | | | | |
| .0187 | | | | | | | 8.426 | 8.767 | 9.187 | 9.694 | 0.010 | 0.117 | 0.538 | 0.860 | 1.149 | 1.344 | | | | |
| .0296 | | | | | | | | 8.879 | 9.118 | 9.516 | 9.936 | 0.257 | 0.534 | 0.790 | 0.947 | 1.151 | 1.055 | | | |
| .0469 | | | | | | | | | 9.269 | 9.675 | 9.976 | 0.296 | 0.395 | 0.971 | 0.655 | 0.768 | 0.895 | 0.533 | | |
| .0743 | | | | | | | | | | 9.932 | 9.846 | 0.384 | 0.585 | 0.722 | 0.826 | 0.946 | 0.878 | 0.807 | 0.826 | |
| .118 | | | | | | | | | | | 0.249 | 0.249 | 0.650 | 0.793 | 0.793 | 0.948 | 0.989 | 0.647 | — | 1.152 |
| .204 | | | | | | | | | | | | 0.712 | 0.712 | — | 0.712 | 0.712 | 1.189 | — | — | — |
| Gemiddeld | 4.141 : | 4.442 | 5.367 | 6.140 | 6.873 | 7.572 | 8.146 | 8.679 | 9.182 | 9.629 | 0.017 | 0.299 | 0.600 | 0.827 | 0.947 | 0.870 : | 1.038 : | 0.647 : | | |



Zone V
Zone IV
Zone II
Zone III
Zone I
Whole Sky
Whole Sky
Zone I
Zone II
Zone III
Zone IV
Zone V
+4. +3. +2. +1. 0. -1. -2. -3. -4. -5. -6. -7. -8.
-7. -6. -5. -4. -3. -2. -1. 0. +1. +2. +3. +4. +5. +6. +7. +8.
Abs. Magn.

Het is van belang op te merken, dat onze uitkomst voor den geheelen hemel volkomen overeenstemt met de lichtkrachtkromme, die KAPTEYN in *Publ. Groningen* N°. 11 vond.

Verder is het merkwaardig, dat de frequentiekrommen, die voor de verschillende zones gevonden zijn, slechts weinig verschillen. We hebben reeds opgemerkt, dat wij hieruit met een zekere waarschijnlijkheid mogen afleiden, dat de lichtkrachtkromme niet verandert met den afstand tot de zon.

In tabel 5 en de overeenkomstige tabellen voor de 5 galactische zones stemmen, zooals boven reeds is medegedeeld, de getallen van iedere kolom met elkaar overeen. Wanneer onze conclusie, dat de freqnentiekromme der absolute magnituden niet met $r$ varieert, juist is, mogen we uit de overeenstemming van de lichtkrachtkrommen der verschillende bolschillen afleiden, dat er geen merkbare absorptie van het licht in de ruimte bestaat.

In de bijgevoegde figuur zijn de gevonden frequentiekrommen geteekend. De 6 onderste lijnen der figuur hebben betrekking op de bepaling der lichtkrachtkrommen, die in dit opstel besproken is, de zes bovenste lijnen op een toepassing van SCHWARZSCHILDS methode op hetzelfde materiaal, waarover in een volgende mededeeling nader bericht zal worden.

De lijn, die onze bepaling van de lichtkrachtkromme voor den geheelen hemel voorstelt, geeft aan de logarithme van het aantal sterren van iedere M per volume-eenheid in de omgeving der zon. Bij de andere krommen hebben we, om vergelijking mogelijk te maken, ieder getal met een constant bedrag vermeerderd.

*Amsterdam*, Juni 1918.

**Meteorologie**. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Correspondent der Afdeeling, den Heer W. VAN BEMMELEN te Batavia: „*De atmospherische Circulatie boven Australazië volgens de loodsballonwaarnemingen te Batavia verricht*". (Slot).

*Bij ontvangst van het „Verslag van de Gewone Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling van* 26 *April* 1918" *bleek aan Schr. dat het slot zijner mededeeling ontbrak. Dit slot, thans terugvertaald uit het afschrift der Engelsche vertaling, volgt hieronder.*

HANN (Lehrb. pg. 487) berekent voor het noordel. halfrond tusschen 10° en 50° breedte, dat de gradient in den winter op 9 km. 2.04 mm. is en op 15 km. 2.90 mm. (op 760 mm. herleid) bedraagt. Ongetwijfeld bestaan er dus in het niveau der hooge Westenwinden (17—24 km.) op het Zuidelijk halfrond nog groote gradienten, die een krachtigen westwervel in stand zullen houden.

Uit het ophouden der hooge Westenwinden op 24 km. en het optreden, boven hen, van den Krakatau-wind, zou dan omgekeerd af te leiden zijn, dat ook de Westwervel, hoogerop, sterk zal afnemen. Er zullen vermoedelijk boven den Westwervel Zuidelijke winden waaien, die bij nadering van den aequator in den stationairen Krakatau-wind zullen overgaan.

Zulke winden, die een aequatorwaartsche component bezitten, heeft men alreeds in het noordelijk halfrond op zeer groote hoogten waargenomen.

Boven Batavia voeren de hooge Westenwinden lucht naar den aequator, want Zuidelijke componenten overheerschen bij hen. Het zelfde mag vermoedelijk, volgens de waarnemingen van BERSON, aangenomen worden het geval te zijn boven Afrika.

Derhalve, zoowel in den Bovenpassaat als in de hooge Westenwinden, vindt toevloeiïng van lucht naar den aequator plaats, wat in overeenstemming is met de aangenomen omkeering van den drukgradient in de lagen tusschen 15 en 19 km. hoogte.

**Natuurkunde**. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer P. G. CATH: „*Over het meten van lage temperaturen. XXIX. Dampspanningen van zuurstof en stikstof ter bepaling van vaste punten op de schaal der temperaturen beneden* 0° *C.*" (Mededeeling N°. 152*d*[1]) uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

§ 1. *Inleiding.* Bij de metingen op welke de Mededeelingen N°. 152*a* en *b*, samen met Prof. KAMERLINGH ONNES, Zitt.versl. Juni en Sept. 1917, en N°. 152*c* samen met Prof. KAMERLINGH ONNES en den Heer J. M. BURGERS, Zitt.versl. Sept. 1917, gedaan, betrekking hadden, bood zich de gelegenheid aan, om, met behulp van de daarbij ingerichte en in werking gebrachte toestellen en meetwerktuigen tot het constant houden en meten der temperaturen, bepalingen van dampspanningen van zuurstof en stikstof te verrichten. KAMERLINGH ONNES en BRAAK (Meded. N°. 107*a*, Zitt.versl. Mei 1908) hadden het kookpunt van zuurstof en een tweetal daar beneden gelegen punten als nieuwe, onder voldoende waarborgen bepaalde, vaste punten op de temperatuurschaal aan de toen bestaande toegevoegd. De bedoelde bepalingen nu konden dienen tot aanvulling van de zooeven genoemde en tot het verkrijgen van eene onafhankelijke, onmiddellijk[2]) op de temperatuurschaal van KAMERLINGH ONNES en zijne medewerkers berustende calibratie van den zuurstof-[3]) en den stikstof-dampspanningsthermometer.

Prof. KAMERLINGH ONNES had de welwillendheid mij uit te noodigen van deze gelegenheid partij te trekken. Ik betuig hem ook hier mijn hartelijken dank voor zijne hulp bij dit onderzoek[4]).

[1]) Deze Mededeeling werd reeds aangeboden in de Zitting van Juni 1917; voor het ter perse gaan is zij op ondergeschikte punten nog een weinig gewijzigd.

[2]) v. SIEMENS (verg. G. HOLST, Meded. N°. 148*a* Zitt.versl. Sept. 1915) bepaalde de temperaturen, bij welke hij de dampspanningen waarnam, met een platinathermometer, waarvan de aanwijzingen in hoofdzaak met behulp van vier calibratiepunten op die van $Pt_{I'}$ van KAMERLINGH ONNES en zijne medewerkers omgerekend waren, in dier voege, dat aansluiting verkregen werd bij het door KAMERLINGH ONNES en BRAAK bepaalde kookpunt van zuurstof.

[3]) Den zuurstofdampspanningsthermometer vindt men veelal toegepast in den vorm, dien STOCK en NIELSEN (Ber. d. Deutschen Chem. Ges. II (1906), p. 2066) daaraan gegeven hebben, en dan gewoonlijk kortweg met den naam van thermometer van STOCK aangeduid. Voor nauwkeurige bepalingen moet men tot voor deze meer geschikte vormen als bijv. de in deze mededeeling beschrevene overgaan. De door STOCK en NIELSEN gegeven schaal eischt belangrijke correcties. (Verg. G. HOLST, Meded. N°. 148*a*)

[4]) Gedeeltelijk is deze mededeeling reeds opgenomen in P. G. CATH, Dissertatie Leiden. 1917, die eenige maanden na de aanbieding van deze mededeeling verscheen; (zie verder noot 1).

§ 2. *Bijzonderheden der bepalingen.* De temperaturen werden bepaald met den heliumthermometer beschreven in Meded. N°. 152*a*; de reductie op de zooveel mogelijk benaderde absolute schaal (AVOGADRO-schaal van helium, zie volgende mededeeling van CATH en KAMERLINGH ONNES) geschiedde op dezelfde wijze als daar.

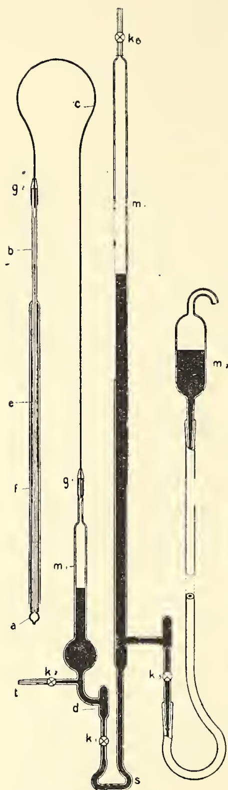



Fig. 1.

De dampspanningstoestel was in hoofzaak van het door KAMERLINGH ONNES en BRAAK in Meded. N°. 107*a* gebruikte model *A*, in het bijzonder is de koperen buis behouden, die dient om te voorkomen, dat ergens in den toestel een lagere temperatuur optreedt, dan in het bolletje waarin zich het vloeibaar gemaakte gas verzamelt en ter plaatse waarvan de temperatuur van het bad wordt gemeten. Er werd even als bij de genoemde proeven partij van getrokken dat de toestel veroorlooft verschillende hoeveelheden gas in het bolletje te verdichten. Wat den manometer betreft, is de wijziging toegepast, die HOLST bij zijne dampspanningsmetingen van chloormethyl (Comm. N°. 144*b* Sept. 1913) aanbracht: het aan het vaste been door een caoutchouc-buis verbonden bewegelijke been is nl., zie fig. 1 [1]), vervangen door een vaste stijgbuis [2]) met daaraan door een caoutchoucbuis verbonden kwikpeer. Deze stijgbuis kan luchtledig gepompt of met een ruimte van constanten druk en barometer verbonden worden door kraan $k_6$. Het slijpstuk *t* dient voor luchtledig pompen, drogen met behulp van een in vloeibare lucht geplaatsten vochtvanger en vullen.

De zuurstof werd uit kaliumpermanganaat ontwikkeld in een

---

[1]) De letters zijn voor het grootste deel dezelfde als in fig. *A* van Comm. N°. 107*a*, waarheen voor de nadere beschrijving verwezen kan worden, verdere toelichting dan in den tekst gegeven, is wel niet noodig.

[2]) Bescherming tegen temperatuurverandering geschiedde door inpakken met wol. De temperatuur van de kwikzuil werd door naast de buis aan het boven en benedeneinde van de kwikzuil opgehangen thermometers bepaald.

toestel, die met een Toepler-pomp ledig gepompt en door uitvriezen met vloeibare lucht gedroogd kan worden. Zij werd in een aan den toestel verbonden, door vloeibare lucht afgekoeld bolletje gecondenseerd, vanwaar zij, alweder met behulp van de luchtpomp, in den dampspanningstoestel werd overgebracht [1]).

De stikstof werd onder toezicht van Prof. VAN ITALLIE, dien ik hier mijn hartelijken dank uitspreek, bereid door den Heer Dr. LEMKES.

§ 3. *Uitkomsten.* Gevonden werd voor *zuurstof*:

TABEL I. Dampspanningen van zuurstof.

| | $\theta$ | $T$ | $p$ in int. c.m. [2]) | $p$ in int. atm. | $p$ berekend | $\Delta T$ O—C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | — 182°.62 C. | 90°.47 K. | 78.663 | 1.0350 | 1.0351 | 0.00 gr. |
| II | 182.88 | 90.21 | 76.560 | 1.0074 | 1.0093 | + 0.02 |
| III | 183.22 | 89.87 | 73.867 | 0.9719 | 0.9725 | + 0.01 |
| IV | 183.91 | 89.18 | 68.776 | 0.9050 | 0.9053 | 0.00 |
| V | 186.91 | 86.18 | 49.330 | 0.6491 | 0.6491 | 0.00 |
| VI | 192.01 | 81.08 | 21.319 | 0.3463 | 0.3463 | 0.00 |
| VII | 195.50 | 77.59 | 16.215 | 0.2138 | 0.2137 | 0.00 |
| VIII | 201.38 | 71.71 | 6.401 | 0.08423 | 0.08398 | — 0.02 |
| IX | 204.52 | 68.57 | 3.611 | 0.04752 | 0.04753 | 0.00 |
| X | 210.72 | 62.37 | 0.959 | 0.01262 | 0.01286 | + 0.08 |

Uit de twee laatste kolommen blijkt, dat de waarnemingen goed worden weergegeven door eene formule van den vorm

$$lg\, p = \frac{A}{T} + B + CT \quad (p \text{ in int. atm.})$$

[1]) Een derde deel van het distillaat werd gebruikt voor spoelen, het tweede derde voor het vullen.

[2]) Ten einde mogelijke verwarring te voorkomen wordt hier door de vermelding „internationale centimeters" uitgedrukt, dat de druk is aangegeven in $^1/_{76}$e deelen van eene internat. atmosfeer of m.a w. als hoogte van een kwikkolom, gemeten niet te Leiden zelf (locale c.m.), maar op een plek der aarde waar 1 int. atm. juist overeenkomt met 76 cm kwik (bij 0° C), d. i. waar $g = g_{\text{Bur. Int.}}$ : 1.0003322 welke waarde als $g_{\text{norm.}}$ wordt beschouwd en thans 980.615 is te stellen (Te Leiden is $g = 981.276$ en 1 intern. atm. = 75.9488 cm.) Vergelijk voor de definitie van internationale atmosfeer: Leiden Comm. Suppl. No. 23. Einh. *a*. Wanneer in deze mededeelingen bij Leidsche waarnemingen van atmosfeer zonder meer gesproken wordt is altijd bedoeld: internationale atmosfeer.

met $A = -419.31$, $B = 5.2365$, $C = -0.00648$, welke Prof. VERSCHAFFELT de vriendelijkheid had te berekenen en volgens welke het normale kookpunt van zuurstof is

$$T = 90°.13 \text{ K.}, \qquad \theta = -182°.96 \text{ C.},$$

terwijl de waarnemingen in de onmiddellijke nabijheid van het kookpunt op zichzelf leveren:

$$T = 90°.14 \text{ K.}, \qquad \theta = -182°.95 \text{ C.}$$

Door KAMERLINGH ONNES en BRAAK werd voor dit kookpunt gevonden $T = 90°.11$ K.[1]) en door HENNING $T = 90°.12$ K.[2]).

TABEL II. Dampspanningen van zuurstof.
Vergelijking met KAMERLINGH ONNES en BRAAK en met v. SIEMENS (corr.).

| $T$ | $p$ (in atm.) (K. O. en B.) | $p$ (in atm.) (v. S. corr.) | $p$ (in atm.) (CATH) | $\Delta T$ (K.O., B.—C.) | $\Delta T$ (v. S.—C.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 90°.69 | 1.0618 | | 1.0583 | −0.035 gr. | |
| 90.47 | | 1.036 | 1.0351 | | −0.01 gr. |
| 90.21 | | 1.010 | 1.0093 | | 0.00 |
| 90.11 | 1.0002 | | 0.9975 | −0.03 | |
| 89.87 | | 0.9742 | 0.9725 | | −0.01 |
| 89.18 | | 0.9059 | 0.9053 | | −0.01 |
| 86.56 | 0.6792 | | 0.6777 | −0.02 | |
| 86.18 | | 0.6500 | 0.6491 | | −0.01 |
| 83.66 | 0.4819 | | 0.4808 | −0.02 | |
| 81.08 | | 0.3463 | 0.3463 | | 0.00 |
| 77.59 | | 0.2137 | 0.2137 | | 0.00 |
| 71.71 | | 0.08390 | 0.08398 | | 0.00 |
| 68.57 | | 0.04695 | 0.04753 | | +0.05 |
| 62.37 | | 0.01272 | 0.01286 | | +0.04 |

[1]) In Comm. N°. 107$a$ wordt opgegeven $T - T_{0°C} = -182°.986$. Er is echter gerekend met 0.0036627 als spanningscoefficient van waterstof bij 1100 mm. vriespuntsdruk, terwijl, wanneer wij $T_{0°C} = 273°.09$ K. stellen en tevens aanvaarden de correcties tot de absolute schaal volgens KAMERLINGH ONNES en BRAAK, daarvoor 0.0036628 moet worden gesteld, zoodat komt —182.98 en $T = 90°.11$ K.

[2]) De door HENNING aan de aflezingen op de schaal van den waterstofthermometer aangebrachte theoretische correctie van BERTHELOT verschilt in dit gebied

In Tabel II zijn de uitkomsten van KAMERLINGH ONNES en BRAAK en die van v. SIEMENS, gelijk deze worden, nadat de aansluiting zijner temperatuurbepalingen op die van KAMERLINGH ONNES en zijne medewerkers volgens HOLST l.c. gecorrigeerd is [1]), vergeleken met de formule, die mijne waarnemingen voorstelt [2]).

Behalve voor de laagste punten blijkt de omrekening van HOLST dus zeer doeltreffend.

Voor *stikstof* werd gevonden:

TABEL III. Dampspanningen van stikstof.

| N°. | $\theta$ | $T$ | $p$ (in int. cm.) | $p$ (in atm.) | $p$ (ber.) | $\Delta T$ $(O—C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | — 188°.88 C. | 84°.21 K. | 159.11 | 2.0942 | 2.0948 | 0.00 gr. |
| II | 190.66 | 82.43 | 133.44 | 1.7558 | 1.7539 | 0.00 |
| III | 193.91 | 79.18 | 93.86 | 1.2350 | 1.2382 | 0.02 |
| IV | 195.84 | 77.25 | 75.19 | 0.9893 | 0.9904 | 0.01 |
| V | 198.26 | 74.83 | 56.13 | 0.7385 | 0.7366 | — 0.02 |
| VI | 201.55 | 71.54 | 36.16 | 0.4758 | 0.4756 | 0.00 |
| VII | 204.69 | 68.40 | 22.837 | 0.30049 | 0.30031 | 0.00 |
| VIII | 208.58 | 64.51 | 12.090 | 0.15908 | 0.15882 | — 0.01 |
| IX | 213.14 | 59.95 | 4.695 | 0.06178 | | |
| X | 215.20 | 57.89 | 2.1882 | 0.03792 | | |

der lage temperaturen nog niet noemenswaard van de experimenteele van KAMERLINGH ONNES en BRAAK. Het blijft niettemin aan bedenking onderhevig de waarde van HENNING als eene afdoende bevestiging van het door KAMERLINGH ONNES en BRAAK gevonden kookpunt te beschouwen, daar in zijne bepaling eene onzekerheid schuilt waarop in Noot 1 bij p. 443 Zitt.versl. Juni 1917, Comm. N°. 152*a* werd gewezen.

[1]) Bij deze correctie stelt HOLST de temperaturen bij de hoogere punten 0.02 en bij het laagste punt 0.01 graad hooger dan KAMERLINGH ONNES en BRAAK opgeven, doordat hij voor de aansluiting zijne interpolatieformule in plaats van de waarnemingen zelf gebruikt. Dit verklaart het verschil der afwijkingen boven aan in de beide kolommen bij op elkaar vallende punten ofschoon v. SIEMENS voor zijne bepalingen van die van KAMERLINGH ONNES en BRAAK in deze buurt uitgaat.

[2]) Tusschen de waarnemingen van TRAVERS, SENTER en JAQUEROD (London Phil. Trans. A. 200 (1902)) en die van KAMERLINGH ONNES en BRAAK bestaat, als in Comm.

De waarnemingen I tot VIII hebben betrekking op vloeibare stikstof, de twee laatste op vaste stikstof. De twee laatste kolommen bewijzen dat voor vloeibare stikstof het verband tusschen dampspanning en temperatuur goed kan worden voorgesteld door een zelfde formule als voor zuurstof, met

$A = -334.64, \quad B = 4.6969, \quad C = -0.00476 \quad (p \text{ in int. atm.})$

volgens welke het normale kookpunt van stikstof is

$$T = 77°.31 \text{ K.} \qquad \theta = -195°.78 \text{ C.}$$

FISCHER en ALT [1]) geven −195.67 op de waterstofschaal, berekend met 0.0036625. Met 0.0036628 komt −195.66 en $\theta = -195°.61$ C. Bij de kleinere afmeting van hun thermometer was eene mindere nauwkeurigheid te verwachten. Zij geven de hunne als ± 0.06 graad. [2])

TABEL IV. Dampspanningen van stikstof.
Vergelijking met v. SIEMENS (corr.) en HAMBURGER en HOLST (corr.).

| $T$ | $p$ in atm. (v. S. corr.) | $p$ in atm. (H. en H.) | $p$ in atm. (CATH) | $\Delta T$ (v. S.—C.) | $\Delta T$ (H.H.—C.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 84°.21 K. | 2.099 | | 2.0948 | −0.02 gr. | |
| 82.43 | 1.756 | | 1.7539 | 0.00 | |
| 80.93* | | 1.4983 | 1.4894 | | −0.06 gr. |
| 79.18 | 1.236 | | 1.2382 | +0.01 | |
| 78.55* | 1.1561 | 1.1561 | 1.1460 | | −0.03 |
| 77.25 | 0.9895 | | 0.9904 | 0.01 | |
| 74.83 | 0.7331 | | 0.7366 | 0.04 | |
| 72.15* | | 0.5222 | 0.5143 | | −0.06 |
| 71.54 | 0.4706 | | 0.4756 | 0.09 | |
| 69.34* | | 0.3484 | 0.3439 | | −0.02⁵ |
| 68.40 | 0.2952 | | 0.30031 | 0.10 | |
| 64.51 | 0.1546 | | 0.15882 | 0.14 | |
| 59.95 | 0.05958 | | 0.06178 | 0.17 | |
| 57.89 | 0.03618 | | 0.03792 | 0.19 | |

N°. 107*a* opgemerkt, een systematisch verschil van 0.10 gr. bij het kookpunt en 0.13 gr. bij de lagere punten (de waarden van KAMERLINGH ONNES en BRAAK zijn lager). Deze waarnemingen zijn dus nog slechts historisch van belang.

[1]) Ann. d. Phys. (4) 9 (1902) p. 1149.

[2]) Deze belangrijke onzekerheid in hunne bepaling zou het verschil met de mijne

De twee waarnemingen voor vaste stikstof geven in de nabijheid van het tripelpunt,

$$log\, p = -\frac{358.73}{T} + 4.7769\,;$$

hetgeen, verbonden met de vergelijking voor vloeibare stikstof, geeft als tripelpunt (d.i. het snijpunt der twee dampspanningskrommen):

$T = 63°.23$ K, $p = 0.1269$ int. atm. $= 9.64$ int. cm.

terwijl v. SIEMENS met inachtneming van de door HOLST gegeven correcties voor dat punt heeft gevonden $T = 63°.25$ $p = 9.35$ cm.

In Tabel IV zijn de uitkomsten van v. SIEMENS, gelijk deze worden, nadat de aansluiting van zijne temperatuurbepalingen op die van KAMERLINGH ONNES en zijne medewerkers volgens HOLST gecorrigeerd is, alsmede de opgaven van HAMBURGER en HOLST waaraan door mij eene correctie is aangebracht [1]), vergeleken met de formule, die mijne waarnemingen voorstelt.

Hier zij nog ter sprake gebracht de aansluiting aan de door CROMMELIN verrichte metingen tusschen het kookpunt en het kritisch punt. [2]) Deze kunnen bevredigend [3]) worden voorgesteld door de formule [4])

$$T\, log\, p = A + B\,(T - T_k) + C\,(T - T_k)^2$$

met $A = 190.86$, $B = 3.9649$, $C = 0.00100$ voor $p$ in int. atm. die ik aan de vriendelijkheid van Prof. VERSCHAFFELT dank.

---

kunnen verklaren; wat de laatste betreft, is niet aan te nemen dat anders dan een klein deel van het verschil in onzekerheid der temperatuurbepaling (± 0.01 graad) gelegen kan zijn.

[1]) De uitkomsten van HAMBURGER en HOLST (Zitt.versl. 30 Oct. 1915) werden verkregen door hun platinathermometer op de dampspanningen van KAMERLINGH ONNES en BRAAK aan te sluiten (verg. noot 1 op pag. 557). Daar zij ook de temperaturen bij de door hen waargenomen zuurstofspanningen opgeven en deze bij 78°.42 K. 0.05 graad boven mijne waarnemingen voor zuurstof liggen, die thans de eenige direkte bepalingen van voldoende nauwkeurigheid in die buurt zijn, heb ik aan de temperaturen van HAMBURGER en HOLST eene correctie van dit bedrag aangebracht. Zij zijn met * gemerkt.

[2]) Comm. N$^0$. 145*d*, Zitt. versl. 30 Dec. 1914.

[3]) Het punt 81°.21 K. laten wij daarbij als door CROMMELIN reeds door [ ] als niet betrouwbaar aangegeven, buiten rekening.

[4]) De aansluiting van deze formule met twee termen van eene ontwikkeling naar $T$ van $T\, log\, p$ staat niet achter bij die met drie termen van eene ontwikkeling naar $\frac{1}{T}$, welke CROMMELIN geeft. Die laatste formule voldoet echter aan de voorwaarde, dat zij bij het kritisch punt den kritischen druk geeft. De thans gegevene geeft $p_k = 32.728$ atm. in plaats van de waargenomene $p_k = 33.49$.

Tabel V geeft de vergelijking van waarneming en berekening.

TABEL V. Dampspanningen van stikstof (CROMMELIN).

| $T$ | $p$ (in atm.) | $p$ calc. II. | $\Delta T (O-C\,\text{II})$ |
|---|---|---|---|
| 125°.96 K. | 33.49 | 32.728 | −0.09 gr. |
| 124.24 | 30.364 | 30.219 | 0.00 |
| 120.98 | 25.889 | 25.892 | 0.06 |
| 117.62 | 21.820 | 21.906 | 0.04 |
| 111.78 | 15.949 | 15.993 | −0.01 |
| 99.51 | 7.3705 | 7.3652 | 0.04 |
| 93.91 | 4.8278 | 4.8467 | −0.06 |
| 90.62 | 3.7248 | 3.7043 | −0.02 |
| 86.21 | 2.5067 | 2.5016 | |

De formule geeft voor $T = 81°.87$ K. $p = 1.6363$ (CROMMELIN)
terwijl $p = 1.6584$ (CATH)

uit de formule, die mijne waarnemingen weergeeft, gevonden wordt. Het verschil van beide waarden (overeenkomende met $\Delta T_{Cr-Ca} = 0.10$ graad) is te groot om nu reeds de waarnemingen boven het kookpunt met die daar beneden in een enkele formule samen te vatten.

**Wiskunde.** — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer N. G. W. H. BEEGER: „*Over de deellichamen van het cirkellichaam der $l^h$-de-machts-wortels uit de eenheid en hunne klassenaantallen.*" (2de gedeelte).

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

We leiden nu eerst een paar theorema's af voor de functie $F$ en voor het karaktersymbool.

*Theorema* I.

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = (-1)^{bu} F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{l^h}}\right).$$

Bewijs:

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2k\pi n i}{l^h}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{l^h-n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2k(l^h-n)i}{l^h}} = \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{-n}{l^h}\right]^{bu} e^{-\frac{2kn\pi i}{l^h}}$$

$$= \left[\frac{-1}{l^h}\right]^{bu} \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{-\frac{2kn\pi i}{l^h}}$$

$$= e^{\frac{2\pi l^{h-1}\left(\frac{l-1}{2}\right)bu\, i}{l^{h-1}(l-1)}} F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)$$

$$= (-1)^{bu} F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{l^h}}\right).$$

*Theorema* II: Als $l^{h'}$ de hoogste macht van $l$ is die op $u$ deelbaar is, dan is

$$\left[\frac{n+l^{h-h'}}{l^h}\right]^u = \left[\frac{n}{l^h}\right]^u.$$

Bewijs: Zij $n + l^{h-h'} \equiv r^{n'} \pmod{l^h}$

dan is dus

$$n \equiv r^{n'} \pmod{l^{h-h'}} \text{ omdat } h' < h$$

Zij nu

$$n \equiv r^{m'} \pmod{l^h} \text{ dus ook } \pmod{l^{h-h'}}$$

dan is

$$r^{m'} \equiv r^{n'} \pmod{l^{h-h'}}$$

zoodat

$$m' \equiv n' . (mod\; l^{h-h'-1}\,(l-1))$$

of

$$n' = m' + l^{h-h'-1}\,(l-1)v.$$

Dus

$$\left[\frac{n+l^{h-h'}}{l^h}\right]^u = e^{\frac{2\pi n' ui}{l^{h-1}(l-1)}} = e^{\frac{2\pi m' ui}{l^{h-1}(l-1)} + \frac{2\pi l^{h-h'-1}(l-1)ui}{l^{h-1}(l-1)}}$$

$$= \left[\frac{n}{l^h}\right]^u . \, e^{\frac{2\pi u l^{h-h'-1}(l-1)i}{l^{h-1}(l-1)}} .$$

De laatste factor $= 1$ omdat $u$ door $l^{h'}$ deelbaar is.

*Theorema* III.

$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = 0$ als de hoogste macht van $l$, die op $k$ deelbaar is, $\neq l^{h'}$ is.

$= \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right)$ als die hoogste macht wel $= l^{h'}$ is.

Bewijs:

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2kn\pi i}{l^h}} = \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{n+l^{h-h'}}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2kn\pi i}{l^h}}$$

volgens theorema II.

$$= e^{\frac{-2k\pi i}{l^{h'}}} \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{n+l^{h-h'}}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2k(n+l^{h-h'})\pi i}{l^h}}$$

$$= e^{\frac{-2k\pi i}{l^{h'}}} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)$$

zoodat

$$\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{l^{h'}}}\right) F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = 0$$

Is nu $k$ door een lagere macht van $l$ deelbaar dan $l^{h'}$ dan volgt hieruit $F = 0$.

Onderstellen we nu verder dat $k$ deelbaar is door een hoogere macht van $l$, $l^{h'+c}$,

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \sum_{n=1}^{l^h} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2kn\pi i}{l^h}} = \sum_{n=1}^{l^{h-h'-c}} + \sum_{n=l^{h-h'-c}+1}^{2l^{h-h'-c}} + \ldots + \sum_{n=(l^{h'+c}-1)\,l^{h-h'-c}+1}^{l^h}$$

Nu is

$$e^{\frac{2k\pi ni}{l^h}} = e^{\frac{2k'\pi ni}{l^{h-h'-c}}} \quad \text{omdat} \quad k = l^{h'+c}\,k'$$

zoodat we krijgen:

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \sum_{n=1}^{l^{h-h'-c}} e^{\frac{2k\pi n i}{l^h}} \sum_{s=0}^{l^{h'+c}-1} \left[\frac{n + s l^{h-h'-c}}{l^h}\right]^{bu}$$

Zij

$$n + s l^{h-h'-c} \equiv r^{s'} \ (mod\ l^h) \quad \text{en} \quad n \equiv r^{n'} \ (mod\ l^h)$$

dan is

$$n \equiv r^{s'} \ (mod\ l^{h-h'-c}) \qquad n \equiv r^{n'} \ (mod\ l^{h-h'-c})$$

dus

$$r^{s'} \equiv r^{n'} \ (mod\ l^{h-h'-c})$$
$$s' \equiv n' \ mod\ \varphi\ (l^{h-h'-c})$$

zoodat

$$s' = n' + v_s\, \varphi\ (l^{h-h'-c}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hieruit volgt:

$$\left[\frac{n + s l^{h-h'-c}}{l^h}\right]^{bu} = e^{2\pi i \frac{n' + v_s \varphi(l^{h-h'-c})}{l^{h-1}(l-1)} b l^{h'} u'}$$

(als $u = l^{h'} u'$)

$$= e^{\frac{2\pi i\, n' bu}{l^{h-1}(l-1)}} \cdot e^{2\pi i \frac{v_s b u'}{l^c}}$$

$$= \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{2\pi i \frac{v_s b u'}{l^c}}$$

dus

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \sum_{n=1}^{l^{h-h'-c}} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2k\pi n i}{l^h}} \sum_{s=0}^{l^{h'+c}-1} e^{2\pi i \frac{v_s b u'}{l^c}} \quad . \quad . \quad (6)$$

Als nu in de laatste som twee waarden van $v_s$ $(mod\ l^c)$ congruent zijn, dan geven deze twee gelijke termen voor deze som. Stel dus dat

$$v_{s_1} \equiv v_{s_2} (mod\ l^c)$$
$$v_{s_1} = v_{s_2} + w l^c.$$

Zij verder

$$s'_1 = n' + v_{s_1} \varphi(l^{h-h'-c}) \quad \text{en} \quad s'_2 = n' + v_{s_2} \varphi(l^{h-h'-c})$$

dan is ook

$$s_1' = n' + (v_{s_2} + w l^c)\ \varphi(l^{h-h'-c})$$
$$s'_1 = n' + v_{s_2} \varphi(l^{h-h'-c}) + w l^c \varphi\ (l^{h-h'-c})$$
$$s'_1 = s'_2 + w l^c \varphi(l^{h-h'-c}).$$

Verder is

$$n + s_1 l^{h-h'-c} \equiv r^{s_1'} \quad \text{en} \quad n + s_2 l^{h-h'-c} \equiv r^{s_2'} \ (mod\ l^h)$$

dan is ook

$$n + s_1 l^{h-h'-c} \equiv r^{s_2' + wl^c \varphi(l^{h-h'-c})}$$

$$\equiv r^{s_2'} \cdot r^{wl^c \varphi(l^{h-h'-e})}$$

$$\equiv (n + s_2 l^{h-h'-e}) \cdot r^{wl^c \varphi(l^{h-h'-c})}$$

en omdat

$$r^{l^c \varphi(l^{h-h'-c})} = r^{l^{h-h'-1}(l-1)} \equiv 1 \ (mod\ l^{h-h'}),$$

volgt hieruit

$$n + s_1 l^{h-h'-c} \equiv n + s_2 l^{h-h'-c} \ (mod\ l^{h-h'})$$

dus

$$s_1 \equiv s_2 \ (mod\ l^c)$$

Ten slotte merken we nog op dat voor twee verschillende termen van $\sum\limits_s$ uit (6) de waarden $v_s$ niet gelijk zijn, want stel dat voor twee getallen $s_1$ en $s_2$ de $v$'s wel gelijk waren, dan zou volgens (5) ook $s_1' = s_2'$, zoodat

$$n + s_1 l^{h-h'-c} \equiv r^{s'} \quad \text{en} \quad n + s_2 l^{h-h'-c} \equiv r^{s'}$$

dus

$$s_1 l^{h-h'-c} \equiv s_2 l^{h-h'-c} \ (mod\ l^h)$$
$$s_1 \equiv s_2 \ (mod\ l^{h'+c})$$

en dit kan niet omdat de som $\sum\limits_s$ maar loopt tot $s = l^{h'+c} - 1$.

Uit dit alles volgt nu dat $\Sigma$ gelijk is aan $\frac{l^{h'+c}}{l^c} \times$ de som van alle $l^c$-de machts-wortels uit de eenheid. Deze som is gelijk aan nul, zoodat is aangetoond

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = 0.$$

We gaan nu over tot het bewijs van 't tweede deel van het theorema:

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \sum_n \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2kn\pi i}{l^h}} = \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \sum_n \left[\frac{nk/l^{h'}}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2kn i}{l^h}}$$

omdat $k/l^{h'}$ niet door $l$ deelbaar is, volgens ondersteld. Hieruit volgt verder:

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \sum_n \left[\frac{nk/l^{h'}}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2nk/l^{h'} \pi i}{l^{h-h'}}}.$$

Omdat $k/l^{h'}$ niet deelbaar is door $l$, doorloopt $nk/l^{h'}$ tegelijk met $n$ een gereduceerd restsysteem, zoodat

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \sum_n \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2n\pi i}{l^{h-h'}}}$$

waarmede het theorema bewezen is.

*Theorema* IV.

Als de hoogste macht van $l$ die in $u$ opgaat $l^{h'}$ is, dan is

$$F'\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) = l^{h'+h} (-1)^{b\frac{u}{l^{h'}}}$$

waarbij $F'$ aanduidt dat men $u$ vervangen heeft door $-u$ in $F$.

Is $u = \frac{1}{2} a l^{h-1}$ $a$ even, dan is $F(e^{\frac{2\pi i}{l}}) = l^{h-\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{4}(l-1)^2}$

Bewijs:

$$F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) = \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2\pi n i}{l^{h-h'}}} = \sum_{n=1}^{l^h-1} \left[\frac{nk}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2\pi n k i}{l^{h-h'}}}$$

als $k$ relatief priem is met $l$, want dan doorloopt $nk$ tegelijk met $n$ een gereduceerd restsysteem.

Hieruit volgt

$$\left[\frac{k}{l^h}\right]^{-bu} F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) = \sum_{n=1}^{l^h} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} e^{\frac{2\pi k n i}{l^{h-h'}}}$$

We vermenigvuldigen beide leden met $e^{\frac{2\pi k i}{l^{h-h'}}}$ en nemen de som over alle waarden waarvoor $k$ niet door $l$ deelbaar is en vinden dan

$$F'\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) = \sum_{n=1}^{l^h} \left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} \sum_k e^{\frac{2\pi k(n+1)i}{l^{h-h'}}}.$$

De som over $n$ splitsen we in drie deelen:

1°. de som over alle getallen $n$ waarvoor $n+1$ deelbaar is door $l^{h-h'}$,

2°. de som over alle getallen $n$ waarvoor $n+1$ juist door $l^{h-h'-1}$ deelbaar is,

3°. de som over alle getallen $n$ waarvoor $n+1$ door een lagere macht van $l$ deelbaar is of ondeelbaar is door $l$.

Bij deze indeeling hebben we geen enkel getal overgeslagen. We beschouwen nu ieder dier sommen afzonderlijk:

1°. In dit geval is iedere term van $\sum_k$ gelijk aan de eenheid en dus is $\sum_k = \varphi(l^h)$. De getallen $n+1$ die hierbij behooren, zijn

$$l^{h-h'},\quad 2l^{h-h'}, \ldots\ldots l^{h'} \cdot l^{h-h'}$$

Dus

$$n = -1 + l^{h-h'}v_n \qquad v_n = 1, 2, \ldots\ldots l^{h'}$$

$$\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} = e^{\frac{2\pi bun'i}{\varphi(l^h)}} \quad \text{als} \quad n \equiv r^{n'} \ (mod\ l^h) \ \text{dus}$$

$$-1 \equiv r^{n'} \ (mod\ l^{h-h'})$$

waaruit volgt

$$n' \equiv 0 \ (mod\ \tfrac{1}{2}\varphi(l^{h-h'}))$$

dus

$$\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} = e^{2\pi i \frac{bl^{h'}u' \cdot {}^{1}/_{2}\varphi(l^{h-h'})w_n}{\varphi(l^h)}} = (-1)^{bu'}$$

In de som 1°. komen, zooals reeds is aangegeven, $l^{h'}$ termen voor, zoodat de waarde gelijk is aan

$$(-1)^{bu'}\, l^{h'}\, \varphi\,(l^h)$$

2°. In dit geval is

$$e^{\frac{2\pi k(n+1)i}{l^{h-h'}}} = l\text{-de machts-wortel uit de eenheid.}$$

$\Sigma_k$ stelt dus voor $\frac{\varphi(l^h)}{\varphi(l)} \times$ de som derprimitieve $l$-de-machts-wortels uit de eenheid. En deze laatste $= -1$, zoodat

$$\sum_k = -\frac{\varphi\,(l^h)}{\varphi\,(l)}$$

$\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} = l$-de-machts-wortel uit de eenheid, want de getallen $n+1$ die bij dit geval behooren zijn $n + 1 = l^{h-h'-1}\, v_n$ waarbij $v_n$ alle getallen doorloopt die niet door $l$ deelbaar zijn en die $< l^{h'+1}$. Dat zijn er $\varphi\,(l^{h'+1})$. Dus

$$n = -1 + l^{h-h'-1}\, v_n$$

Op dezelfde wijze als onder 1°. bewijst men nu dat $\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu}$ een $l$-de machts-wortel is uit 1 of $-1$ alnaardat $bu'$ even of oneven is. Omdat in de som $\Sigma_k\, \varphi\,(l^{h'+1})$ termen voorkomen, zal iedere primitieve $l$-de-machts-wortel $\frac{\varphi\,(l^h)}{\varphi\,(l)}$ malen voorkomen, terwijl de som dier wortels $= \mp 1$ is. Dus de som die bij 2°. behoort, heeft de waarde

$$-\frac{\varphi\,(l^h)}{\varphi\,(l)} \times \mp \frac{\varphi\,(l^{h'+1})}{\varphi(l)} = l^{h'} \cdot l^{h-1}\,(-1)^{bu'}.$$

3°. De som $\Sigma_k$ kan men verdeelen in een aantal malen de som

der primitieve $l^{h-h'-c}$-de-machts-wortels, waarbij $c > 1$. Deze laatste som $= 0$ dus is ook $\sum_n$ die bij dit geval behoort, $= 0$.

Resumeerende, vindt men dus, na een kleine berekening, de uitkomst die in 't theorema wordt opgegeven.

Bewijs van het tweede deel:

$$F\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) = \sum_n \left[\frac{n}{l^h}\right]^{\frac{1}{2}abl^{h-1}} e^{\frac{2\pi ni}{l}} =$$

$$= \sum_n (-1)^{ind\,n}\, e^{\frac{2\pi ni}{l}} = \sum_{t=1}^{\varphi(l^h)} (-1)^t\, e^{\frac{2\pi r_t i}{l}}$$

als $r_t$ de kleinste positieve rest is van $r^t$ (mod $l$)

$$F\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) = \sum_{t=1}^{l-1} + \sum_{t=l}^{2(l-1)} + \ldots \text{ Nu is } r_{t+(l-1)} = r_t \text{ dus}$$

$$= l^{h-1} \cdot \sum_{t=1}^{l-1} (-1)^t\, e^{\frac{2\pi r_t i}{l}}$$

Wanneer men de laatste som splitst in twee sommen voor $t =$ even en $t =$ oneven en opmerkt dat $r_{2t} =$ kwadraatrest en $r_{2t+1} =$ kwadratische nietrest, dan herleid men die som tot een som van Gauss, waarvan de waarde is

$$l^{\frac{1}{2}}\, i^{\frac{1}{4}(l-1)^2}$$

waarmede het bewijs geleverd is.

Uit (3) volgt nu dat het klassenaantal $H$ [1]) gelijk is aan $\frac{1}{\varkappa}$ maal het product over $u = 1, 2, \ldots a l^{h-1} - 1$ van (4). Het verdere verloop van de herleiding blijkt nu geheel verschillend te worden al naar dat $b$ even of oneven is. We zullen daarom beide gevallen geheel afzonderlijk beschouwen.

1°. *Het aantal klassen voor de deellichamen waarvan de relatieve graad $b$ even is. Het zijn de reëele deellichamen.*

Volgens theorema I is nu

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = F\left(e^{\frac{-2k\pi i}{l^h}}\right)$$

dus

$$\sum_{k=1}^{l^h-1} kF\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) = \sum_{k=1}^{l^h-1} (l^h - k)\, F\left(e^{\frac{2\pi(l^h-k)i}{l^h}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{l^h-1} l^h F\left(e^{\frac{-2\pi ki}{l^h}}\right) - \sum_{k=1}^{l^h-1} kF\left(e^{\frac{-2\pi ki}{l^h}}\right)$$

[1]) In 't eerste gedeelte is dit klassenaantal, minder duidelijk, door $h$ voorgesteld.

$$= l^h \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) - \sum_{k=1}^{l^h-1} kF\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right)$$

dus

$$2\sum_{k=1}^{l^h-1} k\,F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) = l^h \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right)$$

Maar

$$\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) = \sum_{k=1}^{l^h-1}\sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu}\left(e^{\frac{2\pi kni}{l^h}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu}\sum_{k=1}^{l^h-1} e^{\frac{2\pi kni}{l^h}}$$

$$= \sum_{n=1}^{l^h-1}\left[\frac{n}{l^h}\right]^{bu} . -1 = 0$$

Hierdoor is dus ook aangetoond dat

$$\sum_k k\,F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) = 0.$$

Dus

$$H = \frac{1}{\varkappa}\,\Pi'_u\; \frac{1}{l^h}\left[\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) \log \frac{e^{\frac{k\pi i}{l^h}} - e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}}{i}\right]$$

of

$$H = \frac{(-1)^{c-1}}{\varkappa l^h (a l^{h-1}-1)}\,\Pi'_u \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) \log A_k$$

waarbij

$$A_k = \frac{e^{\frac{k\pi i}{l^h}} - e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}}{i} = i\; e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)$$

Het in 't rechterlid optredende product splitsen we in verschillende andere producten:

1°. over alle waarden van $u$ die door $l$ deelbaar zijn

2°. over alle waarden van $u$ die door $l$ deelbaar zijn, maar niet door $l^2$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

ten slotte over alle waarden van $u$ die door $l^{h-1}$ deelbaar zijn.

Beschouwen we nu de waarden van $u$ die juist door $l'$ deelbaar zijn, waaronder we dus alle partiëele producten samenvatten. Door

toepassing van theorema III vinden we:

$$\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{l^h}}\right) \log A_k = F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-h'}}}\right) \sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-ub} \log A_k$$

waarbij, in 't rechterlid, $k$ alle getallen $< l^h$ doorloopt, die juist door $l^{h'}$ deelbaar zijn. De in het rechterlid voorkomende som herleiden we weer tot een som die over alle waarden van $k$ loopt, die niet door $l$ deelbaar zijn; daartoe bedenken we dat, als $k$ juist deelbaar is door $l^{h'}$ en $k = l^h \,.\, k'$:

$$A_k = i\, e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = i\, e^{-\frac{k\pi i}{l^h}}\left(1 - e^{\frac{2\pi k' i}{l^h}}\right)\left(1 - e^{\frac{2\pi(k' + l^{h-h'})}{l^h}}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(1 - e^{\frac{2\pi(k' + (l^{h'}-1)\, l^{h-h'})\, i}{l^h}}\right)$$

$$i\, e^{\frac{k\pi i}{l^h}} = i^{l^{h'}}\, e^{-\frac{\pi k' i}{l^h}} \,.\, e^{-\frac{\pi(k' + l^{h-h'})i}{l^h}} \ldots \, e^{-\frac{\pi(k' + (l^{k'}-1)\, l^{h-h'})i}{l^h}}$$

Uit deze beide gelijkheden volgt:

$$A_k = A_{k'} \,.\, A_{k'+l^{h-h'}} \cdot A_{k'+2l^{h-h'}} \ldots A_{k'+(l^{h'}-1)l^{h-h'}}$$

Hieruit volgt:

$$\sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \log A_k = \sum_k \left[\frac{k'}{l^h}\right]^{-bu} (\log A_{k'} + \log A_{k'+l^{h-h'}} + A_{k+(l^{h'}-1)l^{h-h'}})$$

en volgens II:

$$= \sum_{k'} \left[\frac{k'}{l^h}\right]^{-bu} \log A_{k'} + \sum_{k'} \left[\frac{k' + l^{h-h'}}{l^h}\right]^{-bu} \log A_{k'+l^{h-h'}} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k'} \left[\frac{k' + (l^{h'}-1)l^{h-h'}}{l^h}\right]^{-bu} \log A_{k'+(l^{h'}-1)\, l^{h-h'}}$$

De oorspronkelijke som loopt over alle getallen $k$ die juist door $l^{h'}$ deelbaar zijn. Dat zijn er

$$\frac{l-1}{l^{h'}}\, l^{h-1} = (l-1) \,.\, l^{h-h'-1}$$

Deze eene som is nu vervangen door $l^{h'}$ andere sommen, en kan dus geschreven worden als één som over $l^{h'} \,.\, (l-1)\, l^{h-h'-1} = (l-1) l^{h-1}$ getallen. Dit is juist het aantal getallen $< l^h$ die niet door $l$ deelbaar zijn. Verder zijn geen twee dier getallen $(mod\ l^h)$ congruent, want was bijv.

$$k' + il^{h-h'} \equiv k' + jl^{h-h'} \ (mod\ l^h)$$

dan zou

$$i \equiv j \ (mod\ l^{h'})$$

en dat kan niet omdat $i$ en $j$ beide $< l^{h'}$ zijn.

Ten slotte blijkt dus dat

$$\sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} log\, A_k = \sum_k \left[\frac{k}{l^h}\right]^{-bu} log\, A_k$$

waarbij de som in het rechterlid loopt over alle getallen $k < l^h$ die niet door $l$ deelbaar zijn. We hebben dus

$$H = \frac{(-1)^{(c-1)}}{\varkappa\, l^{h(al^{h-1}-1)}} \prod_{u_1} F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right) . \prod_{u_2} F\left(e^{\frac{2\pi i}{l^{h-1}}}\right) \ldots \prod_{u_{lh}} F\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) \times$$

$$\times \prod_u{}' \sum_k \left[\frac{k}{l^h}\right]^{-bu} log\, A_k.$$

Hierbij loopt het eerste product over alle waarden $u_1$ die op de voorlaatste bladzij onder 1° genoemd zijn, enz. We beschouwen één zoo'n product n.l. dat loopt over alle waarden van $u$ die juist door $l^{h'}$ deelbaar zijn. Door de factoren twee aan twee bij elkaar te nemen, kunnen we theorema IV toepassen omdat

$$\left[\frac{n}{l^h}\right]^{-bu} = \left[\frac{n}{l^h}\right]^{b(al^{h-1}-u)}$$

en omdat, als $u$ door $l^{h'}$ deelbaar is, ook $al^{h-1}-u$ dit is. Men vindt dus voor telkens 2 zulke factoren $l^{h+h'}$. 't Aantal factoren is gelijk aan 't $\frac{1}{2}$ aantal getallen $u < al^{h-1}-1$ die juist door $l^{h'}$ deelbaar zijn. Dat aantal is gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}(l-1)\, al^{h-h'-2}$$

De waarde van het beschouwde product is derhalve

$$l^{\frac{1}{2}(h+h')(l-1)al^{h-h'-2}}.$$

Dit geldt voor $h' = 0, 1, \ldots . h-2$.

Voor 't geval $h' = h-1$ wordt het aldus: er zijn in 't bij dit geval behoorend product $a-1$ factoren, want er zijn $a-1$ getallen $< al^{h-1}-1$ die door $l^{h-1}$ deelbaar zijn. De waarde van dit product is dus

$$l^{(2h-1)\frac{a-2}{2}}$$

Het product van alle voorkomende producten is dus

$$l^{\frac{1}{2}h(l-1)al^{h-2} + \frac{1}{2}(h+1)(l-1)al^{h-3} + \ldots + \frac{1}{2}(2h-2)(l-1)a + (2h-1)\frac{a-1}{2}}$$

$$= l^{\frac{1}{2}h\,al^{h-1} + \frac{1}{2}a\frac{l^{h-1}-1}{l-1} - h + \frac{1}{2}}$$

en

$$H = \frac{(-1)^{al^{h-1}} - 1}{\underset{\varkappa l}{\frac{1}{2} h a l^{h-1} - \frac{1}{2} a \frac{l^{h-1}-1}{l-1} - \frac{1}{2}}} - \Pi'_{u} \sum_{k=1}^{l^h} \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} \log A_k$$

We weten verder dat in 't algemeen [1])

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{w|\sqrt{D}|}{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R}$$

Hierbij is $w = 2$ want $w =$ aantal wortels uit de eenheid die in 't lichaam voorkomen. Omdat 't lichaam reëel is, zijn dit alleen $+1$ en $-1$. $r_2 = 0$ $r_1 = al^{h-1}$. Het grondgetal $D$ is bepaald in theorema 5. $R$ is de regulator. Door dit alles in te voeren vindt men dat de macht van $l$ verdwijnt en dat

$$H = \frac{(-1)^{al^{h-1}} - 1}{2^{al^{h-1}} - 1} \cdot \frac{\prod_{u=1}^{al^{h-1}-1} \sum_{k=1}^{l^h} \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} \log A_k}{R} \quad . \quad . \quad (7)$$

Men kan nu het product nog in een determinantvorm schrijven door een bekend theorema toe te passen:

$$\sum_k \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} \log A_k = \sum e^{\frac{2\pi bu\, ind\, k}{l^{h-1}(l-1)}} \log A_k$$

$k$ doorloopt de getallen die $< l^h$ en die niet door $l$ deelbaar zijn. Dan doorloopt $ind\, k$ alle getallen van 1 tot $\varphi(l^h) = l^{h-1}(l-1)$. Wanneer we dus stellen $ind\, k = t$, dan is $r^t \equiv k \pmod{l^h}$, zoodat bovenstaande som den volgenden vorm aanneemt:

$$\sum_{t=1}^{\varphi(l^h)} e^{\frac{2\pi bu ti}{l^{h-1}(l-1)}} \log A_{r^t} = \sum_{t=1}^{\varphi(l^h)} e^{\frac{2\pi uti}{al^{h-1}}} \log A_{r^t}$$

$$= \sum_{t=1}^{al^{h-1}} + \sum_{t=al^{h-1}+1}^{2al^{h-1}} + \ldots\ldots + \sum_{t=(b-1)al^{h-1}+1}^{bal^{b-1}}$$

$$= \sum_{t=1}^{al^{h-1}} + \sum_{t=1}^{al^{h-1}} e^{\frac{2\pi uti}{al^{h-1}}} \log A_{r^{t+al^{h-1}}} + \ldots + \sum^{al^{h-1}} e^{\frac{2\pi uti}{al^{h-1}}} \log A_{r^{t+(b-1)al^{h-1}}}$$

$$= \sum_{t=1}^{al^{h-1}} e^{\frac{2\pi uti}{al^{h-1}}} \log A_{r^t} \cdot A_{r^{t+al^{h-1}}} \ldots\ldots A_{r^{t+(b-1)al^{h-1}}}$$

---

[1]) H. p. 229.

We stellen

$$A_t = e^{\frac{\pi i}{l^h}(r^t + \dots + r^{t+(b-1)al^{h-1}})} \; i^b(1-Z^{r^t})(1-Z^{r^{t+al^{h-1}}})\dots(1-Z^{r^{t+(b-1)al^{h-1}}})$$

$$= i^b \,.\, e^{\pi i \,.\, r^t \,.\, g} \,.\, (1-Z^{r^t})(1-Z^{r^{t+al^{h-1}}}) \dots (1-Z^{r^{t+(b-1)al^{h-1}}}).$$

waarbij $g$ een geheel getal is.

Verder is [1])

$$\prod_{u=1}^{al^{h-1}-1} \sum_{t=1}^{al^{h-1}} e^{\frac{2\pi uti}{al^{h-1}}} \log A_t = \prod_{u=1}^{al^{h-1}} e^{\frac{2\pi ui}{al^{h-1}}} \sum_{t=1}^{al^{h-1}} e^{\frac{2\pi u(t-1)i}{al^{h-1}}} \log A_t =$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi i}{al^{h-1}}(1+2+\dots+al^{h-1}-1)}}{\log A_1 + \dots + \log A_{al^{h-1}}} \begin{vmatrix} \log A_1 & \log A_2 & \dots & \log A_{al^{h-1}} \\ \log A_{al^{h-1}} & \log A_1 & \dots & \log A_{al^{h-1}-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \log A_2 & \log A_3 & \dots & \log A_1 \end{vmatrix}$$

Deze determinant wordt herleid door eerst iedere kolom, te beginnen met op één na de laatste, te verminderen met de voorafgaande; ten slotte vermindert men de eerste kolom met de laatste. Nu tellen we alle rijen bij de laatste op. Het blijkt dan dat alle elementen van de onderste rij $= 0$ worden, behalve het laatste element dat juist wordt $\log A_1 + \log A_2 + \dots + \log A_{al^{h-1}}$. Door de determinant nu te ontwikkelen naar de elementen van de onderste rij, valt de factor die vóór den determinant staat, blijkbaar weg. De elementen van den determinant zijn nu van den vorm

$$\log \frac{A_t}{A_{t-1}} = \log e^{\frac{\pi i}{l^h}(r^t + r^{t+c} + \dots + r^{t+(b-1)c}) - (r^{t-1} + \dots)} \times$$

$$\frac{\times (1-Z^{r^t})(1-Z^{r^{t+c}}) \dots\dots (1-Z^{r^{t+(b-1)c}})}{(1-Z^{r^{t-1}}) \dots\dots\dots (1-Z^{r^{t-1+(b-1)c}})}$$

De exponent wordt

$$(r^t - r^{t-1}) \frac{(1 + r^{al^{h-1}} + \dots + r^{(b-1)al^{h-1}})}{l^h}$$

De breuk is een geheel getal en $r^t - r^{t-1}$ is even.
Dus

$$\log \frac{A_t}{A_{t-1}} = \log \frac{(1-Z^{r^t})(1-Z^{r^{t+c}}) \dots\dots (1-Z^{r^{t+(b-1)c}})}{(1-Z^{r^{t-1}}) \dots\dots\dots (1-Z^{r^{t-1+(b-1)c}})}$$

[1]) Deze herleiding is een toepassing van de bekende uitdrukkingen van den norm van een algebraïsch getal. Men zie ook bijv. BALTZER. Th. u. Anw. der Det. bl. 98.

De factoren 2 die vóór het product in (7) staan, brengen we nu in de termen van den determinant. De termen worden daardoor $\log \varepsilon_t$ in plaats van $\log \varepsilon_t^2$. Door nu nog de noodige rijen te verwisselen krijgt men 't gewenschte resultaat.

2°. *Het klassenaantal voor b oneven, dus voor de imaginaire deellichamen.*

Uit theorema I volgt voor dit geval

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = (-1)^u F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)$$

Daarom splitsen we het product, dat van (4) moet genomen worden, in twee deelen: 1°. over alle oneven waarden van $u$; 2°. over de even waarden van $u$.

Voor $u$ even is

$$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)$$

zoodat men (4) in dit geval op dezelfde wijze herleiden kan als voor $b$ = even is geschied.

Voor dit product vindt men dus

$$\prod_{u \text{ even}}^{\leq a l^{h-1}-1} - \frac{1}{l^h} \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) \log A_k$$

Voor $u$ oneven is, evenals vroeger,

$$\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) = 0$$

en verder is

$$\sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) \log A_k = \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2(l^h-k)\pi i}{l^h}}\right) \log A_{l^h-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) \log A_k = - \sum_{k=1}^{l^h-1} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right) \log A_k$$

waaruit volgt dat deze som = 0 is. Voor het product over $u$ oneven krijgen we dus

$$\sum_{u \text{ oneven}}^{\leq a l^{h-1}-1} + \frac{\pi i}{l^h} \sum_{k=1}^{l^h-1} k \, F\left(e^{\frac{2k\pi i}{l^h}}\right)$$

Om het getal $\frac{1}{\varkappa}$ te bepalen, merken we op dat 't lichaam imaginair

is, en omdat het een lichaam van Galois is, zijn alle geconjugeerde lichamen ook imaginair, zoodat $r_1 = 0$ en $r_2 = \frac{1}{2} a l^{h-1}$; verder is weer $w = 2$ (als $b \neq 1$ is). Dit alles invoerende, vindt men

$$H = \frac{|\sqrt{D}| \cdot \prod\limits_{u \text{ oneven}} \frac{\pi i}{l^{2h}} \sum\limits_k k F\left(e^{\frac{2\pi k i}{l^h}}\right)}{2^{\frac{1}{2} a l^{h-1} - 1} \pi^{\frac{1}{2} a l^{h-1}}} \cdot \frac{\prod\limits_{u \text{ even}} \frac{-1}{l^h} \sum\limits_k F\left(e^{\frac{2\pi k i}{l^h}}\right) \log A_k}{R} . \tag{8}$$

De factoren van de beide producten worden op dezelfde wijze herleid als voor het geval dat $b$ even is. In 't eerste product komen dan de factoren voor van de gedaante

$$S = \sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} k$$

waarbij $u$ juist door $l^{h'}$ deelbaar is en $k$ alle getallen doorloopt die juist door $l^{h'}$ deelbaar zijn. Men herleidt deze som als volgt:

$$S = l^{h1} \sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \frac{k}{l^{h'}} = \sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \frac{k}{l^{h'}} + \sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} \left(\frac{k}{l^{h1}} + l^{h-h'}\right) + \ldots +$$
$$+ \sum_k \left[\frac{k/l^{h'} + (l^{h'} - 1) l^{h-h'}}{l^h}\right]^{-bu} \left(\frac{k}{l^{h'}} + (l^{h'} - 1)\, l^{h-h}\right) -$$
$$- \{l^{h-h'} + 2\, l^{h-h'} + \ldots + (l^{h'} - 1)\, l^{h-h'}\} \sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu}$$

volgens theorema 11. Nu is

$$\sum_k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} = 0$$

omdat het eenige malen de som is van alle $(l-1)\, l^{h-h'-1}$-de machtswortels uit de eenheid. Geen twee der getallen $k/l^{h'} - i\, l^{h-1}$ zijn $(mod\ l^h)$ congruent. Geen dier getallen is deelbaar door $l$ en 't zijn evenveel getallen als er getallen zijn $< l^h$ die niet door $l$ deelbaar zijn. Dus

$$\sum_k k \left[\frac{k/l^{h'}}{l^h}\right]^{-bu} = \sum_k k \left[\frac{k}{l^h}\right]^{-bu}$$

waarbij in de laatste som $k$ alle getallen doorloopt die $< l^h$ en die niet door $l$ deelbaar zijn.

Na herleiding van alle factoren vindt men dan, als men in aanmerking neemt dat $a$ even is, (omdat $b$ oneven is) en dat het eerste product $\frac{1}{2} a l^{h-1}$ factoren bevat en 't tweede $\frac{1}{2} a l^{h-1} - 1$:

$$H = \frac{(-1)^r\, i^s \cdot \prod\limits_{u \text{ oneven}} \sum\limits_{k=1}^{l^h - 1} \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} k}{2^{\frac{1}{2} a l^{h-1} - 1}\, l^{\frac{1}{2} h a l^{h-1}}} \; \frac{\prod\limits_{u \text{ even}} \sum\limits_{k=1}^{l^h - 1} \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} \log A_k}{R}$$

De sommen, die in den eersten factor optreden, kunnen als volgt herleid worden:

$$S = \sum_{k=1}^{l^h} \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} k = \sum_k e^{\frac{2\pi\, bu\, ind\, ki}{l^{h-1}(l-1)}} k$$

Stel $ind\, k = t$ dan is $k \equiv r^t \equiv r_t (mod\, l^h)$ als $r_t$ de kleinste positieve rest van $r^t\, (mod\, l^h)$ voorstelt.

$$S = \sum_{k=1}^{l^{h-1}(l-1)} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} r_t.$$

Men kan deze som splitsen in eenige andere die alle loopen van $k = 1$ tot $k = a l^{h-1}$ en vindt dan

$$S = \sum_{t=1}^{a l^{h-1}} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} \sum_{j=0}^{b-1} r_{t+j\, a l^{h-1}}$$

Gemakkelijk toont men aan dat de laatste som van het rechter lid deelbaar is door $l^h$, voor al de waarden van $t$.

Nu de som uit het tweede product:

$$\sum_{k=1}^{l^h-1} \left[\frac{k}{l^h}\right]^{bu} log\, A_k = \sum e^{\frac{2\pi u i\, ind\, k}{a l^{h-1}}} log\, A_k =$$

$$= \sum_{t=1}^{\varphi(l^h)} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} log\, A_{r^t} = \sum_{t=1}^{a l^{h-1}} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} log\, \mathrm{A}_t =$$

$$= \sum_{t=1}^{\frac{1}{2} a l^{h-1}} + \sum_{t=\frac{1}{2} a l^{h-1}+1}^{a l^{h-1}} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{2} a l^{h-1}} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} log\, \mathrm{A}_t + \sum_{t=1}^{\frac{1}{2} a l^{h-1}} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} log\, \mathrm{A}_{t+\frac{1}{2} a l^{h-1}}$$

(omdat $u$ even is)

$$= \sum_{t=1}^{\frac{1}{2} a l^{h-1}} e^{\frac{2\pi u t i}{a l^{h-1}}} log\, \mathrm{A}_t \mathrm{A}_{t+\frac{1}{2} a l^{h-1}}$$

Op dezelfde wijze als voor het geval dat $b$ even is, is geschied, wordt nu het product tot een determinant herleid. Wanneer men de factoren 2 die in den noemer voorkomen van (8) in dezen determinant brengt, gaat hij over in den determinant die in 't theorema is opgegeven. Men dient nu nog te letten op de macht van $-1$ en op die van $i$, die er in de producten ontstaan door de toepassing van IV. Verder stelt $R$ voor den regulator. Als we nu een stel reëele grondeenheden $\eta^i$ nemen

$$log\ \eta_i^{(k)} = \tfrac{1}{2} l_k \cdot (\eta_i)$$ [1])

omdat de toegevoegde lichamen imaginair zijn. In $R$ moeten we dus substitueeren

$$l_k(\eta_i) = 2 log\ \eta_i^k$$

waardoor de factor van 2 die in 't theorema in den noemer staat, ook juist daarin komt.

[1]) H. bl. 215.

---

De Heer L. E. J. BROUWER biedt aan ter uitgave in de Werken der Akademie het manuscript van het tweede deel zijner verhandeling: *„Die Elemente der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten begründet"*, waarvan het eerste deel in de vergadering van 24 November 1917 werd aangeboden.

Voor de bibliotheek biedt de Heer W. DE SITTER ten geschenke aan een exemplaar van de dissertatie van den Heer J. WOLTJER JR.: *„Investigations in the theory of Hyperion"*.

De vergadering wordt gesloten.

---

**10 Februari 1919.**

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

# VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 30 NOVEMBER 1918.

DEEL XXVII.

N°. 5.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

## INHOUD.

---

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Van de Heeren L. BOLK en ERNST COHEN is bericht ontvangen dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

Ter inleiding van de werkzaamheden houdt de Voorzitter, de Heer H. A. LORENTZ, de volgende toespraak:

Sedert onze laatste vergadering hebben belangrijke gebeurtenissen plaats gehad, waardoor het aanzien der wereld geheel is veranderd. De gruwelijke oorlog is geeindigd en, ondanks veel dat zorg blijft wekken, zien wij met goed vertrouwen een betere toekomst te gemoet, waarin de verwijdering der volken, die tegenover elkander stonden, niet nog verder zal voortgaan, maar, zij het ook langzaam, voor een toenadering zal plaats maken. Terwijl wij ons er over verheugen dat ook Nederland zich thans van de gevolgen der droevige achter ons liggende jaren zal kunnen herstellen, openen zich voor ons nieuwe vooruitzichten op een onbelemmerde, aan het geluk der menschheid bevorderlijke beoefening der wetenschap, waaraan alle volken, elk naar zijn aard en naar de mate zijner krachten, zullen deelnemen. Aan dien gezamenlijken arbeid, die voorheen zoo vruchtbaar is gebleken en die, daarvan zijn wij overtuigd, in komende

tijden van meer en meer gewicht zal worden, nu reeds te denken, is geenszins voorbarig; wij kunnen het doen met volle eerbiediging van de gevoelens, die zich vooralsnog en misschien nog gedurende geruimen tijd tegen het weder aanknoopen der internationale betrekkingen in haar vollen vroegeren omvang verzetten. Ook zij, bij wie deze gevoelens bestaan, hopen op de mogelijkheid eener latere hervatting van de gestoorde samenwerking. Ik ben verzekerd dat gij met mij van ganscher harte in die hoop deelt. Wij zullen ons gelukkig achten, zoodra de tijd daarvoor zal zijn aangebroken, ons deel in de gemeenschappelijke taak weder op ons te nemen.

De Heer D. J. KORTEWEG doet daarop uitkomen, dat de door den Voorzitter gesproken woorden aller instemming hebben.

Wanneer er iemand is, die tot den spoedigen terugkeer der vroegere verhoudingen zal kunnen bijdragen, dan is het zeker de Voorzitter, die van weerskanten zoozeer gewaardeerd wordt.

De reden waarom spreker het woord vraagt, is echter om den Voorzitter geluk te wenschen met de hooge onderscheiding, die hem dezer dagen is te beurt gevallen: de toekenning der *Copley-medaille*. Deze medaille is de hoogste onderscheiding, die de „Royal Society" geven kan. Sedert 1763 is zij ieder jaar toegekend, maar LORENTZ is de eerste Hollander, die op de lange lijst voorkomt. De Akademie verheugt zich daarin zeer. (Applaus.)

---

**Sterrenkunde**. — De Secretaris, de Heer ZEEMAN, leest, bij afwezigheid der beide rapporteurs, het volgende rapport voor:

*Aan het Bestuur der Wis- en Natuurkundige Afdeeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.*

Naar aanleiding van de aanvrage aan de Regeering des Heeren H. NORT te Gouda om eene Rijkssubsidie van *f* 300 voor het verrichten van sterretellingen op de sterspholographieën van FRANKLIN ADAMS, hebben de ondergeteekenden de eer het volgende te berichten.

De Heer NORT heeft, in overleg met den eersten ondergeteekende, ondernomen een onderzoek naar de verdeeling der stersdichtheid in en nabij den Melkweg, met het doel het probleem van de verdeeling der sterren in de ruimte zoo mogelijk een schrede nader tot zijn oplossing te brengen.

Hij bedient zich daarbij van de photographische platen door FRANKLIN ADAMS naar één zelfde plan gemaakt voor den geheelen Hemel, zoowel die van het Noordelijk als die van het Zuidelijk Halfrond.

Om deze reden en omdat deze platen zoo uiterst zwakke sterren bevatten, schijnen zij, meer dan eenige andere bestaande afbeeldingen, belovend voor het nagestreefde doel.

Intusschen maakt het laatstgenoemde punt dat de tellingsarbeid een enorme zal zijn. Dit is wel de reden waarom dit toch zoo noodige en belovende werk tot nog toe door geen der astronomen, beschikkende over de hulpmiddelen eener Sterrewacht, is ter hand genomen.

Nu de Heer NORT reeds aanzienlijke vorderingen in dit werk heeft gemaakt en daardoor heeft getoond het zeldzame enthousiasme te bezitten dat alleen in staat is dezen arbeid tot een goed einde te brengen, zou het naar de meening van ondergeteekenden een ware ramp zijn als hij dien uit gebrek aan de onmisbare hulp zou moeten afbreken.

Zij adviseeren daarom van ganscher harte tot het verleenen der gevraagde subsidie en doen dit in de overtuiging dat deze betrekkelijk geringe som buitengewoon rijke vruchten voor de wetenschap belooft.

*De Rapporteurs*
(get.) J. C. KAPTEYN.
W. DE SITTER.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het rapport, dat in afschrift met een begeleidend schrijven namens de Afdeeling, aan den Minister als antwoord gezonden zal worden.

**Dierkunde.** — De Heer J. W. VAN WIJHE doet eene mededeeling over: *„De Anatomie der Larve van Amphioxus lanceolatus en de Verklaring van hare Asymmetrie"*.

Sedert vele jaren heb ik getracht een deel der talrijke lacunes in onze kennis omtrent de morphologie van Amphioxus aan te vullen, omdat deze morphologie in vele opzichten de basis vormt voor de vergelijkende ontleedkunde en ontwikkelingsgeschiedenis der werveldieren.

Na de publicatie in 1914 in de verhandelingen dezer Academie van mijn onderzoek omtrent de veranderingen der Amphioxuslarve gedurende de metamorphose, waarin de groei stilstaat, is het mij gelukt voldoende materiaal te krijgen om de larve ook gedurende de groeiperiode te bestudeeren. Nu het onderzoek en de noodige teekeningen voltooid zijn — de tekst moet nog geschreven worden — zij het mij vergund hier eenige uitkomsten te bespreken.

Indertijd (1893) vond ik, dat de mond van Amphioxus slechts in schijn ongeveer symmetrisch geplaatst is, in werkelijkheid echter uitsluitend aan de linkerzijde ligt, daar de zenuwen en spieren der mondholte zonder uitzondering tot de linkerzijde van het lichaam behooren, wat later door anderen bevestigd werd. Dit feit is in overeenstemming met de veel vroegere ontdekking van KOWALEWSKY (1867) volgens welke de mondopening bij de larve van Amphioxus niet in het mediaanvlak, maar aan de linkerzijde van het vooreinde van het lichaam optreedt.

Door zijn mond, die bij alle andere metazoën een mediaan orgaan is, staan Amphioxus en ongetwijfeld ook het verwante genus Asymmetron [1]) als merkwaardigheden alleen in het geheele dierenrijk.

Men heeft herhaaldelijk getracht den Amphioxusmond toch voor een oorspronkelijk mediaan orgaan te verklaren, door aan te nemen, dat hij naar de linkerzijde zou verhuisd zijn. Zijn optreden bij de larve aan die zijde moest dan als eene verkorting der ontwikkelingsgeschiedenis worden opgevat. Deze verhuizing zou analoog zijn aan het verschijnsel dat men bij het oog der platvisschen (Pleuro-

[1]) TATTERSALL (Notes on the Classification and geographical Distribution of the Cephalochorda. Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society, Vol. 17, 1903) heeft aangetoond, dat men bij de Homomeria (Acrania) slechts twee genera: Amphioxus (Branchiostoma) en Asymmetron kan onderscheiden.

nectiden) waarneemt. De jonge larve der platvisschen heeft een oog aan elke zijde en zwemt met den rug naar boven, de zijvlakken naar rechts en links gekeerd, evenals alle andere visschen.

Later echter zwemt het dier met het eene zijvlak naar boven, het andere naar beneden gewend. Het oog der witte ondervlakte verhuist daarbij naar de gepigmenteerde bovenvlakte, waar zich het andere oog reeds bevindt.

Eene analoge verklaring voor de ligging van den mond bij Amphioxus gaat niet op, want het van plaats veranderde oog der Pleuronectiden blijkt door zijn zenuwen en spieren niet tot de bovenvlakte te behooren, waarop het te liggen komt, maar tot de ondervlakte.

De zenuwen en spieren der binnenvlakte van den Amphioxusmond, die alle van de linkerzijde komen, bewijzen daarentegen, dat hij niet als een mediaan orgaan kan worden opgevat, maar echt tot de linkerzijde behoort.

Terwijl bij de jonge larve de mond zich aan de linkerzijde vormt, ontstaat daartegenover aan de rechterzijde een klierachtig gemetamorphoseerde kieuwzak, bekend onder den naam van de kolfvormige klier.

Haar ontdekker, Hatschek (1881) kende wel de uitwendige opening dier klier, de darmopening echter nog niet. Hare aanwezigheid werd door latere onderzoekers vastgesteld.

Het lag nu voor de hand ook den mond der Amphioxuslarve als een gemetamorphoseerden kieuwzak te beschouwen en wel als het spiegelbeeld, het antimeer, der kolfvormige klier.

Nu doet zich de vraag voor met welk orgaan der hoogere dieren de linkszijdige mond der Amphioxuslarve homoloog is.

Is hij het homologon van de linkerhelft van den mond der Cranioten, die dan een versmeltingsproduct zoude moeten zijn van den Amphioxusmond en de kolfvormige klier of is de mond der Amphioxuslarve het homologon van de eerste linker kieuwspleet der Cranioten, die bij de Selachiers onder den naam van het linker spuitgat bekend is?

Verschillende gronden voerden tot het besluit, dat dit laatste het geval moet zijn. Het werd mijns inziens bewezen toen het bleek, dat de lichaamsholte der onderkaak, de mandibulaire holte, bij Amphioxus niet zooals bij hoogere dieren *achter* maar *voor* den larvenmond bleek te liggen.

Amphioxus heeft wel geen kaken, zoomin boven- als onderkaak, maar hij heeft wel eene mandibulaire holte, die de plaats der onderkaak aangeeft. Het spreekt vanzelf, dat eene opening die achter

de plaats der onderkaak ontstaat, niet beschouwd kan worden als het homologon van een deel van den mond der Cranioten.

Een zoo primitief orgaan als de mediane mondopening der werveldieren moet echter oorspronkelijk ook bij Amphioxus aanwezig geweest zijn. Naar mijne meening moet de opening van de groef van Hatschek, die een afsnoeringsproduct van het vooreinde van den darm is, als de primitieve mond van Amphioxus worden opgevat. Hoe dit ook zijn moge, de oorspronkelijke mond van Amphioxus moet evenals bij de hoogere dieren een symmetrisch orgaan geweest zijn, gelegen in het mediaanvlak, rostraal van het spuitgat.

Waarom is de oorspronkelijke mond bij Amphioxus verloren gegaan en vervangen geworden door het linker spuitgat?

Om op deze vraag een antwoord te vinden, kan ons de wijze waarop zich de pas uit het eivlies geslopen larven bewegen, op het spoor brengen. Deze larven bewegen zich door middel van trilharen schroefvormig vooruit, draaiende om de lengteas van rechts naar links.

Nemen wij nu aan, dat voorouders van Amphioxus blijvend deze bewegingswijze bezaten, dan verkeerde bij hun het linker spuitgat in voordeeliger conditie om het zeewater, noodig voor voeding en ademhaling, op te nemen dan de mediaan geplaatste primitieve mondopening. Het wordt nu begrijpelijk dat deze opening in den loop der tijden moest verdwijnen of een andere functie moest overnemen.

Ook maakt deze bewegingswijze het merkwaardige optreden der kieuwspleten begrijpelijk. Wanneer wij afzien van het voorste paar, dat tot mond en kolfvormige klier gemetamorphoseerd wordt, dan treden de kieuwspleten niet in achtereenvolgende paren op zooals bij alle Cranioten. Integendeel, de spleten der rechterzijde ontbreken bij de larve gedurende hare groeiperiode geheel; zij verschijnen eerst gedurende de metamorphose. In de groeiperiode worden enkel spleten der linkerzijde aangelegd. Zij verschijnen achtereenvolgens ten getale van 14 of 15, schijnbaar echter niet aan de linkerzijde maar in het *topographische* mediaanvlak van den kieuwdarm. Elk dier spleten verhuist kort na haar optreden naar de topographische rechterzijde.

Dit verschijnsel lijkt op het eerste gezicht zeer zonderling, maar wordt minder vreemd, wanneer men let op de ligging van den truncus arteriosus, die bij Amphioxus evenals bij de hoogere dieren de *morphologische* mediaanlijn van den kieuwdarm aangeeft.

De truncus arteriosus loopt bij de oudere Amphioxuslarve niet in het vlak van symmetrie onder langs den kieuwdarm, maar hoog dorsaal langs zijne rechterzijde. De morphologische rechterzijde is als

een smalle dorsale strook in ontwikkeling achtergebleven tengevolge van den bovenmatigen groei in de breedte van de linkerzijde, die daarbij het ventrale gebied der rechterzijde gaat innemen.

Al monden de eerste 14 of 15 kieuwspleten der larve nu ook aan de *topographische* rechterzijde uit, zij blijven *morphologisch* tot de linkerzijde behooren. Eerst in de volgende periode, die der metamorphose, groeit ook de rechterzijde in de breedte en dringt zij de linkerzijde en daarmede ook de kieuwspleten allengs terug naar den kant waar zij behooren.

Eerst nu ontstaan ook de rechterkieuwspleten, die vóór dien tijd in hun optreden verhinderd werden door het opdringen der linkerspleten.

Bij eene schroefvormige beweging met draaiing van rechts naar links verliest een dergelijk optreden der kieuwspleten zijn vreemdsoortigheid. De secundaire mond der larve neemt water op dàt, door trilharen voortbewogen, uit de kieuwspleten wegvloeit. Opdat nu de kieuwspleten der linkerzijde niet water zouden opnemen, in plaats van het te laten wegvloeien, moesten zij verhuizen [1]) naar de topographische mediaanlijn of beter nog naar de topographische rechterzijde van het lichaam.

In mijne verhandeling van 1914 werd reeds uiteengezet, dat de bewegingswijze der jonge larve niet alleen het ontstaan van den mond aan de linkerzijde, maar ook het vreemdsoortig optreden der kieuwspleten kan verklaren. Ook werd aangevoerd, dat zulk eene bewegingswijze het bovendien begrijpelijk maakt, dat het gehoororgaan (evenwichtsorgaan) kon verloren gaan, omdat bij voldoende snelheid de as van een draaiend lichaam stabiel is, terwijl men bij zulk eene bewegingswijze ook niet kan verwachten, dat zich de aanleg van het oog tot een gecompliceerd beeldvormend apparaat zoude kunnen ontwikkelen.

Ik was toen niet bekend met de kritiek die Adam Sedgwick van de verklaring der asymmetrische ligging van den mond had geleverd in het derde deel van zijn leerboek, verschenen in 1909. Zij is verscholen in het hoofdstuk over de Echinodermen, bij welke de mond symmetrisch in de ventrale middellijn ontstaat, om vervolgens naar de linkerzijde te verhuizen.

Erkennend dat dit geval van secundaire asymmetrie verschilt van het verschijnsel bij Amphioxus, waar de mond primair asymmetrisch

---

[1]) De verhuizing van een mediaan aangelegd orgaan naar de linkerzijde is niet zonder analogie; zij komt b v. voor bij het hart en de maag van den mensch.

Daar de zenuwen dezer organen van beide lichaamshelften afkomstig zijn, blijkt, ook zonder hunne ontwikkelingsgeschiedenis, dat zij oorspronkelijk mediaan moeten gelegen hebben.

wordt aangelegd, zegt SEDGWICK dat Amphioxus en de Echinodermen toch de linkszijdige ligging van den mond gemeen hebben. Hij vervolgt (l. c. p. 162) "Here again we have a character which strikes us from its very rarity, for it is found in no other Coelomate nor so far as we know in any other member of the animal kingdom. It also strikes us by its strangeness and inexplicableness. In Amphioxus no serious attempt has been made to explain it".

Mijne verklaring was dus volgens SEDGWICK *no serious attempt.* Hij geeft hiervoor ook zijn reden op: "for no one, so far as we know, has ever attempted to bring the extraordinary features in the development of the gill clefts, of the endostyle, of the head-cavities, the asymmetric position of the anus and olfactory pit, into relation with the asymmetry of the mouth. The thing cannot be done. There is no sort of connexion between these various asymmetries. They seem to occur without rhyme or reason".

Van al deze argumenten is er maar één dat schijnbaar steek houdt, n.l. dat hetwelk betrekking heeft op den anus. Wij zullen hen achtereenvolgens behandelen.

Eene verklaring voor het verhuizen der kieuwspleten naar de rechterzijde werd zooeven besproken. De glandula thyreoida, door SEDGWICK met den veronderden naam endostyl aangeduid, is bij alle Chordaten een mediaan orgaan. Zij moet ook bij Amphioxus in de morphologisch ventrale middellijn worden aangelegd. Wij zagen, dat deze lijn in de kieuwstreek der larve naar de rechterzijde werd verschoven. Bij de larve met drie open kieuwspleten (LANKESTER en WILLEY, 1890, fig. 1) loopt zij over den topographisch dorsalen (maar morphologisch ventralen) rand der kieuwspleten. Verlengt men haar nu een klein weinig rostraalwaarts, dan snijdt zij het hoekpunt waarin beide afdeelingen (de latere linker- en rechterhelft) der gl. thyreoidea elkaar ontmoeten. De gl. thyreoidea ligt dus bij de larve wel *topographisch* asymmetrisch, *morphologisch* echter symmetrisch. De symmetrie is in zooverre niet volkomen, dat de benedenste afdeeling (de latere linkerhelft) langer is en aanmerkelijk verder rostraalwaarts reikt dan de bovenste afdeeling (de latere rechterhelft). Van dit verschil zullen wij aanstonds gebruik maken bij de weerlegging van een ander argument van SEDGWICK.

Dat de morphologische mediaanlijn ook vóór de kieuwspleten, n.l. in de streek van den mond, naar de rechterzijde verschoven werd, is gemakkelijk te verklaren uit de groote uitbreiding van de mondopening, die niet alleen in de lengte maar ook in dorso-ventrale richting plaats vindt.

In deze richting bereikt haar onderrand nagenoeg de topographisch

ventrale mediaanlijn, die zij gedurende de metamorphose zelfs vóór goed overschrijdt, zoodat dit typisch linkszijdig orgaan niet *tijdelijk*, zooals de eerste kieuwspleten, maar *blijvend* ten deele aan de rechterzijde van het dier wordt aangetroffen.

Eerst gedurende de metamorphose, nadat de reusachtige larvenmond zich zeer verkleind heeft, tijdelijk zelfs bijna tot nul gereduceerd is, kan de gl. thyreoidea hare blijvende plaats aan den ventralen darmrand innemèn. Dan is ook het verschil in lengte tusschen hare linker en rechter afdeeling opgeheven.

SEDGWICK's derde argument vormen de vreemdsoortige verschijnselen in de ontwikkeling van de „head-cavities" (kopholten) d.i. van de afdeelingen der lichaamsholte in de kopstreek. De uitdrukking *head-cavities* werd ingevoerd door BALFOUR, die hen in de ontwikkeling der Selachiers ontdekte. In de kieuwstreek van Amphioxus wordt de lichaamsholte door de kieuwspleten in evenveel „head-cavities" verdeeld als er spleten zijn en valt het asymmetrisch optreden dezer holten noodzakelijk samen met dat der kieuwspleten. Hier is geen nieuwe vreemdsoortigheid te verklaren.

Maar SEDGWICK (leerboek, deel 2, 1905, p. 34) verstaat onder „head-cavities" ten onrechte alleen de beide voorste entodermzakjes van HATSCHEK, die rostraal vóór mond en kieuwdarm, naar het schijnt als elkanders antimeren optreden. Weldra echter nemen zij eene mediane ligging aan, waarbij het rechterzakje, dat eene echte kopholte blijkt te zijn, vóór het linkerzakje geschoven wordt. In zijne verdere ontwikkeling vertoont het linkerzakje geen enkel kenmerk waaruit men zou kunnen afleiden, dat het als eene afdeeling der lichaamsholte zou kunnen worden opgevat. Sedert 1893 — het laatst uitvoeriger in 1914 (l.c. p. 63) — heb ik de meening verdedigd, dat beide zakjes slechts *schijnbaar* antimeren zijn, dat zij oorspronkelijk niet *tegenover* maar *vóór* elkaar moeten gelegen hebben, en dat het schijnbaar antimere optreden een gevolg moet zijn van de asymmetrie der larve. Ik bleef met deze opvatting echter alleen staan. De latere onderzoekers hechtten zooveel waarde aan het eerste optreden — zeker ook een argument van groote beteekenis — dat zij de weldra volgende belangrijke verschillen niet in aanmerking namen. Ongetwijfeld speelde hierbij de symmetrische ligging van het voorste myotoom (dat als het tweede der rij moet beschouwd worden; het eerste is in het rechter entodermzakje begrepen) eene rol. Bij de volgende toch — met uitzondering van het derde der rij — reikt elk myotoom der linkerzijde van zijn eerste optreden af een halve myotoomlengte meer rostraalwaarts dan zijn antimeer der overzijde.

Daar deze scheeve symmetrie van het spierstelsel enkel in de

streek achter den mond wordt gevonden, daarvóór echter niet, meende men blijkbaar, dat ook de eigenlijke darm in den snuit wel recht symmetrisch zoude zijn. Dit is echter het geval niet.

Wanneer in de periode der metamorphose de eerste kieuwzakken der rechterzijde optreden, dan ligt de voorste daarvan niet tegenover zijn antimeer, maar tegenover de tweede kieuwspleet der linkerzijde (vgl. mijne afbeelding 1914, fig. 3, 4, 5). In het vooreinde der kieuwstreek is dus de linkerzijde van den darm over de geheele lengte van een kieuwmetameer rostraalwaarts verschoven [1]).

Deze verschuiving strekt zich ook uit in het deel van den darm dat vóór de mondopening ligt, zooals blijkt uit het boven vermelde (p. 585) verschil in lengte van beide afdeelingen der glandula thyreoidea wier onderste (latere linker) afdeeling veel verder naar voren reikt dan haar bovenste (latere rechter) afdeeling (vgl. mijne afbeeldingen, 1914, fig. 1, 2, 3 uit de metamorphose en LANKESTER en WILLEY, 1890, fig. 1 eener jonge larve met 3 open kieuwspleten).

Daar nu beide entodermzakjes van HATSCHEK kort vóór de streek der gl. thyreoidea tegenover elkaar worden aangelegd, ligt de conclusie voor de hand, ook al let men enkel op hun eerste optreden, hunne verdere lotgevallen buiten rekening latend, dat hunne antimerie slechts op schijn berust: Het linker zakje is naar voren verschoven en behoort morphologisch achter het rechter zakje te liggen, wat later ook het geval is.

De laatste argumenten van SEDGWICK vormen de asymmetrische ligging van den anus en de reukgroef.

Dat de reukgroef, die uit den mediaan geplaatsten neuroporus ontstaat, naar de linkerzijde verhuist, is gemakkelijk te verklaren uit de schroefvormige voortbeweging met de draaiing der as van rechts naar links: De reukgroef moest water opvangen en daarom naar de linkerzijde verhuizen.

Maar de asymmetrische ligging van den anus was minder gemakkelijk te verklaren. Niet alleen ligt hij bij het volwassen dier aan de linkerzijde, maar volgens HATSCHEK (1881) treedt hij ook reeds aan die zijde op bij de jonge larve met ééne kieuwspleet.

Evenzeer als de kieuwspleten dienen tot het uitlaten van het water, dat door den mond der larve wordt opgenomen, dient de anus tot het uitlaten der onverteerde voedingsstoffen. Zoowel het ademwater als de faeces worden voortbewogen, niet zoozeer door spiercontracties,

---

1) Bij het volwassen dier (en ook bij de meer kaudale spleten der larve) bedraagt deze verschuiving wat minder. Dan ligt, zooals bekend is, de voorste helft eener linker spleet niet eene *geheele* maar slechts eene halve spleetlengte rostraalwaarts van zijn antimeer aan de rechterzijde.

als wel hoofdzakelijk, zoo niet uitsluitend, ten gevolge van trilhaarbeweging, dus door zwakke krachten.

Evenzeer als het voor de kieuwspleten voordeelig is om naar de rechterzijde te verhuizen, zoude men dit ook verwachten bij den anus. Het moest als een postulaat der theorie beschouwd worden, dat de anus òf in het mediaanvlak optrad om daarop niet naar de linker- maar naar de rechterzijde te verhuizen, òf dat hij direct aan de rechterzijde werd aangelegd.

In de hoop bij jonge larven iets te kunnen gewaarworden wat tot eene verklaring zoude kunnen bijdragen, vond ik boven verwachting, dat de anus bij larven met één kieuwspleet niet aan de linker- maar aan de rechterzijde van het lichaam optreedt. Buiten eenigen twijfel was dit op serieën van dwarse doorsneden duidelijk. Aan praeparaten *in toto* was het echter, ook met de sterkste droge lenzen, bij zoo jonge larven niet mogelijk uit te maken, aan welke zijde van het lichaam zich de uiterst fijne anaalopening bevond, omdat men haar slechts in profiel, dus bij afwisselende instelling van het mikroskoop kan waarnemen.

Na het gebruik van sterke olie-immersiesystemen (b.v. Zeiss, obj. $^1/_{12}$ oc. 4) was echter ook bij deze praeparaten de ligging van den anus aan de rechterzijde duidelijk te zien.

Als de anus pas is opgetreden, strekt zich de staartvin nog niet rostraalwaarts van hem uit maar spoedig is dit, nog bij aanwezigheid van slechts éène kieuwspleet, wèl het geval. De anaalopening ligt dan aan de rechterzijde van de staartvin. Hier wordt zij ook bij larven met 2, 3, 4, 5 of 6 kieuwspleten aangetroffen.

Daarop doet zich echter het merkwaardig verschijnsel voor, dat zij naar de linkerzijde gaat verhuizen. Bij larven met 7 kieuwspleten ontstaat er eene lacune in de staartvin ter hoogte van den anus, zoodat de vin op deze plaats onderbroken wordt. De anus treedt nu in deze lacune en neemt daardoor eene symmetrische ligging ten opzichte van het lichaam aan. Deze ligging is echter van korten duur. Reeds bij de aanwezigheid van 9 kieuwspleten is de anus naar de linkerzijde overgetreden, waar hij verder blijvend wordt aangetroffen. De lacune in de staartvin verdwijnt en laat geen spoor achter van hare vroegere aanwezigheid.

Eene reden voor deze verhuizing kan ik niet aangeven. Zij moet in verband staan met eene verandering in de levenswijze, waarvan ons nog weinig of niet bekend is. Dit doet echter niets af aan de hoofdzaak, de oorspronkelijke ligging aan de rechterzijde, zooals die door de theorie gepostuleerd werd.

Neemt men de theorie niet aan, dan is hier vooral gelegenheid

om te spreken van eene ontwikkeling „without rhyme or reason".

Aan de hand van de theorie heeft men althans de „reason" voor de aanvankelijke ligging van den anus, al is zij ook niet instaat om zijn blijvende plaats daarmede te rijmen.

Met de zoo even besproken asymmetrie niet in verband staat de vraag naar het voorkomen van eene pankreasklier bij Amphioxus.

Deze klier is bij alle Cranioten, van de Cyclostomen tot den mensch toe bekend, maar men meent, dat zij bij Amphioxus zoude ontbreken.

Zij wordt bij de Cranioten aangelegd als een of meer uitstulpingen van het darmepithelium in de onmiddellijke nabijheid van de uitmonding van den ductus choledochus, die in den regel ook de uitmonding van een pankreasaanleg in zich opneemt.

Bij de Prikken, die met het oog op Amphioxus wel het meest in aanmerking komen, is de klier nog weinig volumineus. Ten deele is dit daaraan toe te schrijven, dat hun pankreas even als de lever enkel als orgaan met inwendige secretie fungeert. De uitvoerbuizen dezer klieren evenals de galblaas zijn na de metamorphose te gronde gegaan, maar bij Ammocoetes, de larve der Prikken, zijn zij aanwezig.

De pankreasklier van Ammocoetes ligt in den darmwand verborgen aan de linkerzijde van de uitvoerbuis der lever.

Op eene geheel analoge plaats vond ik haar ook bij Amphioxus van af het eerste optreden der lever in de periode der metamorphose tot aan den volwassen vorm. Bij goede kernkleuring ziet men haar op praeparaten *in toto* van de pas gemetamorphoseerde larve als een driehoekige vlek aan de linkerzijde van den darmwand onmiddellijk achter de plaats waar de leverblindzak afgaat. De afgeronde top van den driehoek is naar voren gekeerd; de basis is eene dwarse lijn, die de lengteas van het dier loodrecht kruist. Bij sterke vergrooting ziet men aan het praeparaat en meer evident nog op dwarse doorsneden, dat men te doen heeft met eene geringe uitstulping van den darmwand. Op de sneden ziet men, dat de klier een krachtig trilhaarepithelium bezit, maar bovendien bezit zij cellen zonder trilharen die wel als de eigenlijke kliercellen zijn te beschouwen.

Bij het volwassen dier is de klier meer in de lengte gerekt en dientengevolge is ook de darmuitstulping eene overlangsche sleuf. De klier doet zich voor als eene overlangsche plooi; haar vooreinde is in het achtereinde van den leverblindzak opgenomen. Een analoog verschijnsel treft men ook bij sommige visschen aan, waar de pankreasklier ten deele door de lever omhuld wordt.

De reden, waarom de talrijke onderzoekers, die zich met de

anatomie van Amphioxus hebben bezig gehouden, geen pankreas konden vinden, is gemakkelijk aan te geven. Het epithelium van den middeldarm vertoont op dwarse doorsneden bij het volwassen dier zoo talrijke plooien[1]) dat men niet verwachten kan deze van de pankreasplooi te kunnen onderscheiden, tenzij men bij jonge dieren op deze laatste opmerkzaam geworden is.

In de ontogenie der Cranioten is eerst de lever (als darmuitstulping) herkenbaar; wat later ook de pankreasklier. Bij Amphioxus is het juist andersom, Terwijl de lever eerst in de periode der metamorphose als darmuitstulping optreedt, is de pankreasklier tot in het stadium met twee open kieuwspleten terug te vervolgen (bij larven met slechts éëne kieuwspleet was zij nog niet waar te nemen). Haar aanleg is dan niet, zooals later, enkel tot de linkerzijde beperkt, maar omgeeft het darmlumen ringvormig. De ring is herkenbaar, doordat zijn kernen kleiner zijn en dichter op elkaar staan dan in de streek vóór of achter den aanleg der klier. De ring is echter niet gelijkmatig maar reeds aan de linkerzijde krachtiger ontwikkeld dan aan de rechterzijde van het lichaam. Aan de rechterzijde verdwijnt de aanleg echter spoedig, waardoor de klier asymmetrisch wordt.

Daar deze asymmetrie ook bij hoogere vormen, b.v. Ammocoetes, wordt aangetroffen, is zij wel geheel onafhankelijk van de te voren besproken asymmetrie van den kieuwdarm.

Ten slotte wensch ik er nog op te wijzen, dat de ligging van een anderen darmring, den iliocolonring, bij de larve met één kieuwspleet voor de morphologie van het darmkanaal der werveldieren van belang is. Deze ring geeft bij Amphioxus de grens aan tusschen middel- en einddarm.

Nu is het bij de physiologen reeds lang bekend, dat de nervus vagus bij de hoogere dieren en den mensch niet alleen den voordarm of „kopdarm" maar ook den geheelen middeldarm of „dunnen darm" helpt verzorgen. De anatomen kenden aan den n. vagus echter in den regel slechts het gebied van den voordarm toe, omdat de voorste der beide strengen, die de voortzetting vormen van den vagusplexus om den oesophagus, op den voorwand der maag eindigt, terwijl de achterste streng samenhangt met den plexus solaris van den sympathicus. Wegens dezen samenhang kon men de vagusvertakking niet met zekerheid verder distaalwaarts dan de maag vervolgen.

[1]) Deze plooien vindt men ook in den oesophagus (wiens achtereinde morphologisch met de maag der hoogere dieren overeenkomt) en in het voorste deel van den einddarm. Zij dienen ter vergrooting van het resorbeerende oppervlak. Bij jonge dieren komen zij nog niet voor.

Dit is nu onlangs aan onzen landgenoot DONKER[1]) bij apen gelukt. Hij kon vaststellen, dat de vertakking van den vagus tot aan het einde van den middeldarm reikt en dat zij zich niet tot den „dikken darm" (einddarm in ruimeren zin) uitstrekt. Ook MECKEL laat in het dit jaar verschenen deel van zijn leerboek de vertakking van den vagus bij den mensch tot het einde van den middeldarm reiken.

Dat de vagus, de tiende zenuw van het hoofd, den voordarm verzorgt, is niet vreemd, omdat deze, zooals bekend is, aanvankelijk tot de kopstreek beperkt is. De vraag doet zich nu voor, of ook de middeldarm der Chordaten oorspronkelijk misschien alleen in de kopstreek gelegen was.

De ontwikkelingsgeschiedenis van Amphioxus kan ons hierop eenigermate een antwoord verschaffen.

De iliocolonring, die de grens tusschen middel- en einddarm aangeeft, ligt des te meer rostraalwaarts naarmate de larve jonger is. De larve van LANKESTER en WILLEY met 14 kieuwzakken bezit reeds 61 myotomen, evenveel als het volwassen dier. De iliocolonring ligt onder het 34e, 35e en 36e myotoom. Bij hunne larve met 3 kieuwspleten en slechts 36 myotomen ligt de ring onder het 15e en 16e myotoom.

Bij Selachiers en wel in het algemeen bij de Cranioten behooren de voorste 9 myotomen tot den kop. Het zoude nu interessant zijn, te weten onder welke myotomen de iliocolonring van Amphioxus bij zijn eerste optreden ligt. Dit optreden geschiedt in het stadium met slechts éene kieuwspleet en open anus.

Hoewel ik van dit stadium in den loop der jaren honderden praeparaten vervaardigd heb, op allerlei wijzen gekleurd en ingebed, is het mij niet mogelijk geweest hierbij het aantal der myotomen te tellen. Hunne grenzen, die in vroegere en latere stadiën duidelijk in het oog springen, waren in dit stadium — ook op serieën doorsneden — niet zichtbaar[2]).

Het is mogelijk, dat deze grenzen bij levende larven te zien zijn. HATSCHEK (1881, fig. 64) althans geeft op eene teekening van zulk een larve aan, dat er in het geheel 20 myotomen aanwezig zijn; de iliocolonring is hem echter ontgaan. Vergelijkt men nu de plaats van dezen ring, die in mijne praeparaten zeer duidelijk is, met de

---

[1]) P. DONKER, Ueber die Beteiligung des N. vagus an der Innervation des Darmes. Anat. Anzeiger, Bd. 51, No. 8, 1918.

[2]) Men zoude hier van een cryptometameer stadium kunnen spreken, een kenmerk — onder meer — dat deze larven gemeen hebben met de Appendicularien en de larven der Ascidien, bij welke de metamerie tegenwoordig nog door verschillende schrijvers ontkend wordt.

figuur van HATSCHEK, dan komt men tot het besluit, dat hij ongeveer onder het 9de myotoom, dus aan het einde van de kopstreek moet gelegen zijn.

Met andere woorden: Niet alleen de voordarm (prosenteron) maar ook de middeldarm (mesenteron) lag oorspronkelijk in de kopstreek en wanneer dit eveneens bij de Cranioten het geval is, zooals verwacht mag worden, dan is het niet te verwonderen, dat ook de middeldarm door eene zenuw van het hoofd, den n. vagus, verzorgd wordt. Het begrip „kopdarm" behoort dan niet zooals tot nog toe synonym te zijn met voordarm, maar moet ook den middeldarm omvatten.

---

**Geologie.** — De Heer A. Wichmann doet eene mededeeling: „*Over de afscheiding van phosphaten in de stammen van djati kapoer* [*Tectona grandis L.*]”.

De bewoner van den Indischen Archipel bestempelt de steenachtige afscheidingen in organismen, onverschillig of zij van plantaardigen of dierlijken oorsprong zijn, met den naam van *mestika*[1]). Ook versteeningen worden er somtijds onder begrepen. Men schrijft aan sommige dier vormingen, evenals dit bij vele andere volkeren het geval is, geneeskracht toe of men bezigt hen als talismanen.

Dergelijke afscheidingen voorkomende in het houtweefsel van boomen — *mestika kajoe* — heeft G. E. Rumphius het eerst bekend gemaakt, doch het waren slechts weinig voorbeelden, die hij daarvan heeft kunnen aanhalen. Hij kende ze in de stammen van *Casuarina* in het gowasa- of kofaso-hout [*Vitex Cofassus* Reinw.], in het sangahout [*Tristania obovata* R. Br.] en in de verdikkingen van de *kemoeming-batoe* [*Murraya* ? ], die hij samenvatte onder de benaming *dendritis arborea*[2]). Opmerkelijk mag het echter genoemd worden, dat hij — evenals andere oude schrijvers — er onkundig van gebleven was, dat de hem bekende djati-boom[3]) [*Tectona grandis* L.] somtijds afscheidingen bevat, die wat grootte en hoeveelheid aangaat, die van alle planten verre overtreffen. Wel noemt hij eene soort, de *djatie batoe* — steen-djati — op, maar aangezien hij ze voor de beste soort houdt en geen steenachtige concreties daarin vermeldt, kan de *djati kapoer* moeilijk daarmede bedoeld geweest zijn. Hoewel er niet aan te twijfelen valt, dat de Javanen, die van oudsher een veelvuldig gebruik van het *Tectona*-hout hebben gemaakt, met de *djati kapoer*[4]) bekend zijn geweest, vindt men deze variëteit

[1]) Van de eerstgenoemden zijn vooral bekend de *mestika awi* — de in de knoopen van bamboe voorkomende *tabaschir* — en de *mestika kalapa* — uitscheidingen van calciumcarbonaat in de kokosnooten. Rumphius noemt nog op: *mestika bras*, *mestika gondu*, *mestika nangka*, *mestika pinang* en *mestika pisang*. Onder de afscheidingen uit dierlijke organismen zijn vooral vermaard de *mestika oclar* — de slangensteen —, de *mestika babi* [*pedra de porco*] en de *bezoar*.

[2]) D'Amboinsche Rariteitkamer, Amsterdam, 1705, blz. 323. — Voor zoover mij bekend heeft men nooit een enkele dier vormingen, die in de literatuur dan ook niet verder vermeld worden, onderzocht.

[3]) Herbarium Amboinense, 3, Amsterdam 1743, blz. 34—36.

[4]) *Kapoer* beteekent kalk.

voor het eerst in een door THOMAS HORSFIELD aan maarschalk DAENDELS uitgebracht rapport d.d. 31 Mei 1808 [1]), waarvan C. L. BLUME in 1859 gewag maakte, vermeld [2]).

Meer belangstelling toonden de bouwkundigen en de scheepsbouwers. H. DE BRUIJN betoogde in 1851, dat de *djati kapoer* voor de minste soort gehouden wordt, „wegens de kalkbladeren, die er zich in bevinden, en alzoo van minder qualiteit doen zijn" [3]). Iets uitvoeriger is C. G. VAN DENTZSCH, die van den boom zegt, dat hij genoemd wordt „naar de aderen van zwavelzuren kalk, welke vaak in de gansche lengte des stams zichtbaar, haar aanwezen aan de met de sappen opstijgende kalkdeelen schijnen verschuldigd te zijn" [4]). F. JUNGHUHN vestigde 2 jaren later de aandacht er op, dat die uitscheidingen beperkt waren tot de op kalkmergelafzettingen groeiende exemplaren van *Tectona*, zooals zij vooral in de residentiën Rembang en Soerabaja gevonden werden [5]).

Aangaande het wezen dier afscheidingen openbaart zich verschil van meening. Terwijl zij door VON DENTZSCH voor calciumsulfaat gehouden werden, meende HERMAN CRÜGER in 1857, dat „*Tectona grandis* nach ihrem durch das Mikroskop bestimmbaren Gehalt an Kiesel eine schwache Kieselpflanze" te beschouwen was, maar laat achterwege te vermelden hoe langs dezen weg hij de aanwezigheid van kiezeldeeltjes had kunnen vaststellen. Verder meende hij opge-

---

1) H. W. DAENDELS was — voor zoover mij bekend — de eerste, die van *djati kapoer* gewag maakte. In Art. 39 van zijn „Instructie voor de Boschgangers" d.d. Samarang, 21 Augustus 1808, leest men: „Den Lande reserveert van zich de uitsluitende behering, afvoer en debiet van het jatiehout zo van de drie hoofdsoorten

„Jati Soengie [lees *djati soengoe*]

— Doerie [lees *djati doreng*]

— Kapok" [lees *djati kapoer*]

(Staat der Nederl.-Oostindische Bezittingen, 1808—1811. 's Gravenhage, 1814, Bijlage 3, *in voce* Houtbosschen).

2) Over eenige Indische houtsoorten. Versl. en Meded. K. Akad. v. Wetensch. Afd. Natuurk. **9**, Amsterdam 1859, blz. 44.

3) Bijdragen tot de kennis der Bouwkunde in Nederl.-Indië, Batavia, 1851, blz. 10.

4) Aanteekeningen omtrent proeven, welke in 1852 in den Artillerie Konstructie winkel te Soerabaja met djatihout genomen werden. Tijdschr. voor Nijverheid in Ned.-Indië, **2**, Batavia 1855, blz. 2; zie verder A. VAN LAKERVELD en G. L. BROCX, Handleiding voor bouwkundigen en industrieelen in Nederl. Oost-Indië, **1**, 's Gravenhage 1863, p. 79—80. — D. BOEKE, Het Javaansch Djattiehout beschouwd als scheepstimmerhout, Verhandel. en Berigten betr. het Zeewezen, **29**, Amsterdam, 1869, blz. 171. — D. BOEKE, A Word to ship-builders about Java Teak. Nautical Magazine, **39**, London 1870, blz. 450.

5) Over de fossiele zoogdierbeenderen te Patihajam, Natuurk. Tijdschr. Nederl.-Indië, **14**, Batavia 1857, blz. 219.

merkt te hebben, „dass die Zellwände von kohlensauren Erden „eingenommen und sich zwischen grossen Kieselkörpern ohne bestimm-„bare Formen befinden"[1]). Daarvan is door latere onderzoekers evenmin iets gebleken en reeds in het volgend jaar was D. PLES in staat langs analytischen weg aan te toonen, dat de afscheidingen in het djatihout in hoofdzaak uit calciumphosphaat bestaan (analyse I)[2]). ABEL, die in 1862 met hetzelfde doel de concreties in het teakhout onderzocht, kwam tot een daarmede vrij goed overeenkomend resultaat (analyse II)[3]).

Beider onderzoekingen hebben echter niet kunnen beletten, dat zestien jaren later WINKELMANN verklaarde: „Im Holzparenchym „sieht man kürzere mit oxalsaurem Kalk[4]) und längere mit Luft „oder Harz angefüllte Zellen. Kieselsäure ist durch die ganze Holz-„masse verbreitet[5]).

De laatste mij bekend geworden analyses van concreties heeft men te danken aan G. THOMS. De resultaten toonden veel overeenkomst met die zijner voorgangers, zoodat hij zich gerechtigd achtte te zeggen, dat zij waren samengesteld uit een waterhoudend calciumphosphaat beantwoordende aan de formule: 2CaH, HH, $PO^5 \times Xaq$.[6]).

Aanleiding tot een hernieuwd onderzoek zijn geweest monsters van concreties, die ik te danken heb aan de goedheid van Dr. H. C. PRINSEN-GEERLIGS, toentertijd te Kagok-Tegal. De stukken zijn lang

---

[1]) Westindische Fragmente, Botanische Zeitung, **15**, Leipzig 1857, blz. 323.

[2]) Onderzoek naar de samenstelling eener witte stof, welke zich in het hart, alsmede in de scheuren van sommige djatiboomen afzet, waarom de boomen bij de Inlanders den naam van Djati-Kapor dragen. Nat. Tijdschr. Ned.-Indië, **15**. Batavia 1858, blz. 345—348 (uittreksel: Examen d'une matière blanche inorganique dans l'intérieur du tronc de l'arbre djati à Java. Journ. de Botan. Neérl. **1**, Amsterdam-Utrecht 1861, blz. 135—136.

[3]) J. S. GAMBLE, A Manual of Indian Timbers, 2d ed. London 1902, blz 533.

[4]) JULIUS WIESNER (Die Rohstoffe des Pflanzenreiches **2**, Leipzig 1903. 2te Aufl. blz. 1005) heeft zich vergist door aan te nemen, dat ook G. A. BLITS de aanwezigheid van calciumoxalaat heeft ondersteld.

[5]) Fremde Nutzhölzer, Die Natur. Halle a/S. 1878, bl. 93. — Nadat CARL SANIO het eerst iets over den anatomischen bouw van *Tectona grandis* had medegedeeld (Vergleichende Untersuchungen über die Elementarorgane des Holzkörpers, Botanische Zeitung **21**, Leipzig 1863, blz. 110—111), gaven J. W. H. CORDES (De Djati-bosschen op Java, Batavia 1881, blz. 22—26, pl. III, fig. 1. 2) en G. A BLITS (De anatomische bouw der Oost-Indische IJzerhoutsoorten en van het Djatihout. Bull. van het Kolon. Museum te Haarlem, **19**, Amsterdam 1898, blz. 48—50, pl. VI) meer uitvoerige beschrijvingen. De laatstgenoemde heeft de phosphaatafscheidingen als opvulling der vaten kunnen opmerken.

[6]) Beitrag zur Kenntniss des Teakholzes (*Tectona grandis*). Die Landwirtsch. Versuchsstationen **23**, Berlin 1870, blz. 68—69, 416—417).

gerekt, meer of minder hoekig, tot 50 c.M. lang en met een middellijn van ± 1/2 tot 1 c.M., het gewicht van 5 gram niet te boven gaande [1]). Blijkbaar zijn zij afkomstig van holten, die evenwijdig aan de lengteas van den stam liepen en oorspronkelijk opvullingen van de vaten waren. Slechts een klein gedeelte der stukken was plaatvormig (± 1 à 2 m.M. dik) en deze schijnen opvullingen van de spleten in het hout geweest te zijn, die zich als gevolg van de uitzetting door den groei der stengels gevormd hadden. Op de breukvlakken zijn alle fragmenten sneeuwwit, eenigszins krijtachtig, doch iets harder (H = 2) [2]). Het soortelijk gewicht is 2.240.

In dunne doorsneden ontwaart men onder het mikroskoop twee van elkander verschillende stoffen. De eene vertoont zich in de gedaante van waterheldere onregelmatig begrensde korrels, die als insluitsels dikwijls restes van het hout en wel libriformvezels bevatten. Het zijn geelachtig-bruine, langgerekte, geïsoleerde cellen, die altijd meer of minder sterk gebogen zijn en puntig uitloopen. De afscheiding van het hout heeft klaarblijkelijk aanleiding gegeven tot het uitelkanderrukken van gedeelten van het houtweefsel en buitendien tot deformatie van de vezels. De brekingsexponent is ongeveer 1,6 en wat de dubbelbreking betreft, in gepolariseerd licht klimmen de interferentiekleuren niet hooger op, dan het blauw van de tweede orde. De uitdovingshoeken waren 21—22 1/2°, maar er werden ook van 31° en zelfs 37° gevonden [3]). Een behoorlijke oriënteering was wegens het gemis aan kristalvormen en het ontbreken van goede splijtrichtingen meestal niet te verkrijgen.

De tweede stof is troebel en fijnvezelig. Zij bestaat uit sphaerolietachtige aggregaten, die in gepolariseerd licht een scheef staand kruis vertoonen, waaruit blijkt, dat zij evenals de eerstgenoemde tot een klinobasisch kristalstelsel behoort. De zeer fijne naaldjes hebben doorgaans eene lengte van 0.05 mM., er zijn echter aggregaten, waar de dimensies nog kleiner zijn. Aan den anderen kant

---

[1]) Dergelijke concreties kunnen afdalen tot de kleinheid van fijne stofdeeltjes, die als een wit poeder ringvormig of onregelmatig verdeeld in het hout voorkomt, Andererzijds kunnen zij wat grootte en omvang betreft al hetgeen als afscheiding in het plantenrijk bekend is, verre overtreffen. W. J. Spaan heeft concreties van armsdikte kunnen opmerken (Aanteekeningen over de in het boschdistrikt Madioen voorkomende zoogen. djativariëteiten. Boschbouwkundig Tijdschr. Tectona 4, Noordwijk-Weltevreden 1911, blz. 473).

[2]) J. W. H. Cordes (De Djatibosschen op Java, Batavia 1881, blz. 27) zegt daarentegen, dat de concreties in den regel zeer hard zijn, zoodat somtijds de kapbijlen er door beschadigd worden.

[3]) Misschien is de onder het slijpen van de plaatjes op de zachte korreltjes uitgeoefende druk niet zonder invloed op de optische eigenschappen geweest.

loopen de vezels echter somtijds in zuiltjes van 0.2 m.M. lengte en een breedte van 0.008 m.M. uit. Zij zijn sterker lichtbrekend dan de boven beschreven korrels, maar evenals deze optisch positief. Het in de gedaante van de aggregaten optredend phosphaat schijnt mij toe van secundairen oorsprong te zijn en wel een product van de metamorphose van de bovenvermelde korrels. Behalve uit de later ter sprake te brengen overwegingen, blijkt dit ook uit het feit, dat de aggregaten somtijds als het ware in de korrels ingevreten zijn. Opmerkelijk is het nog te noemen, dat die zuiltjes en naaldjes niet „einheitlich" uitdooven, maar aggregaatpolarisatie vertoonen, waaruit blijkt, dat ze eene moleculaire omzetting hebben ondergaan en tot eene weinig stabiele verbinding behooren.



Een mechanische scheiding der beide stoffen bleek ten gevolge hunner zachtheid onuitvoerbaar te zijn. Onder het wrijven in den mortier worden zij geheel dooreengekneed.

Het aantal analyses van de concreties is niet groot. Zij zijn in de tabel op volgende pag. vereenigd. N°. I is afkomstig van D. Ples[1]), n°. II van Prof. Abel[2]), n°. III en IV van G. Thoms[3]), terwijl n°. V van de bovenbeschreven stof uitgevoerd werd in Prof. M. Dittrich's Chem. Laboratorium te Heidelberg.

Uit de door Ples, Abel en Thoms uitgevoerde analyses was gebleken, dat de concreties uit het djatihout bestaan uit een waterhoudend calciumphosphaat, welks samenstelling overeenkomt ongeveer met die van het mineraal *Brushiet*[4]), welks theoretische samenstelling is:

[1]) Onderzoek naar de samenstelling eener witte stof, welke zich in het hart, alsmede in de scheuren van sommige djatiboomen afzet .... Natuurk. Tijdschr. Ned.-Indië **15**, Batavia 1858, blz. 345—348. De herberekening is van mij.

[2]) J. S. Gamble, A Manual of Indian Timbers, New ed. London 1902, blz. 533.

[3]) G. Thoms, Beitrag zur Kenntniss des Teakholzes (Tectonia grandis), Die Landwirthschaftl. Versuchsstationen **33**, Berlin 1879, blz. 416—417.

[4]) G. E. Moore, On Brushite, a new mineral occurring in Phosphatic Guano, Proceed. California Acad. of Nat. Science **3**, 1867, San Francisco 1868, blz. 167—168; Amer. Journ. of Sc. (2) **39**, New Haven 1865, blz. 43—**44**. — A. de Schulten, Recherches sur le phosphate dicalcique. Reproduction artificielle de la brushite. Bull. Soc. franç. de Minéralogie **26**, Paris 1903, blz. 12.

| | |
|---|---|
| $P^2O^5$ . . . . . . . . . . | 41.28 |
| CaO . . . . . . . . . . | 32.55 |
| $H^2O$ . . . . . . . . . . | 26.17 |
| | 100.00, |

hetgeen beantwoordt aan de formule $HCaPO_4 + 2H^2O$.

| | I. | II. | III. | IV. | V. |
|---|---|---|---|---|---|
| $SiO^2$ | — | — | — | — | 0.53 |
| $P^2O^5$ | 40.14 | 43.35 | 42.30 | 39.42 | 39.46 |
| $CO^2$ | — | 0.09 | — | — | 0.05 |
| $Al^2O^3$ | — | — | — | — | 0.05 |
| $Fe^2O^3$ | — | — | — | 0.01 | 0.07 |
| CaO | 29.35 | 34.04 | 33.24 | 29.78 | 16.75 |
| MgO | — | 1.86 | — | 0.34 | 11.64 |
| $(NH^4)^2O$ | — | 1.12 | — | — | — |
| $H^2O$ (bij 100 resp. 110°) | 0.50 | 19.54 | 5.92 | 10.40 | 6.11 |
| $H^2O$ (gloeiverlies) | 28.00 | | 18.54 | 12.26 | 25.69 |
| Onoplosbaar (organ. stof) | 2.01 | — | — | 7.79 | — |
| | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.35 |

De onderlinge afwijkingen van de resultaten der analyses kunnen daarop terug worden gebracht, dat sommige bijmengsels over het hoofd werden gezien en verder, dat bij de toenmalig gebruikelijke methoden fouten bij de bepaling der bestanddeelen niet te vermijden zullen zijn geweest.

De ondervinding had tot nog toe geleerd, dat de samenstelling der afscheidingen in planten zeer constant is. Men behoeft daarbij slechts te herinneren aan de *mestika awi* (tabaschir), aan de *mestika kalapa*, aan de onder den naam van cystoliethen bekende afscheidingen van het calciumcarbonaat, alsmede aan de kristalvormingen van het calciumoxalaat.

Het was daarom bijzonder in het oog vallend, dat de in Prof. Dr. M. DITTRICH's Laboratorium te Heidelberg (leider Dr. H. HECHT) uitgevoerde ånalyse een van de 4 bovenvermelde sterk afwijkend resultaat opleverde.

De voor het eerst in kleine hoeveelheden opgespoorde stoffen buiten beschouwing latende, valt het meest in het oog het hooge

gehalte aan magnesiumoxyde, waarvan PLES niets, ABEL 1.86% en THOMS slechts 0.34% gevonden hadden. De vermeerdering daarvan tot 11.64% ging tevens gepaard met eene vermindering van het calciumoxyde tot 16.75%. Daar reeds uit het mikroskopisch onderzoek gebleken was, dat de afscheidingen te beschouwen waren als een mengsel van twee stoffen, kon moeielijk besloten worden tot de aanwezigheid van een dubbelzout, nl. een calciummagnesiumphosphaat. Ten overvloede bleek ook uit de berekening, dat de samenstelling niet aan een dergelijke verbinding — $H^2CaMg(PO^4)^2 + 4H^2O$ — beantwoordt, die zou vereischen 43.22 $P^2O^5$, 17.08 CaO, 12.28 MgO, 27,42 $H^2O$.

Zeer veel aannemelijker scheen mij toe de aanwezigheid van een mechanisch mengsel van een calcium- en een magnesiumphosphaat of van een calcium- en een calciummagnesiumphosphaat. Verondersteld, dat in de door ons onderzochte concreties het door PLES, ABEL en THOMS aangetoonde calciumphosphaat aanwezig is, zal uit de analyse ook het magnesiumphosphaat te berekenen zijn. Wanneer wij de aanwezige 0.53 $SiO^2$, 0.05 $Al^2O^3$, 0.07 $Fe^2O^3$, 0.05 $CO^2$, benevens de voor de binding van de $CO^2$ vereischte 0.06 CaO, aftrekken, dan blijft er — op 100 berekend — over:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P^2O^5$ . . . . | 39.63 ÷ | 21.26 . . . . . . | 18.37 |
| CaO . . . . | 16.76 ÷ | 16.76 . . . . . . | — |
| MgO . . . . | 11.68 | . . . . . . . . . . | 11.68 |
| $H^2O$ . . . . | 31.93 ÷ | 13.47 . . . . . . | 18.46 |
| | | 51.49 | 48.51 |

De procentarische samenstelling van het magnesiumphosphaat wordt alsdan:

| | |
|---|---|
| $P^2O^5$ . . . . | 37.88 |
| MgO . . . . | 24.07 |
| $H^2O$ . . . . | 38.05 |
| | 100.00 |

die ongeveer beantwoordt aan de formule $HMgPO^4 + 3^1/_2\ H^2O$, welke vereischt

| | |
|---|---|
| $P^2O^5$ . . . . | 39.58 |
| MgO . . . . | 22.50 |
| $H^2O$ . . . . | 37.92 |
| | 100.00 |

Bij de beoordeeling van bovenstaande berekening dient in het oog gehouden te worden, dat op eene volledige overeenstemming met de resultaten der analyse niet te rekenen valt, wegens de onbekend-

heid van de rol, die de in kleine hoeveelheden optredende $SiO^2$, $Al^2O^3$ en $Fe^2O^3$ spelen. Zij zijn — althans ten deele — afkomstig uit de ingesloten fragmenten van het houtweefsel, dat overigens ook $P^2O^5$, CaO en MgO bevat.

Het boven berekende magnesiumphosphaat is in de natuur onbekend[1]), maar er is nog een andere reden, om aan te nemen, dat de tweede stof niet als een magnesiumphosphaat, maar als een calcium-magnesiumphosphaat aanwezig is en dit is het feit, dat het oorspronkelijke calciumphosphaat nog lang niet de helft van de concreties uitmaakt. Er moet dus in de vezelige aggregaten eveneens calciumoxyde aanwezig zijn.

Het antwoord op de tweede vraag, nl. waaraan het opmerkelijk verschil in de chemische samenstelling der concreties toe te schrijven is, geven m. i. de in de onderstaande tabel vereenigde aschanalyses, waarvan men N°. VI (van het splinthout) en VII (van het kernhout) aan R. Romanis[2]) en die van N°. VIII aan G. Thoms te danken heeft.[3]).

| | VI. | VII. | VIII. |
|---|---|---|---|
| $SiO^2$ | 23.36 | 32.69 | 24.98 |
| $P^2O^5$ | 31.97 | 27.42 | 29.61 |
| $SO^3$ | — | — | 2.22 |
| $Fe^2O^3$ | 2.42 | 1.79 | 0.80 |
| CaO | 7.35 | 11.80 | 31.35 |
| MgO | 30.57 | 21.97 | 9.74 |
| $K^2O$ | 1.75 | 1.51 | 1.47 |
| $Na^2O$ | 2.58 | 2.82 | 0.04 |
| Cl | — | — | 0.01 |
| $CO^2$ | — | — | 0.01 |
| | 100.00 | 100.00 | 100.23 |

[1]) Men heeft slechts den *Bobierriet* $Mg^3(PO^4)^2 + 5\,H^2O$ met 40,21 $P^2O^5$, 34,28 MgO, 25,51 $H^2O$ en den *Newberyiet* $HMgPO^4 + 3\,H^2O$ met 40,71 $P^2O^5$, 23,14 MgO, 36,15 $H^2O$.

[2]) J. S. Gamble, A Manual of Indian Timbers, London 1902, blz. 532.

[3]) Beitrag zur Kenntniss des Teakholzes, Die Landwirtschaftl. Versuchsstationen **33**, Berlin 1879, blz. 419.

Zooals niet anders te verwachten was, worden ook in de niet tot djati kapoer behoorende varieteiten van *Tectona grandis* de bestanddeelen der afscheidingen in de asch van het hout teruggevonden. Wanneer men verder in het oog houdt, dat in het saprijke splinthout nooit concreties gevonden werden, hoewel de tot de vorming daarvan vereischte stoffen aanwezig zijn, dan komt men tot de conclusie, dat er verband tusschen die afscheidingen en de vermindering van het sapgehalte moet bestaan.

Het bij alle 3 analyses gevonden phosphorzuurgehalte vertoont geen belangrijk verschil, maar wel is dit het geval ten opzichte van het calcium- en van het magnesiumoxyde. Een maatstaf ter vergelijking geven de analyses van Romanis, omdat kern- en splinthout naast elkaar onderzocht werden. Daarbij moet echter in het oog gehouden worden, dat het eerstgenoemde 1 %, het laatstgenoemde echter slechts 0.74 % asch opleverde. Zoodoende bestaat dan ook de grootere hoeveelheid $P^2O^5$ (31.97 %) bij het splinthout tegenover de 27.42 % van het kernhout slechts in schijn, want op het gewicht van het hout berekend wordt dit 23.66. Langs denzelfden weg verkrijgt men 5.44 in plaats van 7.35 % CaO en 22.62 in plaats van 30.57 % MgO. Zooals men ziet, is het CaO-gehalte van het kernhout (11.80 %) meer dan dubbel zoo hoog als dat van het splinthout (5,44 %), waardoor de afscheiding van het phosphaat gereedelijk te verklaren is, echter niet, welke oorzaken daartoe hebben geleid, want bij *djati kapoer* zijn zij regel, terwijl zij bij andere variëteiten slechts uitzondering zijn. Oogenschijnlijk gaat de zachtheid en mindere vastheid van het houtweefsel met die afscheidingen gepaard en die als een gevolg daarvan te beschouwen zijn. In de analyse van Thoms (VIII) ontwaart men slechts een MgO-gehalte van 9.74 %, tegenover 31.35 van het CaO. Het is in verband daarmede verklaarbaar, dat het gevormde phosphaat in hoofdzaak slechts Ca bevatte en men zou uit de aschanalyse de gevolgtrekking kunnen maken, dat de eene boom meer Mg in zich opneemt dan de andere.

In overeenstemming met den algemeenen regel acht ik het waarschijnlijk, dat de concreties oorspronkelijk uitsluitend uit het calciumphosphaat hebben bestaan, dat later eene geleidelijke verandering door een loskomend organisch magnesiumzout onderging, die tot de vorming van het moeielijker oplosbaar magnesiumphosphaat of magnesiumcalciumphosphaat moest leiden[1]). De heldere kristalkorrels

[1]) Ik acht het niet uitgesloten eene dergelijke metamorphose langs experimenteelen weg tot stand te brengen, nl. door de inwerking van het uitgeperste celsap van Mg-rijke djatiboomen op de normale concreties van calciumphosphaat.

zouden alsdan als de nog onaangetaste restes van het calciumphosphaat te beschouwen zijn. Ware eene dergelijke metamorphose niet in het spel, dan zouden beide phosphaten gelijktijdig afgescheiden moeten zijn, hetgeen mij niet aannemelijk voorkomt. Nog minder kan er van eene periodiciteit in de afscheiding der beide phosphaten sprake zijn, omdat daarvan een zonaire bouw der concreties blijk moest geven, die echter nergens in de preparaten opgemerkt kon worden. Voor de oplossing van het vraagstuk is een meer uitgebreid onderzoekingsmateriaal onmisbaar. Daarbij acht ik het noodzakelijk naast de concreties zelve, telkenmale ook het hout der stammen, waaruit ze afkomstig zijn te analyseeren.

Voor zoover bekend, is *Tectona grandis* de grootste phosphorusvreter en het zou uit dit oogpunt der moeite waard zijn te onderzoeken of zij daardoor tevens tot grondbederfster wordt [1]). De hoeveelheid phosphorzuur, die zij aan den grond onttrekt, kan ongeveer berekend worden naar de hoeveelheid hout, die op Java jaarlijks uit de djatibosschen gekapt wordt. Van 1902 tot en met 1915 werden op die wijze verkregen:

3.148950 $M.^3$ timmerhout en
11.035108 S.M. brandhout [2]),

waarvan het eerstgenoemde vertegenwoordigt een gewicht van 2074.347000 K.G., [3]) terwijl voor het brandhout 4855.447740 K.G. aangenomen kan worden [4]).

Volgens Romanis levert kernhout 1 % en splinthout 0.74 % asch [5]). Het timmerhout mag wel in hoofdzaak als kernhout beschouwd worden, zoodat de bovenvermelde hoeveelheid 20.743470 K.G. asch moet opbrengen, bevattende 5.694082 K.G. phosphorzuur. Om de rekening niet te flatteeren werd het brandhout als splinthout in aanmerking genomen. Bij een gewicht van 4855.447740 K.G. leverde het 35.930313 K.G. asch bevattende 11.486921 K.G. phosphorzuur.

---

[1]) De vraag of djati grondbederfster is, heeft reeds aanleiding tot gedachtenwisseling gegeven, echter slechts met het oog op de geringe humusvorming, die in de bosschen plaats vindt (J. C. Claesen, Iets over djati. Boschbouwkundig Tijdschr. Tectona 1. Noordwijk-Weltevreden 1908—9, blz. 166. — H. J. Kerbert, Is djati grondbederfster. Ibid. 1. 1908—9, blz. 301—304; 2. 1909—10, blz. 44—46. — J. C. Claesen. Antwoord aan den heer Kerbert. Ibid. 1, blz. 575).

[2]) Verslag van den Dienst van het Boschwezen in Nederl.-Indië over het jaar 1915. Batavia 1916, blz. 18.

[3]) Als het gemiddeld soortelijk gewicht werd 0,66 aangenomen.

[4]) Brandhout wordt volgens strekkende meters berekend. Het bestaat uit takken en ander houtafval, waardoor ledige ruimte ontstaat, die, met $1/3$ in rekening gebracht, afgetrokken werd.

[5]) J. S. Gamble A Manual of Indian Timbers. New ed. London 1902, blz. 532.

Het totaal der $P^2O^5$, die in de jaren 1902 tot 1915 aan den grond der djatibosschen onttrokken werd, is 17.181003 K.G. of gemiddeld per jaar 1.227212 K.G. over eene oppervlakte van 713474 H.A. [1]) of 1.72 K.G. per H.A.

Zooals bekend, neemt *Tectona* met alle gronden, ook schrale, voorlief en vooral op Java zijn verreweg de meeste harer bosschen gelegen op kalkmergels, die tot de phosphorzuurarme gronden behooren gerekend te worden. De moeielijkheid zich van de benoodigde hoeveelheden $P^2O^5$ te voorzien moet zij door hunne wortels trachten te overwinnen. In de jeugd geschied dit door een sterken penwortel. Uit een door H. J. KERBERT ingesteld onderzoek is men te weten gekomen, dat de wortel van een 31 maanden ouden boom reeds de belangrijke diepte van 140 c.M. bereikt had. [2])

Op staakhoutleeftijd sterft de penwortel af, terwijl de zijwortels zich tot een krachtig wortelstelsel ontwikkelen, dat den boom in staat stelt de beschikbare voedingsstoffen op afdoende wijze uit den grond te halen.

Volgens S. H. KOORDERS en TH. VALETON was bij ± 25 M. hooge djatiboomen geen penwortel meer voorhanden, daarentegen talrijke zijwortels, van ten hoogste 3 M. lengte, maar sterk vertakt. De grond was tot 3 M. rondom den stam met een dicht netwerk van wortels opgevuld. [3])

Tot nog toe is er niet veel van gebleken, dat de op Java met djati bedekte gronden achteruit zijn gegaan, niettegenstaande ze sedert onheugelijke tijden geëxploiteerd werden, en wel, dank zij de reusachtige toename der bevolking, in sterk toenemende mate. Men hoort wel eens van „djati-moeheid" van den grond spreken [4]), maar een onderzoek of een gebrek aan phosphorzuur daarvan de oorzaak is, heeft niet plaats gehad.

Met nadruk moet er op gewezen worden, dat de bovengenoemde 1.227212 K.G. phosphorzuur, die jaarlijks aan de gronden der djatibosschen onttrokken worden, geen werkelijk verlies, maar slechts eene verplaatsing van de $P^2O^5$ beteekent. Slechts die hoeveelheid

---

[1]) Verslag van den Dienst van het Boschwezen in Nederlandsch-Indië over het jaar 1915. Batavia 1916, blz. 1. Het doet weinig ter zake, dat de oppervlakte in vroegere jaren duizenden van hektaren kleiner was.

[2]) Worteldiepte van de djati. Boschbouwkundig Tijdschr. Tectona 1. Noordwijk-Weltevreden 1908—9, blz. 340.

[3]) Bijdrage N⁰. 7 tot de kennis der boomsoorten op Java. Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin N⁰. XLII. Batavia 1900, blz. 166.

[4]) A. E. J. BRUINSMA, Opmerkingen van een oudgediende. Boschbouwkundig Tijdschr. Tectona 3. Noordwijk—Weltevreden 1911, blz. 5.

phosphorzuur, welke deel uitmaakt van het uitgevoerde djatihout, mag als een werkelijk verlies aangemerkt worden. Van 1903 tot en met 1915 werden van Java uitgevoerd 598846 $M^3$, die bevatten 1.083743 K.G. phosphorzuur, hetgeen neerkomt op een jaarlijks verlies van 83365 K.G., eene bagatel in vergelijking met de reusachtige hoeveelheden, die met het slib der rivieren in zee afgevoerd worden. [1])

Zooals reeds opgemerkt, staat de behoefte van den djati-boom aan phosphorzuur, in schrille tegenstelling tot het feit, dat hij met elken grond — voor zoover dit zijne chemische samenstelling betreft [2]) — genoegen neemt. Het lag voor de hand, met het oog op de steenachtige afscheidingen, te veronderstellen, dat het optreden van djati kapoer in verband met de geaardheid van den bodem moest staan. THOMAS HORSFIELD, die er zich het eerst over heeft uitgelaten, was van meening, dat de schrale kalkhoudende terreinen de beste boomen

[1]) Betrouwbare cijfers bestaan in dit opzicht niet en zullen evenmin in afzienbaren tijd te verkrijgen zijn, maar om aan te toonen, om welke kwantiteiten van phosphorzuur het gaat, kunnen de volgende gegevens dienen. Volgens L. RUTTEN worden uit het Serajoegebied op Java jaarlijks afgevoerd ± 9600,000,000 K.G. slib. (Over denudatiesnelheid op Java. Verslag gewone Verg. Wis- en Natuurk. Afdeeling K. Akad. v. W. **26**. Amsterdam 1917/18, blz. 930 tabel). Volgens JUL. C. MOHR (Over het Slibbezwaar van eenige rivieren in het Serajoedal. Meded. uitgaande van het Departem. van Landbouw N⁰. 5. Batavia 1908, blz. 79) bevat dit slib gemiddeld 0,753 $^0/_0$ $P^2O^5$, zoodat aan het bovengenoemde gebied jaarlijks 72,288000 K.G. phosphorzuur onttrokken worden, hetgeen beteekent 267,7 K.G. per hektare. Tegenover dit bedrag is het verlies der gronden der djatibosschen door het onttrekken van hout van 1,72 K.G. per H.A. van geen beteekenis. Het verlies aan phosphorzuur, dat het land door het denudatieproces ondergaat, bestaat slechts in schijn, aangezien het slib, dat rijker aan $P^2O^5$ is, dan het oorspronkelijke gesteente en door middel van irrigatiewerken op de sawahs gebracht wordt of bezinkt op lage landen bij overstroomingen, aan de gronden $P^2O^5$ toevoert en dus rijker maakt. (L. G. DEN BERGER, Landbouwscheikundige onderzoekingen omtrent irrigatie op Java. Delft 1917. Proefschrift, blz. 82, 83, 97, 98). Zoo werden gevonden in de Kali Samiran: slib 0,051, 0,055, 0,043, 0,048 $^0/_0$ $P^2O^5$ (blz. 82), daarentegen in de grond van Bolgi slechts 0,022 en van Kolpandjong 0,017 $^0/_0$ $P^2O^5$, (blz. 85), het water van die rivier bevat slechts sporen.

Serajoe-gebied ± 2700 □ K.M., Java ± 125,500 □ K.M. jaarlijks 2621,534815 K.G. $P^2O^5$.

[2]) Zeer veel kieskeuriger is *Tectona* ten opzichte van de physische gesteldheid van den grond. Zij vereischt, zooals D. BRANDIS in ronde woorden zegt: „perfect drainage and dry subsoil" (t.a.p. blz. 358).

De onttrekkingen van phosphorzuur aan den grond van Java is reusachtig te noemen in verband tot hetgeen in gematigde streken is bekend geworden. Zoo onttrekt de Elbe aan Bohemen jaarlijks $1^1/_2$ millioen kilogrammen $P^2O^5$ volgens BREITENLOHNER (Verhdlg. k. k. geolog. Reichsanst. Wien 1876, blz. 175), hetgeen slechts een verlies van 0,031 K.G. per H.A. beteekent.

opleverden, terwijl djati kapoer meer in de vruchtbare streken gevonden werd [1]). Die uitspraak vindt steun in hetgeen W. J. Spaan aangaande de bosschen van Poeger (resid. Besoeki) schreef: „Daar deed zich wel het verschijnsel voor, dat op de vruchtbare, periodiek zoo vochtige zwarte grond aan den voet van het Watangangebergte veel djati kapoer, met zeer groot kalkgehalte voorkwam, terwijl hooger op, op de steenachtige hellingen dezer tertiaire heuvel het djatihout van veel beter kwaliteit is" [2]).

Daarentegen berichtte C. G. van Dentzsch, dat de meeste in de residentie Rembang, waar kalksteen en mergel de overhand hebben, gekapte boomen, voor zoover zij in den artillerie-konstructiewinkel te Soerabaja verwerkt werden, tot djati kapoer behoorden [3]). En F. Junghuhn beschouwde het, afgaande op het feit, dat deze varieteit veel op de witte kalkmergelformatie in Soerabaja en Rembang gevonden werd, als vaststaande, dat zij haar ontstaan te danken had aan de geaardheid van den bodem [4]). P. F. H. Fromberg had bij zijne beschouwing niet zoozeer het kalk- als het phosphorzuurgehalte van den bodem op het oog, waarvan hij meende, dat dit ter plaatse, waar de djati groeide, betrekkelijk hoog moest zijn [5]). G. Thoms ging zelfs zoover te meenen, dat onder de djatibosschen phosphorietbeddingen gevonden moesten worden, waarvan echter nergens iets gebleken is [6]).

Volgens J. W. H. Cordes ontwikkelen zich djatibosschen het krachtigst, „waar de grond rijk is aan onderscheidene kalkverbindingen", doch hij stemt er in toe, dat ook vulkanische gronden dikwijls goede djatiboomen voortbrengen [7]). H. J. Kerbert vond zelfs „nergens een zoo geweldige groei van de *djati* als in de afdeeling

---

[1]) C. L. Blume t.a.p. blz. 44.

[2]) Aanteekeningen over de in het boschdistrict Madioen voorkomende Djativariëteiten. Boschbouwkundig Tijdschr. Tectona **4.** 1911, blz. 473.

[3]) Aanteekeningen omtrent proeven, welke in 1852 in den Artillerie-Konstructiewinkel te Soerabaja met djatihout genomen werden. Tijdschr. voor Nijverheid in Nederl.-Indië **2.** Batavia 1852, blz. 2.

[4]) Over fossiele zoogdierbeenderen te Patihajam. Natuurk. Tijdschr. Nederl.-Indië **14.** Batavia 1857, blz. 219. — Ook Ch. C. Lugt schrijft het kalkgehalte toe „aan sommige groeiplaatsen". (Het boschbedrijf in Nederl.-Indië. Haarlem 1912, blz. 20).

[5]) Witte stof in de djati kapor. Natuurk. Tijdschr. Ned.-Ind. **16.** 1858—59, blz. 186.

[6]) t.a.p., blz. 427.

[7]) De Djati-bosschen op Java. Batavia 1881 blz. 131. — Blijkens de mededeelingen van Dietr. Brandis wordt de teakboom in Britsch-Indië op de meest uiteenloopende gronden, zooals bazalt, graniet en kalksteen, gevonden. Tot de laatstgenoemde behooren o.m. de uitnemende bosschen in het Thoungyeen-district in Tenassarim (The Forest Flora of North-West and Central India. London 1874, blz. 356).

Japara .... op lichte vulkanische gronden, die in geaardheid geheel afwijken van de typische djati-boschgronden [1]).

Statistieke opgaven ten opzichte van het aantal gekapte stammen van *djati kapoer*, tegenover die van andere variëteiten, ontbreken ten eenenmale. Als vaststaand mag in ieder geval aangenomen worden, dat de meerderheid niet tot de eerstgenoemde variëteit behoort. Volgens P. VAN REES wordt zij na de *djati-soengo* echter het meest gevonden en verbruikt [2]). Het laatste misschien in verband met hare bewerkelijkheid als timmerhout [3]).

Men mag derhalve aannemen, dat *djati kapoer* niet tot de kalk- en mergelgronden beperkt is en verder, dat evenmin alle op die gronden groeiende boomen tot deze variëteit behooren [4]). Er moeten dus nog andere invloeden zich doen gelden. Voor de beantwoording dier vraag is het in de eerste plaats noodzakelijk zich ervan te vergewissen of aan *djati kapoer* het karakter van een zelfstandige variëteit toekomt of dat men alleen met een aberratie te maken heeft, die slechts onder bepaalde omstandigheden zich vormt.

Volgens S. H. KOORDERS en TH. VALETON zou *djati kapoer*, evenals de andere variëteiten van *Tectona*, alleen aan het hout en niet op de stam te herkennen zijn [5]). Reeds P. VAN REES had echter medegedeeld: „De uiterlijke kenmerken bepalen de Javanen in de kleinere, „dunnere en geelachtige bladeren en in de fijnere schors", maar had niet achterwege gelaten er aan toe te voegen: „deze kenmerken „zijn echter bedriegelijk, de zekere worden inwendig gevonden" [6]).

---

[1]) Is de djati grondbederfster? Boschbouwkundig Tijdschr. Tectona **1**. Noordwijk-Weltevreden 1908—9, blz. 303.

[2]) Beredeneerde catalogus van houtsoorten op Java. Tijdschr. voor Nijverheid en Landbouw in Nederl.-Indië **7**. Batavia 1861, blz. 333.

[3]) M. BÜSGEN meent dan ook, dat de reputatie, die „Java-teak" in den handel heeft, terug te brengen is op leveringen van hout afkomstig van *djati kapoer* (Die Eigenschaften und Produktion des Java-Teak oder Djati. Beiheft zum Tropenpflanzer **8**, N⁰. 5. Berlin 1907, blz. 369). Ook P. GEESINK zegt, dat in 1905 en 1906 veel hout van Java werd uitgevoerd, dat voor de buitenlandsche markt totaal ongeschikt was (Staatsexploitatie van Djatibosschen op Java .... Tijdschr. voor Nijverh. en Landbouw in Nederl. Indië **75**. Batavia 1907, blz. 133).

[4]) Ook ter beantwoording van de vraag naar het zeer uiteenloopende gehalte van magnesiumoxyde blijkt een grooter aantal aschanalyses van *djati kapoer* alsmede van grondmonsters van de plaatsen, waarvan zij afkomstig zijn, in de eerste plaats een gebiedende eisch te zijn.

[5]) Bijdrage N⁰. 7 tot de kennis der boomsoorten op Java. Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin N⁰. XLII. Batavia 1900, blz. 170.

[6]) Beredeneerde catalogus der houtsoorten op Java. Tijdschr. voor Nijverheid en Landb. in Ned.-Ind. **7**. Batavia 1861, blz. 333.

Beschrijving der houtsoorten in Nederl. Oost-Indië. Tijdschr. Maatschappij voor Nijverheid (3) **7**. Haarlem 1866, blz. 29.

W. L. de Sturler wil niet alleen, wat betreft den bast en de geaardheid van het hout, wat den vorm en de kleur der bladeren betreft, *djati kapoer* van andere variëteiten onderscheiden. Ook H. J. Spaan zegt, dat sommige houtkappers bewezen van buiten aan een boom te kunnen zien, dat het *djati kapoer* is en wel „aan de „schors, den stam en de bladeren"[1]. Opmerkelijk is verder hetgeen P. van Rees aangaande de vruchten schrijft. „Men wil in de uiterst „kleine vruchten van deze soort reeds overal fijne kalkaderen ont„dekt hebben"[2]. Of dit nu werkelijk het geval is, werd nooit onderzocht, evenmin werden er pogingen in het werk gesteld, om door zaaiproeven te doen uitmaken of uit die vruchten al dan niet weder vertegenwoordigers van *djati kapoer* te voorschijn komen. De overweging, dat eerst na afloop van ongeveer eene eeuw eene dergelijke proef tot een resultaat zal kunnen leiden, mag m.i. geen beletsel zijn haar te nemen. Daarmede moest echter een tweede proef gepaard gaan, door nl. een perceeltje op kalk- of mergelgronden te beplanten met zaailingen van andere djati-variëteiten, om uit te maken of daaruit stammen van *djati kapoer* kunnen voortkomen[3].

Een laatste vraag, waarop men antwoord wenscht te ontvangen, is die naar het lot der in de stammen van *djati kapoer* afgescheiden phosphaten. De in de bosschen verrottende stammen, takken en bladeren geven de in het plantenweefsel voorhanden verbindingen van den phosphorus aan den grond in den vorm van houtasch terug. Ook de concreties moeten bij dit proces op diezelfde plaats terecht komen, ofschoon er nergens melding van gemaakt is, dat zij teruggevonden werden. Bij een geregeld boschbeheer worden zij met de stammen, waarin zij opgesloten liggen, vervoerd en naar elders verplaatst. De hoeveelheid op den bodem van de bosschen overblijvende concreties zal dus op zich zelve niet zeer groot zijn. De meeste dier stukken zijn buitendien, behalve klein van afmeting, ook zeer zacht, zoodat zij gemakkelijk verbrokkeld en tijdens den regentijd verder getransporteerd zullen worden, zoodat ter plaatse niet veel zal overblijven. Het onvermijdelijke ontledingsproces gaat natuurlijk zeer veel langzamer, aangezien het calciumphosphaat wel door de plantenwortel geassimileerd wordt, maar daarop atmospherische invloeden

[1]) Aanteekeningen over de in het boschdistrict Madioen voorkomende zoogen. djativariëteiten. Boschbouwk. Tijdschr. Tectona 4. 1911, blz. 473.

[2]) T.a.p., blz. 334.

[3]) Reeds H. ten Oever (Cordes: De Djatibosschen op Java, Boschbouwk. Tijdschr. Tectona 9. 1916. Batavia 1917, blz. 869) heeft er op gewezen, dat slechts een grondig onderzoek der zoogen. djativariëteiten op hun zaadvastheid deze kwestie tot klaarheid kan brengen.

zich zeer veel minder sterk doen gelden, zelf zeer veel minder dan bij tal van silikaten. Ik acht het dan ook zeer onwaarschijnlijk, dat de talrijke niervormige, in het gebied van Soerabaja in de de tertiaire sedimenten overdekkende klei gevonden concreties als overblijfsel van de in de *djati kapoer* gevormde afscheidingen beschouwd mogen worden zooals R. D. M. Verbeek dit aanneemt [1]). Eene analyse van J. G. Kramers gaf het volgend resultaat:

| | |
|---|---|
| $SiO^2$ . . . . | 8.81 |
| $P^2O^5$ . . . . | — |
| $CO^2$ . . . . | 38.15 |
| $Fe^2O^3 + Al^2O^3$ . . . . | 1.92 |
| $CaO$ . . . . | 48.29 |
| $H^2O$ . . . . | 1.15 |
| | 98.32 |

waaruit blijkt, dat het phosphoorzuur tot op het laatste spoor verdwenen was, hetgeen reeds Verbeek opvallend vond en waarvoor geen voorbeeld aan te halen zou zijn, want ook daar, waar eene omzetting van phosphaat tot carbonaat plaats heeft gevonden, waren steeds nog groote hoeveelheden van het phosphaat overgebleven [2]). Calciumphosphaat wordt wel door de plantenwortels gemakkelijk geassimileerd, maar de ontledende invloed van circuleerende wateren is zeer veel geringer. Buitendien is de gedaante dier concreties geheel afwijkend van die, welke in de stammen van *Tectona* aangetroffen worden.

[1]) R. D. M. Verbeek en R. Fennema. Geologische beschrijving van Java en Madoera 1. Amsterdam 1896, blz. 209.

[2]) Justus Roth. Allgemeine und chemische Geologie 1. Berlin 1879, p. 92—94, 211.

**Wiskunde.** — De Heer Brouwer biedt eene mededeeling aan: *„Over ééneénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zichzelf".* (Zesde mededeeling [1])).

§ 1. In een in 1912 in de Göttinger Nachrichten (p. 603—606 [2])) fragmentair afgedrukten brief aan R. Fricke heb ik (p. 605, noot [3])) kort aangegeven, hoe de analytische stelling van Hurwitz, dat *birationale transformaties van een Riemannsch oppervlak van het geslacht $p > 1$ onmogelijk een volledige kanonische insnijding van het oppervlak in een aequivalente kanonische insnijding kunnen overvoeren,* door middel van analysis situs kan worden bewezen, en dan blijkt door te gaan voor *alle periodieke, eeneenduidige en continue transformaties.* In het volgende zal deze opmerking nader worden gepreciseerd en gerechtvaardigd.

Zij $O$ het gegeven tweezijdige oppervlak, $I$ de verzameling der invariante punten voor de beschouwde $n$-periodieke, eeneenduidige en continue, de randen invariant latende transformatie $t$ van $O$. We nemen aan, dat elk door $I$ in $O$ bepaald gebied door $t$ in zichzelf wordt getransformeerd (hetgeen, als $t$ de indicatrix van $O$ invariant laat, steeds het geval is) en beperken onze beschouwing tot een dezer gebieden $\omega$, daarbij in het geval, dat $t$ de indicatrix van $O$ omkeert, elken eventueelen voor $t$ *niet* invarianten rand van $\omega$ tot een punt samentrekkende en dit punt aan $\omega$ toevoegende. Zij $R$ de verzameling der overige (voor $t$ invariante) randen $r_\alpha$ van $\omega$ en

[1]) Zie deze Verslagen XVII, p. 741; XVIII, p. 106; XIX, p. 737; XX, p. 24; XXI, p. 300.

[2]) Het aldaar p. 604 naar aanstaande publicaties van P. Koebe (die 1 Januari 1912 een afschrift van mijn brief aan R. Fricke had ontvangen) verwijzende citaat heeft na de correctie der drukproeven een mij onbekende hand buiten mijn medeweten ingevoegd; de aangehaalde opstellen zijn eerst na hun verschijnen te mijner kennis gekomen.

In nauw verband met mijn (in het begin van Maart 1912 afgedrukten) brief aan R. Fricke staan de Karlsruher verhandelingen over automorphe functies van 1911, het referaat waarover (Jahresber. d. D. M. V. XXI), evenals de in Gött. Nachr. 1912 verschenen mededeeling van P. Koebe over het continuïteitsbewijs, in den zomer van 1912 is afgedrukt. Het in dit referaat opgenomen verslag der voordracht van P. Koebe (in het bijzonder noot [1]) van p. 162) is in zooverre onjuist, dat in de werkelijke voordracht van P. Koebe, na de er aan voorafgegane korte discussie met mij, die p. 156—157 is weergegeven, het continuïteitsbewijs niet weder ter sprake is gekomen.

$(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, $(a_3, b_3)$, .... de kringtrekparen eener *volledige* kanonische insnijding van $\omega$. We nemen aan, dat het mogelijk is, in elk dezer kringtrekparen een $a_\nu$ zoo te kiezen, dat niet alleen $a_\nu$ zelf, doch ook zijn beide kanten door $t$ onder abstractie van de randen aequivalent worden afgebeeld (hetgeen, als $t$ alle $2n$ kringtrekken der kanonische insnijding onder abstractie van de randen aequivalent afbeeldt en de indicatrix van $O$ omkeert, steeds het geval is). Verder sluiten we uit het geval, dat hetzij geen enkel kringtrekpaar $(a_\nu, b_\nu)$ en hoogstens twee randen $r_\varkappa$, hetzij slechts één kringtrekpaar $(a_\nu, b_\nu)$ en geen enkele rand $r_\varkappa$ optreedt.

§ 2. In het geval, dat in $\omega$ minstens twee kringtrekparen $(a_\nu, b_\nu)$ optreden, verstaan we onder $\Omega$ het door de $a_\nu$ als bladscheidingen bepaalde, geen kringtrekparen meer bezittende Schottkysche overgewikkelde oppervlak van $\omega$, onder $L$ de verzameling der door een oneindig aantal passages der $a_\nu$ op $\omega$, op $\Omega$ voortgebrachte randen $l_\varkappa$, onder ${}_1a_\nu$, ${}_2a_\nu$, .... de overwikkelingsbeelden van $a_\nu$ op $\Omega$, onder $a'_\nu$ het door $t$ bepaalde beeld van $a_\nu$ op $\omega$, onder ${}_1a'_\nu$, ${}_2a'_\nu$, ... de overwikkelingsbeelden van $a'_\nu$ op $\Omega$. Laten we aan iedere ${}_\mu a_\nu$ een zoodanige ${}_\lambda a'_\nu$ beantwoorden, wiens omloopscoëfficienten tusschen de $l_\varkappa$ dezelfde absolute waarden bezitten, dan is in aansluiting hieraan een eeneenduidige continue transformatie $t'$ van $\Omega$ in zichzelf bepaald, die door de overwikkeling van $\Omega$ over $\omega$ in $t$ overgaat, evenals $t$, $n$-periodiek moet zijn en alle randen $l_\varkappa$ invariant laat. De beantwoording der vraag, of *alle* randen van $\Omega$ voor $t'$ invariant blijven, laten we in het midden, doch we komen overeen, elken eventueelen voor $t'$ *niet* invarianten rand samen te trekken tot een punt en dit punt aan $\Omega$ toe te voegen.

In het geval, dat in $\omega$ slechts één kringtrekpaar $(a, b)$ optreedt, verstaan we onder $\Omega$ het door $a$ als bladscheiding bepaalde, geen kringtrekparen meer bezittende Schottkysche overgewikkelde oppervlak van $\omega$, onder $l_1$ en $l_2$ de beide door een oneindig aantal passages van $a$ op $\omega$, op $\Omega$ voortgebrachte randen, onder ${}_1r$, ${}_2r$, .... de overwikkelingsbeelden van een (voor $t$ volgens de onderstelling invarianten) rand $r$ van $\omega$. We kunnen dan een eeneenduidige continue transformatie $t'$ van $\Omega$ in zichzelf bepalen, die door de overwikkeling van $\Omega$ over $\omega$ in $t$ overgaat, en ${}_1r$ (dus ook ${}_2r$, ${}_3r$, ....) invariant laat, zoodat ze, evenals $t$, $n$-periodiek moet zijn. De beantwoording der vraag, of *alle* randen van $\Omega$ voor $t'$ invariant blijven, laten we weer in het midden en komen overeen, elken eventueelen voor $t'$ *niet* invarianten rand samen te trekken tot een punt en dit punt aan $\Omega$ toe te voegen.

In het geval, dat in $\omega$ geen enkel kringtrekpaar $(a_\nu, b_\nu)$ optreedt, verstaan we onder $\Omega$ hetzelfde oppervlak als $\omega$ en onder $t'$ dezelfde transformatie als $t$.

In alle drie gevallen hebben we een oppervlak $\Omega$ verkregen, dat eeneenduidig en continu op een deelgebied van een bol kan worden afgebeeld en *minstens drie* randen bezit, en een $n$-periodieke eeneenduidige, continue transformatie $t'$ van $\Omega$ in zichzelf, waarvoor geen invariante punten optreden en alle randen invariant blijven.

We mogen onderstellen, dat *minstens één* der randen van $\Omega$ *geïsoleerd* is. In het tegenovergestelde geval kunnen we namelijk in $\Omega$ een gebied $g$ bepalen, op welks grens geen grenspunt van randen van $\Omega$ gelegen is, terwijl zoowel $g$ als zijn complementairverzameling randen van $\Omega$ bevat. De vereeniging van $g$ en zijn beelden voor $t', t'^2, \ldots . t'^{n-1}$ vormt een oppervlak, dat, evenals $\Omega$, minstens drie randen bezit en door $t'$ met invariante randen en zonder invariante punten in zichzelf getransformeerd wordt, dat echter bovendien een geïsoleerden rand bezit.

§ 3. Laat een in $\Omega$ willekeurig gekozen punt $P$ door $t', t'^2, \ldots . t'^{n-1}$ achtereenvolgens overgaan in $P_1, P_2, \ldots . P_{n-1}$. Een continue kurvenboog $j_P$, die $P$ en $P_1$ verbindt, vormt met zijn door $t', t'^2, \ldots . t'^{n-1}$ bepaalde beelden een gesloten continue kromme $k_P$. De verzameling $R'$ der randen $r'_\alpha$ van $\Omega$ kan worden verdeeld in een minstens drie bedragend eindig aantal van elkaar geïsoleerde deelverzamelingen $R'_1(k_P)$, $R'_2(k_P), \ldots . R'_m(k_P)$ zoodanig, dat de omloopscoëfficient van $k_P$ tusschen een tot $R'_\nu(k_P)$ en een tot $R'_\lambda(k_P)$ behoorenden rand modulo $n$ gelijk is aan een door $\nu$ en $\lambda$ bepaalde, voor $\nu = \lambda$ wegvallende waarde $c_{\nu\lambda}(k_P) \geq 0$ en $< n$. De bruikbaarheid dezer $R'_\nu(k_P)$ en de geldigheid der bijbehoorende $c_{\nu\lambda}(k_P)$ blijven behouden, als voor hetzelfde punt $P$ de boog $j_P$ discontinu wordt gewijzigd. Door $P$ en $j_P$ gezamenlijk continu te varieeren, blijkt verder, dat de rol der $R'_\nu(k_P)$ en $c_{\nu\lambda}(k_P)$ evenmin door wijziging van $P$ gestoord wordt. Kiezen we echter $P$ voldoende dicht bij $R'_h$, dan kunnen we zorgen, dat de omloopscoëfficient van $k_P$ tusschen een tot $R'_\nu$ en een tot $R'_\lambda$ behoorenden rand, als $\nu$ en $\lambda$ beide van $h$ verschillen, wegvalt en hieruit volgt onmiddellijk, dat $c_{\nu\lambda}(k_P) = 0$ voor elke $\nu$, elke $\lambda$, elke $P$ en elke $j_P$.

§ 4. Zij $\varrho$ een geïsoleerde rand van $\Omega$, $R'_0$ de verzameling der overige randen van $\Omega$, $S$ het om $R'$ aperiodiek overgewikkelde oppervlak van $\Omega$. Het oppervlak $S$ is een eeneenduidig, continu beeld van een Cartesisch vlak; zijn rand $R''$ bevat een uit $\varrho$ voort-

gekomen gedeelte $R_1''$ en een uit $R'_0$ voortgekomen gedeelte $R_2''$; deze beide gedeelten zijn van elkaar geïsoleerd.

Zij $P$ een punt van $\Omega$ in de omgeving van $\varrho$, $P_1$ zijn door $t'$ bepaald beeldpunt. We verbinden $P$ en $P_1$ in de omgeving van $\varrho$ door een zoodanigen continuen kurvenboog $j_P$, die met zijn door $t', t'^2, \ldots . t'^{n-1}$ bepaalde beelden een gesloten continue kromme $k_P$ vormt, wier omloopscoëfficient tusschen twee willekeurige randen van $\Omega$ wegvalt. De mogelijkheid, een zoodanigen boog $j_P$ te bepalen, volgt uit § 3. Zij $P_m$ het beginpunt, $P_{1m}$ het eindpunt van een overwikkelingsbeeld van $j_P$ op $S$, dan bestaat een eeneenduidige, continue transformatie $t''$ van $S$ in zichzelf, die door de overwikkeling van $S$ over $\Omega$ in $t'$ overgaat en $P_m$ in $P_{1m}$ overvoert. Daar de transformatie $t''^n$ het punt $P_m$ invariant laat, moet $t''$, evenals $t'$, $n$-periodiek zijn. Hiermede zijn we echter op een ongerijmdheid gestuit, daar een periodieke, eeneenduidige en continue transformatie van het Cartesische vlak in zichzelf zonder invariante punten niet kan bestaan.

§ 5. In het geval, dat $t$ de indicatrix van $O$ invariant laat en elken kringtrek van een volledige kanonische insnijding van $O$ mèt zijn beide kanten onder abstractie van de randen aequivalent afbeeldt, bezit $t$ deze zelfde eigenschap met betrekking tot $\omega$ (hetgeen onmiddellijk als volgt kan worden ingezien: Zij $s$ een kringtrek van $\omega$, die $\omega$ niet in meerdere gebieden verdeelt, dan beantwoordt aan een continue varieering van $s$ op $O$, als elk der randen van $\omega$ wordt samengetrokken tot een punt, dat aan $\omega$ wordt toegevoegd, een continue varieering van $s$ op $\omega$). Indien nu $\omega$ inclusief zijn grens niet identiek met $O$ was, zou $\omega$ een *door een samenhangende perfekte verzameling van voor t invariante punten afgesloten rand* bezitten en zou op grond daarvan de tot een tegenstrijdigheid voerende redeneering der §§ 3 en 4 aangaande de transformatie $t'$ van $\Omega$ van kracht blijven *ook* in het geval, dat op $\omega$ geen enkel kringtrekpaar $(a_\nu, b_\nu)$ en slechts twee randen optrêden. *Derhalve is in dit geval $\omega$ inclusief zijn grens identiek met $O$.*

---

**Scheikunde.** — De Heer J. BÖESEKEN biedt een mededeeling aan mede namens Mej. G. W. TERGAU en den Heer A. C. BINNENDIJK: *„Over den invloed van eenige zouten op het kleuren van cellulose met Benzopurpurine 4B".*

I.

Het doel van dit onderzoek was aanvankelijk om na te gaan of de rol van de zouten bij het verven van cellulose met de benzidinekleurstoffen van katalytischen of van anderen aard was.

Ik had n.l. met v. D. BERG en KERSTJENS [1]) gevonden, dat bij het acetyleeren van celstof met azijnzuuranhydride de werking van $H_2SO_4$ en jodium zuiver katalytisch was, in zoover geringe hoeveelheden dezer stoffen voldoende waren om het zeer ingewikkelde celstof-molekuul te doen aantasten. Aangezien celstof geheel onoplosbaar is in azijnzuuranhydride, vormden bovengenoemde stoffen de brug, waarop de celstof en het anhydride elkander konden ontmoeten en op elkander in konden werken. Het was niet uitgesloten, dat de anorganische zouten tusschen kleurstof en vezelstof een overeenkomstige rol speelden als zwavelzuur tusschen anhydride en cellulose, in zoo ver zij het binnentreden van de kleurstof in de vezelstof mogelijk maakten.

Het was echter uit de literatuur-opgaven wel reeds duidelijk, dat men van een katalytische werking niet mag spreken, omdat de metaal-atomen der toegevoegde zouten in hoeveelheden in de vezelstof worden opgenomen, die nagenoeg equivalent zijn aan de kleurstof, (als bisulfonzuur).

Ook was bekend, dat, wil men het benzopurpurine behoorlijk door de watten doen opnemen, in het vlot hoeveelheden zout aanwezig moeten zijn, grooter dan equimoleculair ten opzichte van het purpurine, hetgeen niet onmiddellijk opvalt, omdat het molekulair-gewicht van het purpurine groot is (680) en de kleurstof-oplossingen veelal zeer verdund zijn. Het verschijnsel is dan ook meer te vergelijken met het uitzouten van zeepen en is opgevat als een uitscheidden door de vezelstof van het daarin oplosbare kleurstofzout, waarvan

[1]) Recueil **35**, 320 (1916).

de concentratie en het vlot door toevoeging van het alkali zout belangrijk vermeerderd wordt.

Enkele voorloopige proeven deden zien, dat de hoeveelheden zout, noodig voor het uittrekken van het verfbad inderdaad *veel* grooter dan equimolekulair waren; zoo had een oplossing van 1 mg. benzopurpurine in 100 ccm. $H_2O$ of van $^1/_{68}$ millimol 500 mgr. $Na_2SO_4$ d.i bijna 40 millimol noodig om door 1 gram watten te worden uitgetrokken.

Dit werd nog met een geheele reeks andere zouten bevestigd, steeds was de hoeveelheid zout noodig om een bijna volledige ontkleuring van het vlot te bewerken, vele honderden malen grooter dan de hoeveelheid benzopurpurine.

Aangezien hierbij tevens waarnemingen werden gedaan, die wellicht eenig licht kunnen werpen op het verfproces werd het onderzoek met een aantal metaalzouten kwantitatief voortgezet.

Bij de voorloopige proeven, waarbij telkens 1 gram gereinigde en ontvette watten gedurende 10 minuten bij 65° in porceleinen bekertjes werden blootgesteld aan de werking van 1 milligram zuiver (zoutvrij) benzopurpine 4B opgelost in 100 ccm. $H_2O$ onder toevoeging van ten opzichte van elkander equimolekulaire hoeveelheden van een aantal zouten, werd gevonden, dat de kleurintensiteit van het vlot bij gebruik van de sulfaten van natrium, kalium en ammonium wel tennaaste bij, maar niet *volkomen* gelijk was.

| Zout. | Hoeveelheid. | Effect. |
|---|---|---|
| $(NH_4)_2\ SO_4$ | 0.0661 gr. | Weinig verschil; lichter wordend in de richting ↓ |
| $Na_2\ SO_4$ 10 aq. | 0.1612 „ | |
| $K_2\ SO_4$ | 0.0872 „ | |
| $Mg\ SO_4$ | 0.0602 „ | duidelijk lichter |
| $Al_2\ (SO_4)_3$ | 0.1111 „ | uitgevlokt in het vlot |

Het magnesiumsulfaat werkt duidelijk krachtiger, hetgeen van het tweewaardige kation ten opzichte van de zure kleurstof te verwachten was, terwijl door het driewaardige aluminium de kleurstof reeds in het vlot was neergeslagen, vóórdat de vezel bereikt was.

Een tweede serie gaf het volgende resultaat: (Zie tabel volgende pag.).

Er was dus weer een duidelijk verschil tusschen een en tweewaardige metalen *onderling*.

Hetgeen hier vooral opvalt, is dat de krachtiger werking samen-

| Zout. | Hoeveelheid in mg. | Hoeveelheid in mol. | Opmerkingen. |
|---|---|---|---|
| $Li_2\,SO_4$ 1 aq. | 60.5 | $^1/_{2000}$ | Kleur van het vlot neemt in de richting van de pijl af. Tusschen Li en Na is duidelijk verschil. |
| $Na_2\,SO_4$ 10 aq. | 161.2 | " | |
| $Mg\,SO_4$ 7 aq. | 123.3 | " | |
| $_3Cd\,SO_4$ 8 aq. | 128.3 | $^1/_{6000}$ | |
| $Zn\,SO_4$ 7 aq. | 143.8 | $^1/_{2000}$ | |
| $Al_2\,(SO_4)_3$ 18 aq. | 111.1 | $^1/_{6000}$ | Uitvlokking van de kleurstof in het vlot; vezel blijft ongekleurd. |
| $Cr_2\,(SO_4)_3$ 18 aq. | 65.4 | " | |
| $Fe_2\,(SO_4)_3$ | 85.5 | " | |

hangt met de plaats van het metaal in de spanningreeks en niet met het atoomgewicht, daar niet alleen het natrium meer uittrekt dan het lichtere lithium, maar ook het zink meer dan het *zwaardere* cadmium.

Het magnesium schijnt hier een uitzondering te maken, het bleek echter, dat dit metaal niet met Zn en Cd maar met de alkalische aardmetalen, waarmede het ook in andere opzichten meer overeenkomst heeft dan met zink en cadmium, moet vergeleken worden.

| Zout. | Hoeveelheid in mg. | Hoeveelheid in mol. | Opmerkingen. |
|---|---|---|---|
| $Hg\,Cl_2$ | 135.6 | | Kleur van het vlot neemt in de richting van de pijl af. |
| $Mg\,Cl_2$ 6 aq. | 101.7 | | |
| $Cd\,Cl_2$ 2 aq. | 109.6 | $^1/_{2000}$ | |
| $Ca\,Cl_2$ 6 aq. | 109.5 | | |
| $Ba\,Cl_2$ 2 aq. | 104.1 | | |

Uit dit overzicht blijkt overtuigend, dat het magnesium behoort tot de reeks $Mg < Ca < Ba$ waarvan het de minst krachtige term uitmaakt, terwijl het cadmium tot de reeks $Hg < Cd < Zn$ moet gerekend worden.

In beide reeksen zijn de meest electropositieve metalen de krachtigste. De reeksen doorkruisen elkander en daar het magnesium krachtiger electropositief is dan het cadmium en het zink en toch minder sterk uittrekt, moet er naast de electro-positieve eigenschap nog een andere zijn, die de uittrekkende werking van het metaal bepaalt.

II.

Ten einde de in de vorige paragraaf vermelde resultaten te bevestigen, werd het onderzoek uitgebreíd en werd tevens de schatting op het oog in het uitgetrokken vlot vervangen door een kwantitatieve bepalingswijze.

In plaats van watten werden strengetjes katoen van 1 gram genomen, die eerst geweekt waren in zeepwater en daarna goed uitgespoeld. Zij werden gedurende 10′ bij 65° in een bad gebracht van 1 milligram zorgvuldig gezuiverd benzopurpurine 4B en verschillende hoeveelheden zouten in 500 ccm. gedistilleerd water.

Na het verven werd het vlot snel afgekoeld en in een colorimeter van C. H. Wolf met standaardoplossingen van bekende concentratie vergeleken.

Hierbij moest eerst nagegaan worden of de wet van Behr geldig was en $a$ cm. eener n-normale oplossing een gelijke kleursintensiteit had als $p\,a$ cm. eener $^1/p$ n-normale oplossing, hetgeen inderdaad het geval was.

Het was noodzakelijk om voor de verdunningen gedistilleerd water te gebruiken; leidingwater gaf een andere nuance aan het gezichtsveld, waardoor de gevoeligheid afnam.

Deze gevoeligheid kon bij eenige oefening voor het benzopurpurine en bij verdunningen van hoogstens 1 milligram in 100 ccm. opgevoerd worden tot 0,1 cm., bij een laagdikte van 10 à 15 cm., d. i. derhalve van minder dan één procent.

Vervolgens moest onderzocht worden hoe de hoeveelheid kleurstof, welke door het katoen werd opgenomen — bij gebruik van een bepaalde hoeveelheid zout — samenhing met de concentratie van de kleurstof.

Men zoude daarbij een betrekking verwachten van den aard der adsorptievergelijking.

Echter bleek de hoeveelheid kleurstof die op de vezel werd neergeslagen vrijwel onafhankelijk te zijn van de concentratie van de kleurstof in het vlot.

Er werd daartoe achtereenvolgens 1, $^1/_2$, $^1/_3$ en $^1/_4$ mgr. benzopurpurine opgelost in 100 ccm. $H_2O$, waarin 161,2 mgr. $Na_2SO_4$ 10 aq. en hierin 1 gr. katoen gedurende 10′ bij 65° geverfd, daarna werd het uitgeputte vlot met de oorspronkelijke oplossing vergeleken (zie tabel volgend pag.).

Het is te verwachten, dat deze onafhankelijkheid niet meer zal gelden voor hoogere concentraties van de kleurstof. Daar het ons echter slechts te doen was om den invloed van de electrolyten na te

gaan en het effect daarvan er veel overzichtelijker door werd,

| Conc. Benzopurpurine. | Verandering der kleurintensiteit. | Door de vezel opgenomen. |
|---|---|---|
| 1 mgr. | 15 cm na het verven = 14 cm oorspr. vl. | 0.066 mgr. |
| 1/2 " | " = 13 " " | 0.066 " |
| 1/3 " | " = 12 " " | 0.066 " |
| 1/4 " | " = 11.1 " " | 0.065 " |

hebben wij ons aanvankelijk tot de concentratie van hoogstens 1 mgr. per 100 ccm. bepaald.

Daarenboven konden met deze geringe concentraties de colorimetrische bepalingen — zonder verdunning — direkt worden uitgevoerd.

Er bleek verder, dat de hoeveelheid opgenomen kleurstof afhankelijk was van de concentratie van de electrolyt, *echter slechts tot een zekere grens*; een concentratievermeerdering boven 10 millimol veroorzaakt veelal geen verhooging meer van de hoeveelheid purpurine, die op het katoen wordt neergeslagen.

Een nader onderzoek zal moeten uitmaken of dit te wijten is aan een verzadiging van de katoenen vezel voor de electrolyt, waardoor een verdere verhooging van de conc. in het bad, de conc. in de vezel praktisch onveranderd laat en de praecipiteerende werking aldus niet boven een zeker bedrag uit kan komen.

Wij willen er hier niet nader op ingaan, omdat dit buiten het bestek van deze mededeeling ligt.

*A. Vergelijking van de werking van* $MgSO_4$ *7 aq*, $(CdSO_4)_3 8H_2O$ *en* $Zn\,SO_4$ *7 aq.*

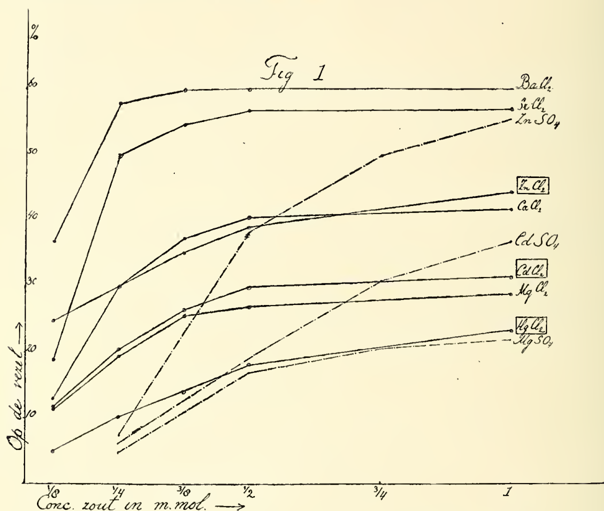
Hierbij werden verschillende concentraties van de zouten genomen en overigens als boven de uitputting van het vlot (1 mg. purpurine per 500 ccm.) bepaald. Daaruit door aftrek de hoeveelheid kleurstof, die door het katoen (1 gram) was opgenomen (steeds bij 65° gedurende 10 minuten).

Werd bijv. gevonden, dat een kolom van 15 cm. na het verven dezelfde kleurintensiteit had als 9.2 cm. vóór het verven, dan was in het bad $9.2/15 \times 100\,\% = 61.5\,\%$ en had de vezel dus 38.5 % opgenomen.

De bovenvermelde bepalingen werden nog gecontroleerd door verschillende der uitgetrokken oplossingen met elkander te vergelijken.

Zoo moesten 15 cm. der $ZnSO_4$ opl. van 0.25 millimol = 14.5 cm. der equimolaire $MgSO_4$ opl. zijn; 15 cm. der $ZnSO_4$ opl. 0.33 millimol = 13.4 cm. der equimolaire $CdSO_4$ opl. en 13.2 cm. der equimolaire $MgSO_4$ opl. enz. enz., hetgeen immer het geval was.

De in het schema opgenomen waarnemingen zijn ten deele op de grafische voorstelling I weergegeven.




*B. Vergelijking van de werking van de chloriden van Mg, Ca, Sr, Ba en van Zn, Cd en Hg.*

Aangezien de concentratie dezer zouten niet nauwkeurig door weging is vast te stellen, werden standaardoplossingen gemaakt, waarvan het gehalte titrimetrisch werd vastgesteld (volgens VOLHARD). Deze oplossingen werden verdund tot op een gehalte van 4 millimol per 160 ccm. (284 mg chloor).

Elke ccm. bevat dus $^1/_{40}$ millimol.

Aan het bad van 1 mgr. benzopurpurine in ± 0.5 Liter gedistilleerd water werden nu respectievelijk 5 ($^1/_8$ millimol) 10 ($^1/_4$ millimol) 15 ($^3/_8$ millimol) 20 ($^1/_2$ millimol) en 40 (één millimol) ccm. der verschillende zoutoplossingen toegevoegd en als boven 10 minuten op 65° met 1 gram katoen in aanraking gelaten.

Daarna werden de uitgeputte baden met de oorspronkelijke kleurstofoplossing vergeleken en aldus hun gehalte vastgesteld; ter controle

TABEL I.

| Zout. | Hoeveelheid in mg. | Hoeveelheid in millimol. | Kleurintensiteit. | In de vezel opgenomen. |
|---|---|---|---|---|
| $Mg\ SO_4$ 7 aq. | 61.7 | 0.25 | 15 cm nà verven = 14.3 vóór | 4.5 % |
| „ | 82.2 | 0.33 | „ = 13.4 „ | 10.8 „ |
| „ | 123.3 | 0.50 | „ = 12.5 „ | 16.7 „ |
| „ | 184.7 | 0.75 | „ = 11.9 „ | 20.7 „ |
| „ | 246.6 | 1.0 | „ = 11.7 „ | 22.0 „ |
| „ | 369.9 | 1.5 | „ = 11.2 „ | 25.3 „ |
| „ | 493.2 | 2.0 | „ = 11.0 „ | 26.7 „ |
| $Zn\ SO_4$ 7 aq. | 71.9 | 0.25 | 15 cm nà verven = 13.8 vóór | 7.5 % |
| „ | 95.9 | 0.33 | „ = 11.9 „ | 20.7 „ |
| „ | 143.8 | 0.50 | „ = 9.2 „ | 38.5 „ |
| „ | 215.7 | 0.75 | „ = 7.5 „ | 50.0 „ |
| „ | 287.6 | 1.0 | „ = 6.7 „ | 55.3 „ |
| „ | 431.4 | 1.5 | „ = 6.5 „ | 56.7 „ |
| „ | 575.2 | 2.0 | „ = 6.5 „ | 56.7 „ |
| $\frac{1}{3}\{(Cd\ SO_4)_3\ 8H_2O\}$ | 64.1 | 0.25 | 15 cm nà verven = 14.1 vóór | 6.0 % |
| „ | 85.5 | 0.33 | „ = 13.2 „ | 12.0 „ |
| „ | 128.3 | 0.5 | „ = 12.1 „ | 19.0 „ |
| „ | 192.4 | 0.75 | „ = 10.3 „ | 31.3 „ |
| „ | 256.6 | 1.0 | „ = 9.5 „ | 37.7 „ |
| „ | 384.9 | 1.5 | „ = 9.1 „ | 39.3 „ |
| „ | 513.2 | 2.0 | „ = 9.1 „ | 39.3 „ |

werden de uitgeputte baden van verschillende zouten ook onderling vergeleken, waarbij nooit afwijkingen van eenig belang werden geconstateerd.

De uitslag van het onderzoek is in tabel II, en in de grafische voorstelling I weergegeven.

Vooral uit de laatste is onmiddellijk te zien, dat het resultaat van onze voorloopige waarnemingen volkomen bevestigd is.

Er komt duidelijk uit, dat het magnesium inderdaad tot de groep der alkalische aardmetalen behoort en dat aan de andere zijde zink, cadmium en kwikzilver een natuurlijke groep vormen.

TABEL II.

| Zout. | Conc. in millimol. | Kleurintensiteit. | In de vezel opgenomen. |
|---|---|---|---|
| $MgCl_2$ | 1/8 | 15 cm vóór het verven = 13.3 cm er na. | 11.3 % |
| $CaCl_2$ | „ | „ = 13.1 „ | 12.9 „ |
| $SrCl_2$ | „ | „ = 12.1 „ | 18.8 „ |
| $BaBl_2$ | „ | „ = 9.5 „ | 36.7 „ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| $ZnCl_2$ | „ | „ = 11.2 „ | 24.7 „ |
| $CdCl_2$ | „ | „ = 13.2 „ | 11.5 „ |
| $HgCl_2$ | „ | „ = 14.2 „ | 5.0 „ |
| $MgCl_2$ | 1/4 | 15 cm vóór het verven = 12.1 cm er na. | 19.5 % |
| $CaCl_2$ | „ | „ = 10.5 „ | 30.0 „ |
| $SrCl_2$ | „ | „ = 7.5 „ | 50.0 „ |
| $BaCl_2$ | „ | „ = 6.3 „ | 58.0 „ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| $ZnCl_2$ | „ | „ = 10.5 „ | 30.0 „ |
| $CdCl_2$ | „ | „ = 11.9 „ | 20.5 „ |
| $HgCl_2$ | „ | „ = 13.5 „ | 10.0 „ |
| $MgCl_2$ | 3/8 | 15 cm vóór het verven = 11.2 cm er na. | 25.5 % |
| $CaCl_2$ | „ | „ = 9.4 „ | 37.5 „ |
| $SrCl_2$ | „ | „ = 6.8 „ | 54.5 „ |
| $BaCl_2$ | „ | „ = 6.0 „ | 60.0 „ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| $ZnCl_2$ | „ | „ = 9.7 „ | 35.3 „ |
| $CdCl_2$ | „ | „ = 11.0 „ | 26.7 „ |
| $HgCl_2$ | „ | „ = 12.9 „ | 14.0 „ |
| $MgCl_2$ | 1/2 | 15 cm vóór het verven = 10.9 cm er na. | 26.7 % |
| $CaCl_2$ | „ | „ = 8.9 „ | 40.7 „ |
| $SrCl_2$ | „ | „ = 6.5 „ | 56.7 „ |
| $BaCl_2$ | „ | „ = 6.0 „ | 60.0 „ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| $ZnCl_2$ | „ | „ = 9.1 „ | 35.3 „ |
| $CdCl_2$ | „ | „ = 10.5 „ | 30.0 „ |
| $HgCl_2$ | „ | „ = 12.3 „ | 18.0 „ |
| $MgCl_2$ | 1 | 15 cm vóór het verven = 10.6 cm er na. | 29.3 % |
| $CaCl_2$ | „ | „ = 8.7 „ | 42.0 „ |
| $SrCl_2$ | „ | „ = 6.5 „ | 56.7 „ |
| $BaCl_2$ | „ | „ = 6.0 „ | 60.0 „ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| $ZnCl_2$ | „ | „ = 8.3 „ | 44.7 „ |
| $CdCl_2$ | „ | „ = 10.2 „ | 32.0 „ |
| $HgCl_2$ | „ | „ = 11.5 „ | 23.3 „ |

TABEL III.

| Zout | Concentratie in millimol | Kleursintensiteit | In de vezel opgenomen |
|---|---|---|---|
| $MgCl_2$ | 1/4 | 15 cm. voor het verven = 14.4 cm. er na | 4.0 % |
| $CaCl_2$ | " | " = 11.0 " | 26.7 " |
| $SrCl_2$ | " | " = 10.0 " | 33.0 " |
| $BaCl_2$ | " | " = 9.0 " | 40.0 " |
| . . . . . | . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . |
| $ZnCl_2$ | " | " = 13.9 " | 7.3 " |
| $CdCl_2$ | " | " = 14.0 " | 6.7 " |
| $HgCl_2$ | " | " = 14.5 " | 3.3 " |
| $MgCl_2$ | 1/2 | 15 cm. voor het verven = 13.3 cm. er na | 11.3 % |
| $CaCl_2$ | " | " = 8.5 " | 43.3 " |
| $SrCl_2$ | " | " = 7.9 " | 47.3 " |
| $BaCl_2$ | " | " = 7.2 " | 52.0 " |
| . . . . . | . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . |
| $ZnCl_2$ | " | " = 9.5 " | 36.7 " |
| $CdCl_2$ | " | " = 12.7 " | 15.3 " |
| $HgCl_2$ | " | " = 13.7 " | 8.7 " |
| $MgCl_2$ | 3/4 | 15 cm. voor het verven = 12.5 cm. er na | 16.7 % |
| $CaCl_2$ | " | " = 7.7 " | 48.7 " |
| $SrCl_2$ | " | " = 7.3 " | 51.3 " |
| $BaCl_2$ | " | " = 7.0 " | 53.3 " |
| . . . . . | . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . |
| $ZnCl_2$ | " | " = 8.2 " | 45.3 " |
| $CdCl_2$ | " | " = 12.1 " | 19.3 " |
| $HgCl_2$ | " | " = 13.3 " | 11.3 " |
| $MgCl_2$ | 1 | 15 cm. voor het verven = 12.3 cm. er na | 18.0 % |
| $CaCl_2$ | " | " = 7.6 " | 49.3 " |
| $SrCl_2$ | " | " = 7.3 " | 48.7 " |
| $BaCl_2$ | " | " = 7.0 " | 53.3 " |
| . . . . . | . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . |
| $ZnCl_2$ | " | " = 8.1 " | 46.0 " |
| $CdCl_2$ | " | " = 11.5 " | 23.3 " |
| $HgCl_2$ | " | " = 13.3 " | 11.3 " |
| Als boven | 1 1/2 | Kleursintensiteit als bij 1 millimol zout | Percentage opgenomen in de vezel als bij 1 millimol |

Hoewel de lijnen van calcium en zink vrijwel samenvallen hebben zij in werkelijkheid niet veel met elkander te maken.

*C.* Ten einde de beteekenis van dit resultaat nog te bevestigen, hebben wij het gedrag van deze zelfde reeks van zouten tegenover een tienmaal geconcentreerder benzopurpurine-oplossing onderzocht. De tot nog toe gebezigde kwantitatieve bepaling kon hierbij echter niet ongewijzigd worden toegepast; de kleurintensiteit der oplossingen was veel te groot, dan dat de verschillen door eenvoudige vergelijking der vloeistoflagen kon worden bepaald.

Wij hebben daarom eerst getracht door praecipitatie met kalialuin en weging van het neerslag de hoeveelheid kleurstof te bepalen; hierbij werden echter afwisselende cijfers verkregen. Ook de hoeveelheid asch in deze neerslagen was te gering om tot een doeltreffende methode te voeren.

De colorimetrische methode werd nu als volgt gewijzigd: 10 ccm. van het uitgeputte vlot werd tot 100 ccm. verdund en deze oplossing werd nu vergeleken met eene, waarin zich 1 mgr. benzopurpurine op 500 ccm. bevond. De door vergelijking gevonden concentraties werden nu met tien vermenigvuldigd, om de conc. van de kleurstof in de uitgeputte vloeistof te leeren kennen.

Wij hadden ons eerst er van overtuigd, dat door verdunning van de opl. van 10 mgr. in 500 ccm. 1 op 10 een vloeistof werd verkregen, waarvan de intensiteit gelijk was aan de standaardoplossing (1 mgr. op 500 ccm.), zoodat deze verdunningsmethode toelaatbaar geacht werd.

Tabel III geeft het overzicht van het bereikte resultaat.

Het karakter van de verflijnen is gelijk aan dat van het tienmaal verdundere verfbad; de opvolging der metaalzouten is volkomen dezelfde gebleven. Ook nu zien wij het magnesium zich aansluiten bij de groep der alkalische aardmetalen als minstkrachtige representant. Opvallend maar niet vreemd is de betrekkelijk zeer geringe werking, die het uitoefent; het verwijdert zich n.l. aanzienlijk van het $Ca < Sr < Ba$ en neemt aldus in die groep een eenigermate afzonderlijke plaats in.

Ook het zink schijnt in de groep der zware tweewaardige metalen door haar betrekkelijk krachtige werking eenigszins apart te staan.

*D.* Met het oog op de overeenkomst tusschen zink en elementen uit de zevende en achtste groep in hun tweewaardigen vorm werd het gedrag van mangaan, ijzer, cobalt en nikkel onderzocht, waarvoor de sulfaten werden uitgekozen. Hierbij deed zich de moeielijk-

heid voor, dat de zouten dier metalen zelve een kleur hadden, zoodat een correctie moest worden aangebracht.

Er werd eerst uitgemaakt, dat bij de gebezigde zout-concentraties er van het zout zelve zoo weinig in de vezel werd opgenomen, dat daardoor geen waarneembare kleursverandering intrad; dit werd natuurlijk uitgevoerd, zonder dat er benzopurpurine in het bad aanwezig was.

TABEL IV.

| Zout. | Conc. in millimol. | Kleurintensiteit. | Hoeveelheid kleurstof in de vezel. |
|---|---|---|---|
| $FeSO_4$ | 1/8 | 15 cm nà het verven = 14.8 cm er vóór. | 1 % |
| $MnSO_4$ | „ | „ = 13.9 „ | 7.3 „ |
| $CoSo_4$ | „ | „ = 11.5 „ | 23.3 „ |
| $NiSO_4$ | „ | „ = 10.5 „ | 30.0 „ |
| $FeSO_4$ | 1/4 | 15 cm nà het verven = 14.4 cm er vóór. | 4.0 % |
| $MnSO_4$ | „ | „ = 13.2 „ | 12.0 „ |
| $CoSO_4$ | „ | „ = 10.6 „ | 33.3 „ |
| $NiSO_4$ | „ | „ = 9.3 „ | 38.0 „ |
| $FeSO_4$ | 3/8 | 15 cm nà het verven = 14.2 cm er vóór. | 5.3 % |
| $MnSO_4$ | „ | „ = 13.0 „ | 13.3 „ |
| $CoSO_4$ | „ | „ = 9.5 „ | 36.7 „ |
| $NiSO_4$ | „ | „ = 8.5 „ | 40.7 „ |
| $FeSO_4$ | 1/2 | 15 cm nà het verven = 14.2 cm er vóór. | 5.3 % |
| $MnSO_4$ | „ | „ = 12.9 „ | 14.0 „ |
| $CoSO_4$ | „ | „ = 9.2 „ | 38.7 „ |
| $NiSO_4$ | „ | „ = 8.5 „ | 43.3 „ |
| $FeSO_4$ | 1 | 15 cm nà het verven = 14.1 cm er vóór. | 6.0 % |
| $MnSO_4$ | „ | „ = 12.9 „ | 14.0 „ |
| $CoSO_4$ | „ | „ = 9.2 „ | 38.7 „ |
| $NiSO_4$ | „ | „ = 8.0 „ | 46.7 „ |

Nu zal, wanneer kleurstof en zout tegelijkertijd aanwezig zijn, er vermoedelijk meer zout in de vezel dringen; deze hoeveelheden

waren echter zeer gering, aangezien het aschgehalte van de vezelstof na kleuring niet meer dan 3 milligram bedroeg.

De bovenbedoelde correctie bestond nu daarin, dat in de standaardoplossing een hoeveelheid zout werd gedaan gelijk aan die van het uitgeputte vlot. Daarmede was de font wel niet geheel uitgeschakeld, omdat *on*gelijke vloeistoflagen met elkander moeten vergeleken worden; aangezien echter de kleursintensiteit van de zeer verdunde zoutoplossing zeer gering is vergeleken bij die van het benzopurpurine, kon deze fout wel verwaarloosd worden.

De oplossingen van het ferrosulfaat, moesten voor elke bepaling versch bereid worden, omdat er na eenigen tijd tengevolge van oxydatie uitvlokking van basisch ferrisulfaat plaats vond. Daar dit toch niet geheel te voorkomen was, geven wij de cijfers voor dit zout met eenig voorbehoud.

Van de overige zouten werden standaardoplossingen gemaakt bevattende $^1/_{40}$ millimol per ccm. waarvan respectievelijk 5, 10, 15, 20 en 40 cc. genomen werden. Overigens werd zooals onder *B* pag. 618 beschreven is gewerkt met uitzondering, dat een temperatuur van 70° werd gekozen.

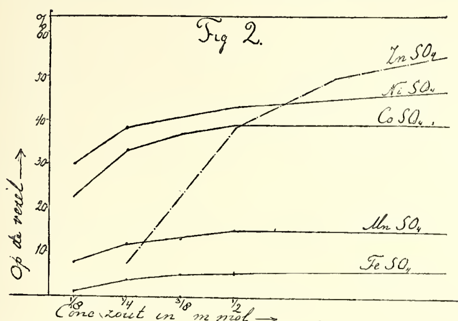
Vooreerst zien wij, dat het zink en ook het cadmium zich bij deze metalen eenigermate aansluit. Opvallend is het steile verloop van de zinklijn, iets dat wij bij het zinkchloride in de geconcentreerde benzopurpurine-oplossing ook reeds gevonden hadden. Wij kunnen vooralsnog niet beslissen of dit op toevallige afwijkingen berust, of dat de hoogere temperatuur er de schuld van draagt.

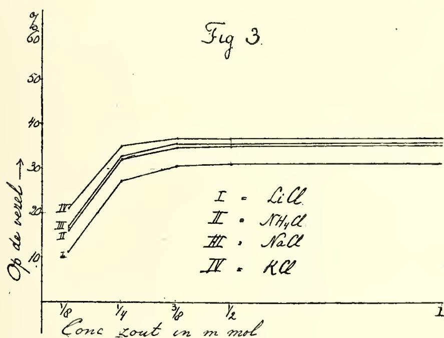
Wat de metalen van de ijzergroep zelve betreft, zien wij, dat de praecipiteerende werking toeneemt met het rang-getal der elementen. Hier valt het mangaan buiten, maar de verschillen tusschen mangaan en ijzer zijn zeer gering. Wij hebben de onderzoekingen ook met de *chloriden* van mangaan, cobalt en nikkel uitgevoerd en daarbij dezelfde volgorde: $Mn < Co < Ni$ gevonden met bijna dezelfde getallen.

Dit resultaat is derhalve in overeenstemming met hetgeen wij bij de volgorde zink, cadmium, kwikzilver hebben gevonden, dat het praecipitatie-vermogen niet direct samenhangt met het atoomgewicht der elementen, maar met een bijzondere chemische eigenschap bijv. de electro-affiniteit, maar ook niet uitsluitend daarmede, omdat anders de werking van het zink en het magnesium niet goed te begrijpen zouden zijn (zie overigens fig. 2).

*E.* Bij onze voorloopige proeven hadden wij waargenomen, dat het lithiumsulfaat een geringere werking uitoefende dan het natrium-

sulfaat; wij hebben deze waarnemingen kwantitatief herhaald met de chloriden en aangevuld met $NH_4Cl$ en KCl. Met uitzondering




van die voor het lithium liggen de getallen zoo dicht bij elkander, dat de afwijkingen in het gebied van de experimenteele fout komen te liggen.

Toch meenen wij de volgorde $Li < NH_4 < Na < K$ als de juiste te mogen aannemen, in overeenstemming met de stijgende electro-affiniteit. (Tabel V en fig. 3).

Er werd ook bij de alkalimetalen spoedig een grenswaarde bereikt, die bij ± 33°/₀ ligt, derhalve belangrijk lager dan van de alcalische aardmetalen ($BaCl_2 = 60\%$) en ongeveer op dezelfde hoogte als die van de andere metalen van de tweede groep met uitzondering van het kwikzilver, mangaan en ijzer, die veel lager liggen.

Wij hebben bij de fixeering van het zure benzopurpurine onze

aandacht onwillekeurig gevestigd gehouden op het metaal. Door dat wij gedwongen waren eenige chloriden te onderzoeken om het overzicht der alkalische aardmetalen te verwerven, hebben wij de werking van enkele chloriden met die der sulfaten kunnen vergelijken. De grafische voorstellingen geven wel een verschuiving der werking aan naar lagere concentraties, essentieele verschillen hebben wij, zooals trouwens te verwachten was, in geen geval aangetroffen.

TABEL V.

| Zout. | Conc. in millimol. | Kleurintensiteit. | Hoeveelheid kleurstof in de vezel. |
|---|---|---|---|
| LiCl | 1/8 | 15 cm nà het verven = 13.3 cm er vóór. | 11.3 % |
| $NH_4Cl$ | „ | „ = 12.6 „ | 16.0 „ |
| NaCl | „ | „ = 12.5 „ | 16.7 „ |
| KCl | „ | „ = 11.8 „ | 21.0 „ |
| LiCl | 1/4 | 15 cm nà het verven = 10.8 cm er vóór. | 27.5 % |
| $NH_4Cl$ | „ | „ = 10.2 „ | 32.0 „ |
| NaCl | „ | „ = 10.1 „ | 32.5 „ |
| KCl | „ | „ = 9.8 „ | 34.7 „ |
| LiCl | ½ | 15 cm nà het verven = 10.4 cm er vóór. | 30.7 % |
| $NH_4Cl$ | „ | „ = 9.8 „ | 35.0 „ |
| NaCl | „ | „ = 9.7 „ | 35.5 „ |
| KCl | „ | „ = 9.5 „ | 36.7 „ |
| LiCl | 3/4 | 15 cm nà het verven = 10.3 cm er vóór. | 31.3 % |
| $NH_4Cl$ | „ | „ = 9.8 „ | 35.0 „ |
| NaCl | „ | „ = 9.7 „ | 35.5 „ |
| KCl | „ | „ = 9.5 „ | 36.7 „ |
| idem. | 1 | Zelfde waarden als bij 3/4 millimol. | idem. |

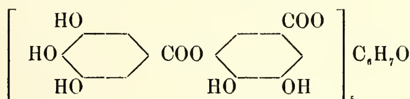
Het onderzoek zal in verschillende richtingen worden voortgezet, waarbij in de eerste plaats meer aandacht zal worden gewijd aan den invloed van de temperatuur.

November 1918.

*Organisch Chem. Lab. der Technische Hoogeschool Delft.*

**Scheikunde.** — De Heer J. BÖESEKEN doet, mede namens Mej. W. M. DEERNS, eene mededeeling over: *„De invloed van de electrische geleidbaarheid van galnotenlooistof en boorzuur op elkander in verband met de samenstelling der looistoffen."*

Door de onderzoekingen van EMIL FISCHER[1]) en van anderen over de polydepsiden, is het nu wel zeer waarschijnlijk, dat de galnotenlooistof in hoofdzaak bestaat uit een mengsel van de pentadigalloylaethers der $\alpha$- en $\beta$-glucose, waarbij de beide galloylgroepen zoodanig aan elkander gekoppeld zijn, dat de carboxylgroep van het eene looizuurmolekuul met een der metastandige OH-groepen van de andere looizuurrest veresterd is, aldus:




Is deze opvatting juist, dan zal de invloed van de geleidbaarheid dezer stof op dien van het boorzuur zeer aanzienlijk moeten zijn n.l. ongeveer overeen moeten komen met dien van vijf mol. pyrogallol + vijf mol. pyrocatechine per molekuul van de looistof.

Hierbij moeten echter twee omstandigheden worden overwogen. Ten eerste heeft een looistofoplossing tengevolge van het hooge molekulair-gewicht (± 1700) het karakter van een colloïdale oplossing en is het a priori niet zeker, dat deze zich als een gewone oplossing zal gedragen.

Een kwalitatieve proef maakte echter uit, dat de geleidbaarheidsverhooging zeer groot was, zoodat zich *de looistofoplossing tegenover dat verschijnsel volkomen normaal gedroeg.*

In de tweede plaats mag de looistof niet, zooals wij boven gedaan hebben, met een combinatie van het pyrogallol en van het pyrocatechine worden vergeleken, maar met eene van de esters van het galluszuur en van het protocatechuzuur.

Wij hebben daarom eerst den invloed gemeten, die de geleidbaarheid van de *galluszure methylester* op die van boorzuur uitoefent.

[1]) Berichte **45**, 915 (1912).

Geleidbaarheidsverhooging eener 0.5 mol $H_3BO_3$ oplossing bij 25° in KOHLRAUSCH-HOLBORN-eenheden $\times 10^6$.

| Conc. | Pyrocatechine. | Pyrogallol. | Galluszuur. | Galluszure methylester. | Galappel-looistof. |
|---|---|---|---|---|---|
| $^1/_{16}$ m. | 137.2 | 136.2 | 61.8 | — | — |
| $^1/_{32}$ " | 88.3 | 103.3 | 27.9 | 212.5 | |
| $^1/_{64}$ " | | | 11.1 | 137.8 | |
| $^1/_{128}$ " | | | 1.5 | 89.5 | |
| $^1/_{256}$ " | | | —9.3 | 53.1 | |
| $^1/_{512}$ " | | | —13.5 | 30.7 | |
| $^1/_{1024}$ " | | | —14 | | |

Deze invloed bleek zeer groot te zijn.

Dat hij grooter zou zijn dan van het galluszuur, hadden wij verwacht. Uit de onderzoekingen betreffende vrije zuren is nl. gebleken, dat hier twee invloeden zich doen gelden; de eerste is de al of niet verhoogende werking van boorzuur op de stof; de tweede is de *verlagende* werking van het boorzuur als *medium* op de geleidbaarheid van de zuren.

Bij een zuur van de sterkte van galluszuur is deze verlagende werking vrij aanzienlijk; de dissociatie-constante is $= \pm 4 \times 10^{-5}$, staat dus tusschen die van glutaarzuur en adipinezuur.

Men kan daaruit de verlagende werking van verschillende verdunningen in procenten van de oorspronkelijke geleidbaarheid bij benadering vaststellen [1]).

| Zuur. | $K^{25} \times 10^5$ | $^1/_{24}$ mol. | $^1/_{48}$ mol. | $^1/_{96}$ mol. | $^1/_{192}$ mol. |
|---|---|---|---|---|---|
| Glutaarzuur. | 4.71 | 12.5 | 13.8 | 17.1? | 21.2 |
| Galluszuur. | 4.00 | 12.7 | (14.—)? | (17.—) | 21.7 |
| Adipinezuur. | 3.26 | 12.9 | 12.1? | 17.0 | 22.3 |

In plaats van de gevonden geleidbaarheidsvermeerderingen berekent men dan de onderstaande (zie tabel volgende pagina), d.w.z. men verkrijgt getallen, die geheel van de grootte orde zijn, welke voor pyrogallol en pyrocatechine is vastgesteld; zij zijn zelfs duidelijk grooter en naderen die van de galluszure methylester. Men kan

[1]) Recueil **36**, 177 (1917).

hieruit het besluit trekken, dat de carboxylgroep in de benzolkern een *verhoogende* werking uitoefent op de geleidbaarheidsvermeerdering, die zelf veroorzaakt wordt door ten opzichte van elkander gunstig gelegen paren hydroxyl-groepen; dit blijkt *direkt,* wanneer men de

| Verdunning. | Gevonden. | Gecoör. |
|---|---|---|
| 16 | 61.8 | 173 |
| 32 | 27.9 | 125 |
| 64 | 11.1 | 97 |
| 128 | 1.5 | 83 |

zure H door methyl vervangt, maar kan derhalve indirekt afgeleid worden, wanneer men de negatieve werking van het boorzuur als medium op de geleidbaarheid van het vrije zuur in rekening brengt.

Met deze gegevens in handen werd nu de geleidbaarheidsinvloed boorzuur → looistof gemeten.

Er werd galappellooistof (als eenige op dit oogenblik verkrijgbare looistof) voor gebezigd, welke wij bereidden volgens E. FISCHER en FREUDENBERG l.c. en zooveel mogelijk ontdeden van vrij galluszuur.

Onder aanname, dat het molekulair gewicht = 1700 is, konden uit de metingen de volgende cijfers worden afgeleid. (Geleidbaarheid 0.5 mol. $H_3BO_3 = 27 \times 10^{-6}$ K.Hb.):

| Verdunning. | Eigen geleid-baarheid. | Geleidbaarheid $+ 0.5$ m $H_3BO_3$. | $\lambda_{\text{tannine } H_3BO_3} - (\lambda_{\text{tannine}} + \lambda_{H_3BO_3})$ |
|---|---|---|---|
| 213 | 91.6 | 350 | + 230.3 |
| 426 | 57.1 | 229 | 143.8 |
| 852 | 35.5 | 153 | 89.4 |
| 1704 | 21.8 | 105 | 55.1 |

Wij zien uit deze getallen, dat de geleidbaarheidsverhooging *zeer aanzienlijk* is; voor een verdunning 213 is zij nog belangrijk hooger dan die van de galluszure-methylester voor de verdunning 32. Het molekuul van de galappellooistof vormt dus vele malen sterker zure boorzuur-complexen dan dat van de reeds zeer sterk den zuurgraad verhoogende galluszure methylester.

Dit resultaat is in de eerste plaats geheel in overeenstemming met

de door E. Fischer vastgestelde samenstelling van deze looistof, immers er zijn op elk molekuul **10** *paar* gunstig gelegen hydroxylgroepen.

In de tweede plaats is het van belang, omdat wij de zeer intensieve werking van boorzuur op het plantenlichaam leeren begrijpen; het is van zelf sprekend, dat geringe hoeveelheden van deze stof een aanzienlijke werking moeten uitoefenen, indien ze van de zoozeer verspreide, vrij wel neutrale, looistoffen zeer sterke zuren kunnen maken.

*Org. Scheik. Lab. der Technische Hoogeschool.*

*Delft,* November 1918.

**Natuurkunde.** — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer F. E. C. SCHEFFER: *„Over het optreden van vaste stof in binaire stelsels met ontmenging"*. I.

(Mede aangeboden door den heer JAEGER).

1. *Inleiding.* Wanneer twee phasen in een binair stelsel coëxisteeren, moet voldaan zijn aan de conditie, dat de temperatuur en de drie grootheden $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_{xT}$, $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{vT}$ en $\psi - v\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_{xT} - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{vT}$ voor beide phasen gelijk zijn. Op het oppervlak $\psi = f(v,x)$, voor een bepaalde temperatuur geconstrueerd, worden de coëxisteerende phasen verkregen door een dubbelraakvlak over dit oppervlak te laten rollen. Een andere methode om de coëxisteerende phasen te vinden bestaat hierin, dat men in het $v$—$x$-vlak de projecties van de bundel krommen $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_{xT} =$ constant ($p$-lijnen), $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{vT} =$ constant ($q$-lijnen) en $\psi - v\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_{xT} - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{vT} =$ constant (potentiaallijnen) aangebracht denkt; twee punten op het $\psi$-vlak wijzen dan coëxisteerende phasen aan, wanneer door de projecties van beide zoowel een zelfde $p$-lijn, een zelfde $q$-lijn als een zelfde potentiaallijn loopt.

De punten, welke coëxisteerende phasen aangeven, leveren in de $v$—$x$-projectie een meetkundige plaats, waarvan de helling bepaald wordt door:

$$\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_{bin} = -\frac{(v_2-v_1)\frac{d^2\psi}{dv_1 dx_1} + (x_2-x_1)\frac{d^2\psi}{dx_1^2}}{(v_2-v_1)\frac{d^2\psi}{dv_1^2} + (x_2-x_1)\frac{d^2\psi}{dv_1 dx_1}}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin de indices 1 en 2 op de beide coëxisteerende phasen betrekking hebben [1]).

De indicatrix in een punt van het $\psi$-vlak wordt bij eerste benadering aangegeven door de vergelijking:

$$v^2\frac{d^2\psi}{dv_1^2} + 2vx\frac{d^2\psi}{dv_1 dx_1} + x^2\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \alpha v + \beta x + \gamma = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

---

[1]) VAN DER WAALS—KOHNSTAMM. Thermodynamik. II. S. 196, verg. 1.

Schrijft men vergelijking (1) in den vorm:

$$\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_{bin} \frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} \frac{d^2\psi}{dv_1^2} + \left[\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_{bin} + \frac{v_2-v_1}{x_2-x_1}\right] \frac{d^2\psi}{dv_1 x_1} + \frac{d^2\psi}{dx_1^2} = 0, . \quad (3)$$

dan blijkt uit (2) en (3), dat de binodale lijn en de nodenlijn toegevoegde middellijnen in de indicatrix voorstellen, hetgeen door KORTEWEG werd aangetoond [1]).

2. *De relatieve ligging van binodale lijnen en nodenlijnen.*

Uit de bovengenoemde, reeds lang bekende conclusies uit de theorie der binaire mengsels zijn een aantal gevolgtrekkingen te maken, die van belang zijn voor de behandeling van de meer ingewikkelde gevallen van heterogeen evenwicht, welke in binaire stelsels kunnen optreden.

We willen ons voorstellen, dat door een punt van het $\psi$-vlak *twee* binodalen gaan; elke binodale is met de bijbehoorende nodenlijn een stel toegevoegde middellijnen in de indicatrix. Afhankelijk van den vorm van de indicatrix krijgt men nu de volgende gevallen:

$a.\quad \frac{d^2\psi}{dv^2} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} > \left(\frac{d^2\psi}{dv\,dx}\right)^2$. *Elliptisch punt.*

Uit de bekende stelling van de ellips, dat twee paren toegevoegde middellijnen elkaar scheiden, volgt, wanneer we de richting van de raaklijnen aan de binodalen door $b_1$ en $b_2$, van de nodenlijnen door $n_1$ en $n_2$ aanduiden:

*Beweegt men zich in een bepaalde richting om het elliptisch punt heen, dan is de volgorde van binodalen en nodenlijnen*:

$$b_1\, b_2\, n_1\, n_2.$$

De twee met $A$ (zie fig. 1) coëxisteerende phasen kunnen nu

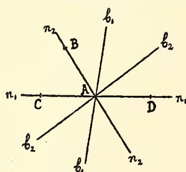


Fig. 1.

1°. een driephasendriehoek $ABC$ vormen, zoodat de beide binodalen geheel buiten den driehoek liggen en

2°. een driephasendriehoek $ABD$ vormen, zoodat de beide binodalen aan één zijde van $A$ binnen den driehoek liggen.

Daar nu echter binodalen binnen den driehoek tweephasencoëxistenties aangeven, welke metastabiel zijn t. o. v. de derde phase (het driephasenevenwicht is immers binnen den driephasendriehoek het stabiele [2])), dan blijkt, dat de bovengenoemde conclusie ook aldus geformuleerd kan worden:

[1]) KORTEWEG. Arch. Néerl. **24**, 57 en 295 (1891).

[2]) We nemen aan, dat op het $\psi$-vlak geen punten voorkomen, waar het oppervlak van beneden gezien hol-hol is.

*Correspondeert één van de aan een driephasenevenwicht deelnemende phasen met een elliptisch punt op het ψ-vlak, dan liggen de verlengden van de (stabiele) binodale lijnen òf beide binnen òf beide buiten den driephasendriehoek.*

b. $\frac{d^2\psi}{dv^2} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\frac{d^2\psi}{dv.dx}\right)^2$. *Parabolisch punt*

Uit verg. (1), welke gemakkelijk kan worden getransformeerd in

$$\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_{bin} = - \frac{(v_2-v_1) + (x_2-x_1) \dfrac{\dfrac{d^2\psi}{dx_1^2}}{\dfrac{d^2\psi}{dv_1 dx_1}}}{(v_2-v_1) + (x_2-x_1) \dfrac{\dfrac{d^2\psi}{dv_1 dx_1}}{\dfrac{d^2\psi}{dv_1^2}}} \cdot \frac{\dfrac{d^2\psi}{dv_1 dx_1}}{\dfrac{d^2\psi}{dv_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en uit $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)_x = -p =$ constant en $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_v = q =$ constant, waarvoor de volgende betrekkingen gelden:

$$\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p = - \frac{\dfrac{d_2\psi}{dv_1 dx_1}}{\dfrac{d^2\psi}{dv_1^2}} \text{ en } \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_q = - \frac{\dfrac{d^2\psi}{dx_1^2}}{\dfrac{d^2\psi}{dv_1 dx_1}},$$

volgt, dat verg. (4) voor een parabolisch punt overgaat in:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{bin} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p = \left(\frac{dv}{dx}\right)_q .$$

De beide binodalen raken dus aan de $p$- en $q$-lijn en raken dus elkaar; de beide nodenlijnen vormen met de binodalen en ook onderling willekeurige hoeken.

*Correspondeert één van de aan een driephasenevenwicht deelnemende phasen met een parabolisch punt op het ψ-vlak, dan raken de beide binodalen aan elkander; de binodalen liggen òf gedeeltelijk binnen òf geheel buiten den driephasendriehoek.*

c. $\frac{d^2\psi}{dv^2} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} < \left(\frac{d^2\psi}{dvdx}\right)^2$. *Hyperbolisch punt.*

In een hyperbool scheiden paren toegevoegde middellijnen elkander niet. Derhalve:

*Beweegt men zich in een bepaalde richting om een hyperbolisch punt, dan is de volgorde van binodalen en nodenlijnen:*

$$b_1\, b_2\, n_2\, n_1 \text{ of } b_1\, n_2\, b_2\, n_1 .$$

Wordt de driehoek in fig. 2*a* (volgorde $b_1\, b_2\, n_2\, n_1$) voorgesteld door *ABC*, dan liggen beide binoden geheel buiten den driehoek, wordt hij voorgesteld door *ABD*, dan liggen ze er beide gedeeltelijk binnen, terwijl in fig. 2*b* (volgorde $b_1\, n_2\, b_2\, n_1$) zoowel voor het driephasenevenwicht *ABC* als *ABD* één binodale gedeeltelijk binnen en één geheel buiten den driehoek ligt.

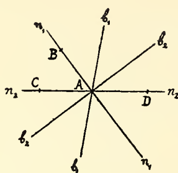


Fig. 2*a*.

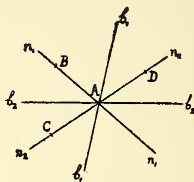


Fig. 2*b*.

3. Van de in § 2 besproken conclusies is de laatste van de onder *a* genoemde niet nieuw. Eenige jaren geleden heeft KUENEN langs anderen weg deze stelling bewezen [1]). Ik meen in het bovenstaande te hebben aangetoond, dat de relatieve ligging van nodenlijnen en binodale lijnen direct algemeen uit de reeds lang bekende eigenschappen van het $\psi$-vlak kan worden afgeleid. [2])

Hoewel de realiseerbare gedeelten van het $\psi$-vlak alleen door elliptische punten worden aangegeven, heeft de algemeene bespreking van § 2 het nut een regelmaat aan te wijzen voor het geheele $\psi$-vlak. De boven besproken conclusies hebben groot belang, wanneer men de mogelijke coëxistenties van vast naast fluïde wil nagaan. Met behulp van de in § 2 besproken regels is het mogelijk de relatieve ligging van de binodalen vast-fluïde en fluïde-fluïde in elk punt aan te geven. Ze zijn bij deze studie haast onmisbaar, daar men bij niet in acht nemen van deze regels bij de meer ingewikkelde gevallen herhaaldelijk in het gevaar verkeert onmogelijke liggingen als mogelijk aan te zien, vooral in het metastabiele en labiele gebied. En voor een volledig overzicht dezer coëxistenties kunnen de niet realiseerbare gedeelten van het $\psi$-vlak niet worden gemist.

---

[1]) KUENEN. Deze Verslagen. **20**, 423 (1911).

[2]) *Noot tijdens de correctie.* De stellingen van § 2 gelden niet alleen voor het $\psi$-vlak, maar voor elk vlak, dus ook voor het $\zeta$-vlak. In de Heterogene Gleichgewichte van BAKHUIS ROOZEBOOM III. 2. worden door SCHREINEMAKERS dan ook analoge regels besproken (blz. 115 e.v.); de liggingen in het metastabiele gebied zijn echter slechts gedeeltelijk behandeld (blz. 340 e.v.)

### 4. *Coëxistentie van vast naast fluïde phasen.*

Indien de krommen $CD$ en $EF$ in fig. 3 projecties van binodale lijnen voorstellen van een plooi op het $\psi$-vlak, dan wordt het $v$—$x$-vlak door de nodenlijnen $AB$ en de raaklijnen aan de binodalen in $A$ en $B$ in zes gebieden verdeeld. Indien met $A$ en $B$ tevens een vaste phase $S$ coëxisteert, kan het punt, dat de vaste phase voorstelt, in elk dezer gebieden liggen. De regels van § 2 geven dan gemakkelijk voor elk dezer gevallen den loop van de binodale lijn voor naast vast voorkomende fluïde phasen door $A$ en $B$. Wanneer de vaste stof de tweede component is, zijn de meest voorkomende liggingen die van de gebieden 2 en 1. Het eerste geval is aangegeven in fig. $4a$, het tweede in fig. $5a$; voor beide is aangenomen, dat de plooi stabiel is, d. w. z. op het convex-convexe deel van het $\psi$-vlak ligt (van onderen gezien).

Fig. 3.

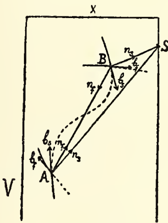


Fig. $4a$.

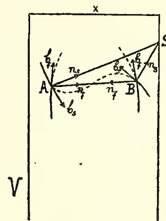


Fig. $5a$.

De punten $A$ en $B$ zijn dus elliptische en de regels van § $2a$ bepalen de ligging van de binodale voor met vast coëxisteerende fluïde phasen in beide punten, zooals ze in figg. $4a$ en $5a$ is aangegeven. Deze liggingen correspondeeren met de in figg. $4b$ en $5b$ aangegeven $P$-$x$-figuren, waarin de driephasencoëxistentie weder door $ABS$ is

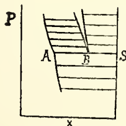


Fig. $4b$.

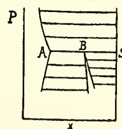


Fig. $5b$.

aangeduid en de tweephasengebieden zijn gearceerd; de arceeringslijnen geven nodenlijnen aan.

Bij de practisch voorkomende heterogene evenwichten treedt nu ook dikwijls het overgangsgeval op, dat fig. 4$a$ in fig. 5$a$ doet overgaan. (Een voorbeeld hiervan wordt in § 6 besproken). Ligt het punt $S$ n.l. op het verlengde der lijn $AB$, dan vallen de nodenlijnen $n_s$ en $n_f$ samen ($n_s$ is de nodenlijn, getrokken van een fluïde naar de vaste phase, $n_f$ naar de andere fluïde phase). De stelling van § 2$a$ eischt dan, dat ook $b_s$ en $b_f$ samenvallen, m. a. w., dat de beide binodalen aan elkaar raken.

*Wanneer een vaste phase ligt op een nodenlijn der fluïden, raken de binodalen fluïde-fluïde en fluïde-vast elkaar in de noden.*

Op volkomen analoge wijze volgt tevens:

*Raakt de nodenlijn vast-fluïde aan de binodale lijn fluïde-fluïde, dan raakt de binodale vast-fluide aan de nodenlijn van de fluide phasen.*

Alle gevallen, die zich bij een stabiele plooi kunnen voordoen, zijn hiermede besproken. Herhaaldelijk komt het echter voor, dat een deel der plooi labiele toestanden aangeeft; in de punten van de binodalen, welke binnen de spinodale lijn zijn gelegen, is immers het oppervlak convex-concaaf en de punten zelf zijn dus hyperbolische. Wij kunnen nu analoog met figg. 4$a$ en 5$a$ weder twee figuren construeeren, welke gelden, wanneer één der binodalen uit hyperbolische punten bestaat. (Het geval, dat beide binodalen uit hyperbolische punten bestaan, wordt achterwege gelaten; de bespreking is uit den aard der zaak even eenvoudig). In deze gevallen treden de figg. 6 en 7 op. In beide is het punt $A$ als hyperbolisch,

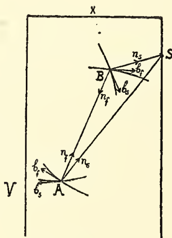



Fig. 6.

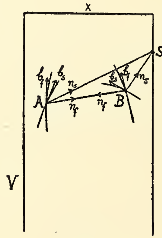



Fig. 7.

het punt $B$ als elliptisch punt aangegeven. De bijbehoorende $P$-$x$-figuren zijn gemakkelijk te construeeren; ze zijn daarom weggelaten; bovendien zijn de coëxistenties niet realiseerbaar en hebben dus geen practisch belang.

5. *Vierphasenevenwichten.*

Wanneer op het $\psi$-vlak bij een driephasenevenwicht van fluïde phasen gelijktijdig coëxistentie met vast optreedt, bedraagt het aantal nodenlijnen en binodalen, dat door de noden gaat, drie. Wanneer we aannemen, dat de driephasencoëxistentie plaats heeft op het stabiele deel van het $\psi$-vlak, dan worden de drie aan dit evenwicht deelnemende fluïde phasen aangegeven door elliptische punten; de relatieve ligging van de drie paren toegevoegde middellijnen wordt weder door de regels van § $2a$ bepaald in dien zin, dat voor elke combinatie 2 aan 2 van de 3 paren toegevoegde middellijnen die stellingen doorgaan.

6. *Toepassingen.*

In een onlangs in deze Verslagen opgenomen verhandeling over de phenyl- en tolylcarbaminezuren werd er op gewezen, dat de verschillende $P$-$T$-figuren, welke bij deze homologe verbindingen optreden, uit elkaar kunnen worden afgeleid door het quadrupelpunt langs de driephasenlijn $L_1 L_2 G$ te laten verschuiven [1]). Bereikt het quadrupelpunt het kritisch eindpunt, dan is het juist nog bestendig; dit is het overgangsgeval, dat dit type van binaire stelsels met het type zwavelwaterstof-ammoniak, waar de coëxistentie $L_1 L_2 G$ niet meer stabiel optreedt, verbindt.

Een dergelijke overgang treedt ook op bij binaire stelsels zonder verbinding, een feit, waarop Büchner [2]) reeds in zijn dissertatie opmerkzaam maakte. We krijgen dan een overgang van een systeem met een quadrupelpunt op het type diphenylamine-koolzuur. De overgang zelf is door Büchner niet nagegaan; daar het echter mogelijk is, dat men door geschikte keuze van de componenten dicht tot dit overgangsgeval kan naderen — in de geciteerde verhandeling vestigde ik de aandacht op het systeem as-o-xylidine-koolzuur — heeft de studie van dit overgangsgeval waarschijnlijk niet alleen theoretisch belang.

Met behulp van de in §§ 1—5 genoemde regels kan deze overgang nu eenvoudig worden nagegaan; het is trouwens de studie van dezen overgang geweest, die mij naar de in het vorige genoemde regelmatigheden heeft doen zoeken.

Een volledige bespreking van deze transformatie is met behulp

---

[1]) Deze Verslagen. **27**, 297. (1918).

[2]) Büchner. Dissertatie Amsterdam 1905.

van bovenstaande regels alleen niet mogelijk. De laatste geven immers alleen den loop van binodalen en nodenlijnen in de buurt van de noden aan. Toch is dit reeds voldoende om een inzicht te krijgen in de verschijnselen, welke bij dit overgangsgeval zullen optreden.

Ik wil mij daartoe voorstellen, dat het $\psi$-vlak geconstrueerd is voor de temperatuur van het kritisch eindpunt ($L_1 = G$). We kunnen dan een ligging verwachten, die door fig. 8*a* of 8*b* wordt aangegeven. Het plooipunt $P_1$ stelt voor het identisch worden van $L_1$ en

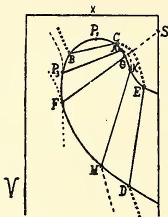


Fig. 8*a*.

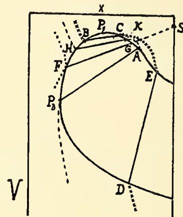


Fig. 8*b*.

$L_2$, $P_8$ dat van $L_1$ en $G$; de plooi van $P_3$ is in dit laatste punt binnen de lengteplooi verdwenen; ze is ter wille van de duidelijkheid der figuren weggelaten. De vloeistof, die met de fluïde phase $P_8$ coëxisteert is door $A$ aangegeven. De nodenlijnen $BC$ in de plooi $P_8 P_1 A$ vertoonen een ligging, overeenkomende met fig. 5*a*; de nodenlijnen $DE$ met fig. 4*a*. Hieruit volgt, dat tusschen $BC$ en $DE$ een nodenlijn getrokken kan worden, waarvan het verlengde door $S$ gaat ($FG$ in de figg. 8*a* en *b*). In de punten $F$ en $G$ raakt dus een eventueel optredende binodale voor met vast coëxisteerende fluïde phasen aan de binodale fluïde-fluïde. (Zie § 4). In fig. 8*a* ligt de nodenlijn $FG$ beneden $P_8 A$, in fig. 8*b* daar boven.

Gaat men nu na hoe de loop is van de binodale vast-fluïde, dan kunnen alle mogelijke liggingen gemakkelijk worden overzien door een raakvlak voor steeds afnemende waarden van $\psi_s$ over het oppervlak te laten rollen. Kiest men de $\psi$-waarde van $S$ hoog, dan zal de raakkromme alleen de plooi rechts van $DE$ snijden; bij lagere waarde van $\psi_s$ zal een kromme optreden, die tevens door $P_1$ gaat; vervolgens zal de kromme de plooi zoowel in de buurt van $P_1$ als in de buurt van $DE$ snijden. Een dergelijke ligging wordt door de met kruisjes aangegeven kromme voorgesteld. Laat men $\psi_s$ verder verschuiven, dan krijgen we een kromme, die door

$P_3$ gaat, aangegeven door de streeplijn. Eindelijk zal de raakkromme zóódanig verschuiven, dat de twee snijpunten op beide binodale takken elkaar naderen en bij het samenvallen in $F$ en $G$ treedt raking van de twee binodalen op; de kromme voor vast-fluïde ligt in $F$ buiten de binodale fluïde-fluïde en is stabiel; bij $G$ ligt ze echter in het bedekte gebied. Met de regels van § 2 is af te leiden, dat de geteekende liggingen de juiste zijn. Alleen dient nog opgemerkt te worden, dat volgens deze regels de binodalen in $P_3$ elkaar raken en snijden.

De drie in beide figuren aangegeven binodale lijnen voor vast-fluïde correspondeeren met de door gelijke letters aangegeven evenwichten in figg. 9*a* en *b*. Het zal duidelijk zijn uit het besprokene,

Fig. 9*a*.

Fig. 9*b*.

dat het punt, waar $\frac{dP}{dT} = \infty$, zoowel bij hoogeren als bij lageren druk dan $P_3$ kan liggen [1]) Dit punt correspondeert in figg. 8*a* en 8*b* met een nodenlijn ($FG$), die door $S$ gaat. Bij nog verdere verschuiving ligt de binodale voor vast geheel buiten de lengteplooi. Het raakpunt zal dan bij hoogere temperatuur kunnen optreden; in figg. 9*a* en *b* is zoo'n raakpunt door $M$ aangegeven. De ligging van de door $M$ gaande driephasenlijn is experimenteel gevonden door Büchner in het systeem diphenylamine-koolzuur [2]), door Ada Prins in het stelsel aethaan-naphtaline [3]),

7. De overgang van de systemen met quadrupelpunt $SL_1L_2G$ op het type diphenylamine-koolzuur is in de vorige paragraaf afgeleid

[1]) Bij lagere temperaturen ligt dit punt in het bedekte gebied; bij een volledige behandeling van de transformatie zal blijken, dat de verschuiving van dit punt gemakkelijk volgt uit den overgang van de twee driephasenlijnen $SL_1L_2$ en $SL_2G$ in elkaar (labiele kam) en de verandering daarin bij nadering tot het quadrupelpunt. Deze veranderingen zijn ook direct met de regels van § 2 na te gaan.

[2]) Büchner. Dissertatie Amsterdam. 1905, blz. 85, fig. 36.

[3]) Ada Prins. Deze Verslagen. **23**. 1037 (1915), fig. 4.

met behulp van de in § 2 aangegeven regels. De gedaante van de binodalen wordt door deze echter alleen in de buurt van de snijpunten aangegeven. De loop over het geheele gebied, die vooral in het bedekte gebied merkwaardig is, kon bij de bovenstaande bespreking worden gemist. Een volledig inzicht is alleen te verkrijgen door beschouwingen over den loop van binodalen vast-fluïde in het algemeen. Daartoe is de bespreking van enkele meetkundige plaatsen op het $\psi$-vlak noodig.

(*Wordt vervolgd*)

20 November 1918. *Delft. Technische Hoogeschool.*

---

**Natuurkunde.** — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer L. HAMBURGER: *„Bijdrage tot de kennis der verwijdering van restgassen, in het bijzonder bij de electrische vacuum-gloeilamp”.*

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER).

§ 1. *Opmerkingen aangaande de werking van phosphorus in de gloeilamp.*

Het verslag der in deze bijdrage medegedeelde en in het laatst van 1916 verrichte proefnemingen lag reeds 11 Juni 1917 gereed. Schrijver dezes heeft de publicatie ervan evenwel willen doen wachten op het in deze verslagen verschenen gemeenschappelijk met de Heeren HOLST, LELY en OOSTERHUIS verrichte werk

Voor de verbetering van den graad van luchtledigheid van gloeilampen heeft reeds in 1894 de Italiaan MALIGNANI een voor de techniek uiterst bruikbaar, „chemisch” hulpmiddel aangegeven: nl. phosphorus [1]). Door verschillende omstandigheden kunnen, vooral ook in den aanvang bij het branden van een gloeilamp, gassen vrijkomen. Zorgt men voor aanwezigheid van een weinig phosphordamp, zoo zal deze, onder invloed van daarbij optredende electrische ontladingen (vergel. L. HOULLEVIGUE) [2]), zich met die gassen tot niet vluchtige verbindingen kunnen omzetten, welke op den ballonwand neerslaan. Daar hoeveelheden van 0.05 mgr. voor dit doel veelal reeds een groote overmaat vormen, bemerkt men van dit neerslag niets en is men toch tot een gloeilamp met veel verbeterd vacuum gekomen.

De werking van phosphorus in de gloeilamp is niet zeer eenvoudig. Tot de gecompliceerdheid van het karakter der verschijnselen draagt voor een deel oók de methode, waarop het element aangebracht wordt, bij. Meestal dompelt men het gestel der gloeilamp in een zeer fijne suspensie van phosphorus in alcohol. Op den draad en op de andere deelen van het gestel bevindt zich dus reeds het roodachtige phosphor bij het insmelten in de glazen peer. Bij dit insmelten strijkt heete lucht door den ballon, zoodat deze zeer warm wordt. Hiermede gaat een gedeeltelijke oxydatie gepaard. Men moet

[1]) MALIGNANI D. R. P. 82076 (1894) Stoffen zooals *As*, *S*. *J*. zijn ook wel aangegeven, maar minder gebruikt.

[2]) L. HOULLEVIGUE, Journ. de phys. (5) 2, 525 (1912).

dus ook met de werking van $P_2O_5$ rekening houden. Doch ook al laat men dit, gelijk in het onderstaande geschieden zal, buiten beschouwing, dan geeft de phosphorus toch nog tot allerhande eigenaardige reacties aanleiding, welke in het bijzonder samenhangen met de reeds boven aangeduide electrische ontladingen, die bij het eerste branden der lampen optreden. De resultaten van de volgende onderzoekingen bevestigen opnieuw, dat bij electrische ontladingen de moleculen worden uiteengeslagen in brokstukken van groote reactiviteit.

De energie en snelheid, welke men bij de processen, die dan tot stand komen, waarneemt, zijn verbazingwekkend. Voor de chemici ligt hier nog een groot veld open.

Reeds phosphordamp zelf, zonder eenig ander gas, is uiterst gevoelig voor electrische ontladingen. Brengt men rooden phosphorus tot verdampen en laat men hem op een andere plaats condenseeren, dan krijgt men den „gelen" vorm. Voert men deze proef in vacuo uit, dan doen zich bij de condensatie sterke vertragingsverschijnselen voor en men loopt veel kans phosphorus in de vacuumpomp te krijgen. Brengt men echter op den weg naar de pomp twee tegenover elkaar gestelde platinadraadjes aan, waartusschen men met behulp van een inductorium, een ontlading teweegbrengt, dan wordt daar ter plaatse de phosphorus quantitatief neergeslagen. (Vergel. v. KOHLSCHÜTER en A. TRUMKIN) [1]).

Men kan daarbij voorts met geringe hoeveelheden phosphordamp werken en zoo de kleurverandering (groen-geel-rood en ten slotte zeer donker) met toenemende dikte van het zich aanvankelijk in uiterst dunne laagjes afzettende condensaat nagaan. Daarbij is in het condensaat ook het optreden van agglomeratie te verwachten. Natuurlijk speelt voorts bij deze kleurschakeeringen ook het optreden van een andere modificatie een rol.

Gaan wij nu in het volgende de werking tusschen phosphorus en verschillende gassen bij electrische ontladingen na en kiezen wij als eerste voorbeeld het gedrag ten opzichte van *koolmonoxyde*. Zonder electrische ontladingen bemerkt men begrijpelijkerwijze niets, ook niet bij verwarming van het reactie-vat. Geheel anders wordt de zaak echter, wanneer men electrische ontladingen door de reactieruimte zendt en het geheel zoo verhit, dat een merkbare verdamping van den phosphorus plaats vindt. Dan heeft een uiterst snelle gasbinding plaats, hetgeen door de snelle vermindering van den gasdruk (McLEOD manometer) wordt waargenomen. In bevestiging met wat schrijver dezes bij een andere gelegenheid [2]) vond, aangaande

[1]) V. KOHLSCHÜTTER en TRUMKIN, Zeitschr. f. Electrochem. 20, 110 (1914).

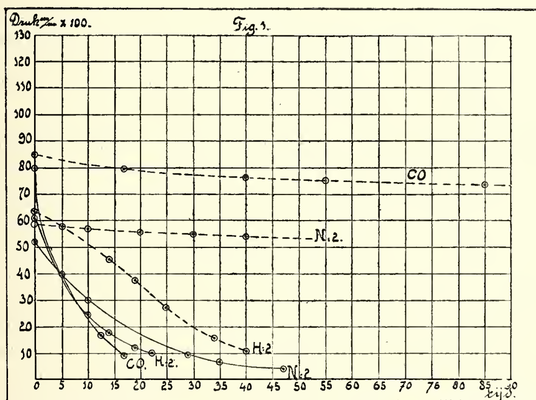
[2]) L. HAMBURGER, Chem. Weekbl. 15, 938—940 (1918).

een omzetting tusschen stikstof en kooloxyde bij electrische ontladingen, kan men veilig aannemen dat het $CO$ door de ontlading wordt stukgeslagen; in en buiten de ontladingsbaan heeft de vrijgekomen zuurstof gelegenheid zich met den phoshorus of met de afgescheiden koolstof te (re)combineeren. Waar bij de proef een overmaat aan phosphorus in dampvorm gebracht wordt, is evenwel de keuze van de zuurstof niet twijfelachtig.

Men zoude ons kunnen tegenwerpen, dat onder den invloed van electrische ontladingen het $CO$ ook zelf onder volume-vermindering ontleed wordt; en dat bijv. bij gebruik van *Pt*-electroden, het door de ontleding verstuivende metaal zelf gassen occludeert. Dit is ook zoo en we hebben het experimenteel gecontroleerd. Niettemin is er een enorm verschil in de snelheid der gasbinding bij de al of niet aanwezigheid van phosphorus.

We hebben de reactiviteit van phophorus ook nog ten opzichte van *stikstof* en *waterstof* nader onderzocht en geheel analoge verschijnselen gevonden. Slechts moeten wij er opmerkzaam op maken, dat het bij de ontlading verstuivende platina, relatief groote hoeveelheden waterstof kan occludeeren, zoodat daar reeds bij afwezigheid van phosphorus een snelle vermindering van den gasdruk optreedt.

In fig. 1 hebben wij onze metingen graphisch samengevat. De getrokken lijnen toonen de afneming van den gasdruk met den tijd bij aanwezigheid van phosphorus, de gestippelde geven het gedrag weer bij afwezigheid van dit agens.




Uit fig. 1 ziet men duidelijk, dat de phosphorus in staat is practisch alle gassen

snel te binden, bij toepassing van glim-ontladingen. In zooverre gaat zijn werking zelfs die van kalium te boven, doordat de phosphorus in staat is, om metaaldampen te binden. Bovendien is het manipuleeren met roode phosphorus natuurlijk gemakkelijker dan met kalium. In fig. 2 geven we een drietal spectrogrammen



Fig. 2.

weer; opname 1 stelt het spectrum van lucht, opname 2 dat van een mengsel van argon en stikstof voor, waarin 12$^0{}_0$ stikstof voorkomt. Ook hier overweegt nog, bij de ontlading met een inductie-klosje, het stikstof-banden spectrum. Spectrogram 3 levert echter een beeld van de licht-emissie van zulk een argon-stikstof gas-mengsel, nadat het aan de inwerking van phosphorus (met behulp van glim-ontladingen) is blootgesteld geweest. Men ziet, dat men dan met het argon-lijnen spectrum te doen heeft (in dit spectrogram staat de golflengte-schaal niet geheel op de juiste plaats). Daaruit kan men bovendien de conclusie trekkken, dat dergelijke glim-ontladingen in *P*-damp ons tevens tot een eenvoudige analysemethode van mengsels van $Ar$—$N_2$ in staat stellen.

Ook bij de stikstof-binding door phosphorus moet men zich weer voorstellen, dat de gas-moleculen eerst door de ontlading in atomen gesplitst worden, welke laatste zich dan met den phosphorus kunnen verbinden.

Dit is geheel in overeenstemming met wat R. J. Strutt vond: nl. dat „lichtende", atomaire stikstof zich direct met phosphorus kan verbinden. [1])

Het bovenstaande kan ons duidelijk maken, waarom phosphorus in de gloeilamp zulk een krachtig middel ter verwijdering van restgassen is. Ook de binding van waterdamp door den phosphorus is in de gloeilamp duidelijk merkbaar. Zonder phosphorus wordt, tenzij men de voorzorgen bij het op „temperatuur pompen" zeer goed vervult, een gloeilamp veel sneller zwart, dan met phosphorus. Zooals bekend is bevordert een spoor van waterdamp in hooge mate de desintegratie van het wolfraam-gloeilichaam, onder donkerkleuring van den glaswand. Dat inderdaad het wegnemen van den waterdamp de oorzaak der verbetering is, wordt bevestigd door het resultaat, dat men bij het branden van lampjes zonder phosphorus

[1]) R. J. Strutt. Proc. of the Roy London Soc. **A. 85**, 219, 1911).

en met waterdamp in vloeibare lucht waarneemt: dan bemerkt men van een abnormaal zwart worden niets meer.

§ 2. *Over het aanbrengen van silicaten op het gloeilichaam.*

*A. Werking der silicaten.*

Het is schrijver dezes gebleken, dat dezelfde werking, als met phosphorus wordt bereikt, met groote zekerheid ook verkregen kan worden, indien men in plaats daarvan, *silicaten* bijv. *glas* in poedervorm op het gestel aanbrengt, hetgeen men o.a. op dezelfde wijze kan doen, als tot nu toe voor phosphorus gebruikelijk was.

Verschillende glassoorten zijn hiervoor bruikbaar. Bijv. Boheemsch glas, Jena-, Thüringer-, loodglas enz. Wij laten hier eenige analyses van gebruikte glassoorten volgen.

TABEL 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $SiO_2$ | 68.9 | 67.7 | 64.5 | 60.3 | 71.8 | 78.4 | 62.3 |
| $Na_2O$ | 10.7 | 3.8 | 8.65 | 0.15 | 11.2 | 1.6 | 7.2 |
| $K_2O$ | 8.2 | 2.5 | 0.60 | 9.5 | 8.2 | 9.8 | 5.0 |
| $CaO$ | 6.2 | 7.7 | — | — | 9.8 | 8.2 | 0.1 |
| $BaO$ | — | 10.2 | — | — | — | — | — |
| $B_2O_3$ | — | 5.6 | 1.4 | 25.3 | — | — | — |
| $Fe_2O_3$ | spoor | — | } 2.5 | 2.4 | } 0.1 | } 1.5 | } 0.3 |
| $Al_2O_3$ | — | — | | 2.7 | | | |
| $ZnO$ | — | — | 2.9 | 1.0 | — | — | — |
| $Sb_2O_3$ | — | — | 2.65 | — | — | — | — |
| $PbO$ | — | — | — | — | — | — | 23.0 |

*B. Nadere onderzoekingen.*

Welke is nu de verklaring voor de werking dier silicaten? Om hiervan iets meer te weten te komen, werd nader de reactie tusschen *W* en glas in de gloeilamp nagegaan. De het eerst voor de hand liggende stap leek wel deze: Neem een Wolfram-lamp met dikken gloeidraad en breng in plaats van glaspoeder een glazen capillair daarom heen. Op deze wijze heeft men met veel grootere hoeveelheden van reageerende bestanddeelen te maken, dan bij de met glaspoeder „gespoten" lamp.

Voorzichtigheidshalve voerden wij het eerste branden bij lage spanning uit, terwijl de geëvacueerde lamp nog met de pomp verbonden was. Daarbij was het zaak

voorzichtig te werk te gaan en te zorgen, dat de gloeidraad een horizontalen stand innam, ten einde een eventueel „afdruipen" van gesmolten glas te voorkomen. Door met behulp van den electrischen stroom den draad op zacht roodgloeihitte te brengen, konden dan alle in de glascapillair geabsorbeerde gassen verdreven worden.

Hiermede werd doorgegaan tot een hooge graad van luchtledigheid duurzaam behouden bleef. Eerst daarna werd de lamp afgesmolten

Legt men aan deze vacuumlamp een hooge spanning aan, terwijl de draden een horizontalen stand innemen (zie boven), dan begint het glas als het ware te koken, er ontwikkelen zich groote dampbellen in het glas. Dit houdt na eenigen tijd op, wanneer men de bedrijfsspanning constant houdt. De ballonwand is echter grauwblauw geworden. Drijft men nu de spanning verder op, dan herhaalt het kookverschijnsel zich; er scheidt zich meer van het grauwe aanslag af. De wand van den ballon wordt echter tengevolge van het steeds verdampende materiaal heet en dit vooral daar, waar de wand tegenover het gloeilichaam gelegen is. Men ziet nu het aanslag langzaam aan op de heetste plaatsten verdwijnen en naar de koudere plaatsen gaan, waar men weldra een condensaat van *metallische* druppeltjes ziet. Door plaatselijke verwarming op enkele honderden graden laten deze zich weer weg sublimeeren.

Bij latere proeven vonden wij, dat de metaaldruppeltjes in staat zijn momentaan water aan te tasten: het omgezette product wordt daarin opgelost.

Drijft men de spanning nog verder op, dan wordt de geheele lamp zoo heet, dat ook de boven aangeduide metaaldruppeltjes geheel in dampvorm overgaan, althans verdwijnen. Na afkoeling van de lamp vindt men ze echter niet terug. Zij zijn colloïdaal in het aanslag op den ballon opgelost; dit heeft een lichtbruine kleur gekregen.

Onder de omstandigheden, waaronder wij deze proeven namen, was de hoeveelheid glas tegenover die van het wolfraam zoo groot, dat niet al het glas van den draad kon verdreven worden. De oorzaak hiervan is echter vooral in het volgende gelegen. Wanneer de draad temperatuur voldoende hoog is opgedreven, vereenigt zich op den horizontalen draad het glas tot bolletjes, welke langen tijd op hun plaats blijven. Drijft men echter de temperatuur van den draad uiterst hoog op, dan krijgen die gesmolten bolletjes een groote bewegelijkheid. Zij dansen op den draad alsof het spheroidaal effect een rol speelt en bewegen zich ten slotte naar de koudere plaatsen Deze zijn daar gelegen, waar de draad door de haakjes van het gestel vastgehouden wordt. Die haakjes voeren nl. veel warmte af en daar is dus de temperatuur van den draad merkbaar geringer. Van dat oogenblik af verdampt haast niets meer van het glas.

Analyseert men nu eenerzijds het aanslag op den wand en ander-

zijds het residu (bij de haakjes) op den draad, dan vindt men bij de verschillende proeven de in de volgende tabel vervatte gegevens.

TABEL 2.

| | | Proef 1. | Proef 2. | Proef 3. | Proef 4. | Proef 5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aanslag op *den wand.* | mgr. KOH | 15.7 | 13.7 | 26.2 | Niet bepaald | 19.4 |
| | mgr. W | Slechts een qual. bepaling met positief resultaat werd hier gedaan. | 0.3 | 10.3 | 10.0 | 4.0 |
| *Bolletjes op den draad.* | Slechts qualitatief onderzocht. Vrijwel geen $K_2O$ en $Na_2O$. Zeer veel $SiO_2$; veel CaO. | | | | | |

*Opmerkingen bij de tabel.* Het aanslag op den wand blijkt bij opening der lamp (dus na toelating van lucht) $K_2O$ en $Na_2O$ en $WO_3$ te bevatten. Eenvoudigheidshalve hebben wij alles op „KOH" en W omgerekend. Het „KOH"-gehalte werd acidimetrisch, het „W"-gehalte colorimetrisch (DEFACQZ) en gravimetrisch (mercurowolframaat) vastgesteld.

De hoeveelheid „W" bij deze proeven op den wand gevonden was zeer wisselend. Deze hangt in hooge mate af van (neemt toe met) de temperatuur waarop men den gloeidraad ten slotte brengt. Vooral uit proef 2 ziet men echter, dat behalve een alkali-gehalte op den wand, welke veroorzaakt wordt door aantasting van het glas door het wolfraam, een groot deel van het alkali-oxyde als gevolg van een gefractionneerde distillatie van het glas op den wand aanwezig is.

Men kan daaruit veilig concludeeren, dat zich twee processen afgespeeld hebben.

*a.* Gefractionneerde distillatie van het glas.

*b.* Aantasting van het alkali-oxyde in het glas door het wolfram van den draad ($W + 3 \frac{K_2O}{Na_2O} = WO_3 + 6 \frac{K}{Na}$).

*C. Gefractionneerde distillatie van het glas.*

Beschouwen we proces *a* nader, dan behoeft ons het verloop daarvan niet te verwonderen. Het bevestigt de opvatting, dat het glas een onderkoelde vloeistof is, waarin een groot aantal stoffen (meer of minder vluchtig) opgelost zijn. Intusschen is deze onder zeer zuivere condities, in vacuo, genomen proef toch wel een bruikbare bevestiging van die zienswijze.

Over een soortgelijk verschijnsel bij hooge temperatuur heeft in 1905 P. LENARD [1]) eene enkele waarneming medegedeeld. Hij vindt n.l. dat bij de gloeiing van kalium boraat in een vlam, zoo goed als al het kalium uit de parel verdampt wordt en boorzuur terugblijft.

Merken we voorts op, dat onze proefnemingen met glas reeds gedaan waren, toen ons het artikel van E. ANDERSON en R. J. NESTELL [2]) in handen kwam, waarbij proeven werden medegedeeld over de vervluchtiging van alkali-oxyden uit cementmaterialen bij verhitting in een fletcheroven op $\pm$ 1300°.

Deze proeven zijn natuurlijk zeer ruw en invloeden van de verbrandingsgassen van den gebruikten brander kunnen een rol spelen, wat ook uit hun waarnemingen tot op zekere hoogte blijkt. Maar overigens kan men door hun resultaten de onze bevestigd zien. Merkwaardig is, dat zij ook nog proeven gedaan hebben met veldspaath, dus met een materiaal, dat in vergelijking met hun andere proeven met cement-materialen een ondermaat aan $CaO$ tegenover het $SiO_2$ gehalte bezit. Daarbij was de vervluchtiging al zeer gering. De verdamping van $K_2O$ werd bij hun proeven pas merkbaar na toevoeging van 50% $CaO$. Nu zijn wij veel hooger in temperatuur gegaan. Al gebruikten wij silicaten, arm aan $CaO$, zoo heeft toch nog vervluchtiging van het alkali plaats. Maar dit gaat moeilijker naar mate meer alkali uit het glas ontweken is; dit nu is van groot belang voor de beschouwing van het sub *D* vermelde proces.

### *D. Reactie tusschen het wolfraam en het glas.*

We zagen, dat uit het glas een gemakkelijk sublimeerbaar in water oplosbaar metaal vrijkomt. Dit kan niet anders dan kalium of (en) natrium zijn. Na het openen aan de lucht toont men op den wand met behulp der vlam-spectra en microchemisch vrijwel niets anders dan $K_2O$, $Na_2O$ en $WO_3$ aan.

We hebben getracht het alkali-*metaal* van het uit de gefractionneerde verdamping van het glas afkomstige alkali-*oxyde* te scheiden, door reeds in vacuo het metaal door geschikte verwarming naar een afzonderlijke, koude plaats (een daartoe aangebracht glazen aanhangsel) te sublimeeren. Dit gelukt echter niet, het alkali-metaal verdampt, maar condenseert grootendeels niet meer. Het lost in het overige aanslag op.

Dit noodzaakte ons daarom de volgende indirecte bepalings-methode toe te passen.

In den ballon *A* (fig. 3) was een gestel gesmolten, waarbij over den *W*-draad zich een glas-capillair geschoven bevond. Aan deze lamp waren twee zijbuizen aangebracht, waarvan de eene *a* een met gasvrij water gevuld bolletje *g* (met ingesneden capillair-einden) bevatte, terwijl de andere *b* via een in vloeibare lucht gedompelde *U*-vormige buis *h* en een kraan *d* naar de TÖPLER-pomp *i* leidde, waaraan tevens een GAËDE-pomp ter evacueering geschakeld kon worden.

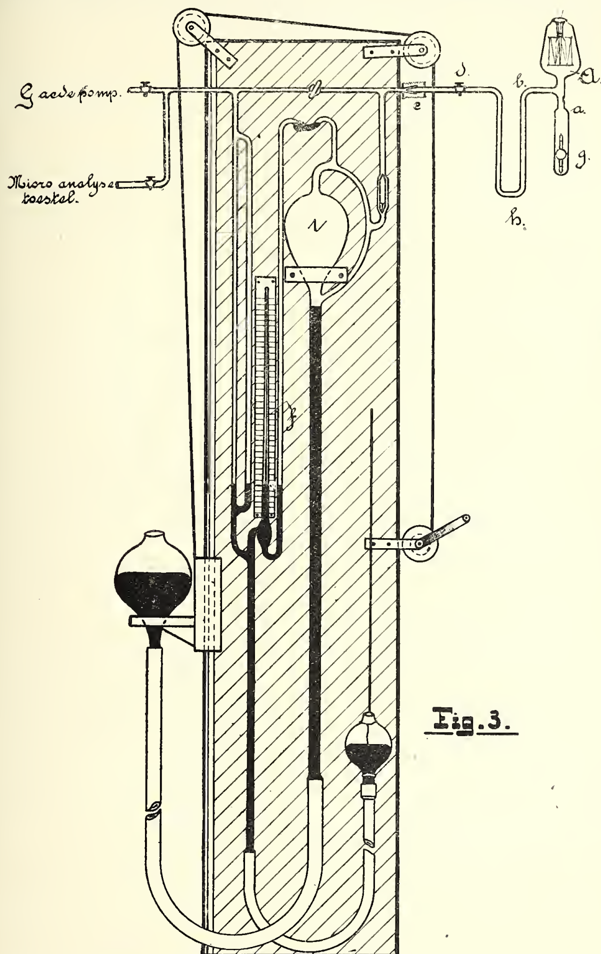
Men laat nu eerst lamp *A* in vacuo branden, terwijl *h* in vloeibare lucht

---

[1]) P. LENARD, Ann. d. Phys. (4) **17**, 204 (1905).

[2]) E. ANDERSON and R. J. NESTELL, Journ. Ind. a. Engen. Chem. **9**, 253 (1917). Zie ook W. H. ROSS and A. R. MERX Ibid. **9**, 1035 (1917).

gedompeld is, zoodat men in $A$ geen last van vocht heeft. Daarna maakt men bij gesloten stand van $d$ de lamp bij slijpstuk $e$ los en schudt in $a$ het glazen bolletje




$g$ stuk. De ontwikkelde waterdamp werkt nu op het alkali-metaal onder vorming van waterstof in. Daarna zet men het toestel weer in elkaar, dompelt $h$ weer in

vloeibare lucht en pompt met behulp van de TÖPLER-pomp de ontwikkelde waterstof naar den geijkten volumeter *f* over. Men meet het volume en controleert de zuiverheid van de verkregen waterstof met behulp van het op een andere plaats beschreven micro-analyse toestel (L. HAMBURGER en W. KOOPMAN).[1])

**Proef 1.** Ontwikkeld 412 $mm^3$. gas.

Analyse 98 $^0/_0$ waterstof.

Deze hoeveelheid waterstof komt met ongeveer 1 mgr. wolfraam overeen. Inderdaad werd een hoeveelheid van de grootte-orde van *1 mgr. wolfraam op den wand langs colorimetrischen weg vastgesteld.*

Natuurlijk is het noodig, dat het water, dat zich in het bolletje bij *a* bevindt, van te voren in een hoog vacuum van opgeloste gassen bevrijd is. Men bereikt dit het gemakkelijkst door het bolletje met een hoog-vacuum pomp van te voren te verbinden, het tevoren uitgekookte water te bevriezen en een hoog-vacuum te halen, waarna men in het luchtledig het ijs ontdooit, om daarna het bolletje af te smelten.

Het $WO_3$ gehalte op den wand was iets geringer dan het aan het gevonden kalium aequivalente bedrag. De lamp had echter slechts „zwakjes" gebrand. Er zal dus nog wat $WO_3$ in het glas op den draad gebleven zijn.

Mogelijkerwijze bevindt zich hierbij nog een spoor *Ca*. Het alkali-metaal omgerekend op „*KOH*" correspondeert met 2.0 mgr. *KOH*. In werkelijkheid werd na het openen der lamp op den wand daarvan 3.5 mgr. *KOH* gevonden. Deze overmaat is aan de gefractionneerde distillatie van het glas te danken.

**Proef 2.** Bij deze proef werd de verdamping van het glas krachtiger doorgezet, zoodat de wand zeer heet werd en een groot deel van het gevormde alkali-metaal weer colloidaal in het condensaat van den wand oploste (onder bruinkleuring daarvan). Bij het openen van het waterbolletje trad momentaan ontkleuring op, terwijl relatief veel waterstof ontwikkeld bleek te zijn.

Analyse-resultaten: 38.2 mgr, „*KOH*", 5.3 mgr „*W*". Hiermede zijn equivalent 1.9 $cm^3$. $H_2$.

## *E. Reactie tusschen wolfraam en glas bij* 1000°.

De volgende proefneming leerde dat het voor het aantoonen van een reactie tusschen wolfraam en glas niet noodig is op zeer hooge temperatuur te verhitten. Mengt men wolfraam-poeder en glaspoeder (bijv. Thüringer glas) en verhit het product in een indifferente gasatmospheer op 1050° gedurende een uur, dan vindt men, dat er reactie heeft plaats gevonden.

Zoo werd uit 11 gram wolfraam en enkele grammen glas 0.65 gr. $WO_3$ gevormd (bepaald volgens de mercuro-wolframaat methode).

Deze werking tusschen wolfraam en glas is ook nog uit een ander oogpunt merkwaardig. Beschouwen we n.l. het geval, dat men electrische toeleiddraden luchtdicht in hardglazen apparaten wil insmelten. Men moet dan een metaal met een geringen uitzettingscoëfficient nemen. Hiervoor is wolfraam geschikt. Bij het insmelten bedekt zich

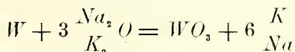
---

[1]) L HAMBURGER en W. KOOPMAN, Chem. Weekbl. **14**, **742** (**1917**).

dit evenwel met een laag oxyde en dit zou, gelijk de ervaring leert, indien dit als zoodanig bleef bestaan, verhinderen, dat de aansluiting tusschen glas en draad luchtdicht werd. Bij die temperatuur van het „insmelten" echter reageeren wolfraam en lagere wolfraam-oxyden met het glas; de oxyden blijven dus niet als zoodanig bestaan en men krijgt zonder eenige verdere voorzorgen een zeer afdoende afsluiting (vergel. ook E. WEINTRAUB) [1]).

*F. Kunnen alkali-oxyden de werking der silicaten vervangen?*

Terwijl de reactie tusschen wolfraam en glas (capillair) in de lamp in hoofdzaak blijkt neer te komen op de omzetting:



$$W + 3 \begin{matrix} Na_2 \\ K_2 \end{matrix} O = WO_3 + 6 \begin{matrix} K \\ Na \end{matrix}$$

hebben wij van een dergelijke reactie practisch niets gevonden, indien men een lampje maakt, waarbij in plaats van glas, $Na_2O$ op het gestel is aangebracht [2]).

Dit is echter begrijpelijk; het $Na_2O$ is in het hooge vacuum bij matige temperatuurs-verhooging zeer vluchtig en is dus van den tot gloeiing gebrachten draad afgedampt, voor het tijd heeft gehad merkbaar te reageeren. De werking van het $Na_2O$ ($K_2O$) in het glas is een gevolg daarvan, dat men het $Na_2O$ ($K_2O$), in het glas opgelost, bij veel hoogere temperatuur met het wolfraam in de geëvacueerde ruimte kan doen reageeren dan anders, wegens de vluchtigheid van dat oxyde, mogelijk zou zijn.

Dit is dus soortgelijk aan wat reeds bekend is bij het $KHSO_4$, dat bijv. bij ontsluitingsdoeleinden in de analytische chemie gebruikt wordt en zooveel werkzamer is dan $SO_3$ omdat bij hooge temperatuur het $SO_3$ nog in het $KHSO_4$ in gecondenseerden toestand werkzaam kan zijn.

Men behoeft er echter niet aan te twijfelen, of wolfraam reageert ook met $Na_2O$, wanneer de temperatuur zoo laag is, dat deze stof niet merkbaar weggedistilleerd wordt. Men vindt hiervoor aanwijzingen in de literatuur (vergel. GMELIN-KRAUT Handbuch enz.) en we hebben dit bovendien door proeven bevestigd. Trouwens reeds P. LENARD (l.c. pag. 201) heeft voor een metaal als platina aangetoond dat dit door oxyden en hydroxyden der alkaliën, verder ook carbonaten en sulfaten der alkaliën, in het oxydeerende deel van de BUNSEN vlam snel aangetast wordt.

*G. Gevolgtrekkingen.*

We hebben nu door deze proeven voldoende gegevens verkregen

---

1) E. WEINTRAUB, Amer. Octrooischrift 1. 154. 081.

2) Vergel. L. HAMBURGER, Chem. Weekbl. 13. 516 (1916).

om te begrijpen, waarom glas de werking van phosphorus kan vervangen.

Voor een deel zal dit daarin gelegen zijn, dat door de gefractioneerde distillatie, stoffen (alkali-oxyden) in uiterst fijne verdeeling (damp-vorm) ontstaan, welke bijv. sporen van vocht tot zich kunnen trekken. Maar bovendien hebben we vorming van vrij alkali-metaal. Dit nu is zeer belangrijk; want tegelijk met het eerste op spanning brengen der lampen, we hebben dit reeds eerder vermeld, hebben meer of minder sterke electrische ontladingen plaats. Nu zijn de alkali-metalen zeer reactief, maar bovenal is dit het geval, indien door de lamp electrische ontladingen gezonden worden. G. GEHLHOFF [1]) immers toonde aan, dat in de toepassing der werking van alkalimetalen bij glimontladingen een der snelste methoden ter bereiding van zuivere edelgassen gelegen is.

*Conclusie*: In den vorm van glas brengt men in de lamp een bij kamer-temperatuur tegen zeer verschillende invloeden zeer indifferent materiaal, waaruit echter bij hooge temperatuur het vrije alkalimetaal in dampvorm ontwikkeld wordt, en dit kan onder invloed van electrische ontladingen dezelfde werking tot stand brengen als de geringe hoeveelheden phosphorus die voor het verwijderen van restgassen noodig zijn.

### § 3. *Over het condensaat, dat bij verdamping van zeer geringe hoeveelheden silicaat ontstaat. Verhindering van de donkerkleuring van den ballonwand.*

Bij onze proeven met de glascapillair zagen we, dat van het glas in hoofdzaak alleen de alkali-oxyden zich op den wand bevonden. Bij de technische gloeilamp echter is dit anders. Daar kan men met een zoo geringe hoeveelheid glaspoeder op het gloeilichaam volstaan, dat in een oogwenk alles naar den wand gekomen is, en weer een neutrale reactie vertoont. Een andere vraag is echter, of het daar weer hetzelfde glas teruggevormd heeft, dat tevoren op het gloeilichaam aangebracht was. Hoe snel alles ook in zijn werk gaat, gefractionneerd moet de sublimatie toch geweest zijn, en buitengewoon snel de afkoeling. Inderdaad is het glas op den wand anders. Misschien bestaat het wel uit verschillende laagjes van verschillende samenstelling. In elk geval zijn de alkaliën veel losser gebonden. Zij lossen veel gemakkelijker op, dan alkali uit het oorspronkelijke

[1]) G. GEHLHOFF, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **13**, 271 (1911).

glas. Bij onderwerping der lamp aan *Tesla*-ontladingen neemt men een *fel* oplichten van den wand waar. Spectroscopisch ziet men zeer intens de natrium-lijnen. Gewoon glas doet dit niet. Onder omstandigheden kan bij het openen der lamp kristallisatie optreden. Dergelijke veranderingen hebben een afzonderlijk veld van onderzoek uitgemaakt (W. REINDERS en L. HAMBURGER[1]).

Naast de verwijdering van restgassen uit de gloeilamp ontplooit het aanvankelijk op het gloeichaam aangebrachte glas nog een andere werking. Wij zagen boven dat bij condensatie op den ballonwand niet een „normaal" glas wordt terug verkregen. Reeds P. P. VON WEIMARN[2]) heeft er op gewezen dat het soortelijk gewicht van glas des te geringer is naarmate het sneller wordt „afgeschrikt". De afstanden der moleculen in zulk een „glas" zouden dus veel grooter dan in het normale zijn. In deze verslagen wordt door de Heeren L. HAMBURGER, G. HOLST, D. LELY Jr. en E. OOSTERHUIS een mededeeling gedaan, waarin wordt nagegaan, hoe bepaalde vaste stoffen in dunne laag op den ballonwand aangebracht, de donkerkleuring daarvan (als gevolg van condensatie van verdampend wolfraam, afkomstig van het gloeilichaam) kunnen tegengaan. Het blijkt daarbij dat deze ontkleurende werking er een van physischen aard is; door de wolfraammoleculen met behulp van moleculen eener andere stof gescheiden te houden, kan men het optreden van een sterke lichtabsorptie van een samenhangend wolfraamlaagje verhinderen.

Deze werking vertoont nu ook het „glas" op den wand. Terwijl de gladde ballonwand zelf klaarblijkelijk onwerkzaam is, blijkt het van het gloeilichaam afkomende „poreuse glas" wel in staat de inschietende wolfraamdeeltjes te omhullen. Wordt de lamp echter ontijdig geopend, zoodat het poreuse glas kan kristalliseeren, dan heeft het veel van zijn werking verloren.

## § 4. *Aluminaten, phosphaten, oxyden.*

Reeds vroeger (vergel. bijv. Chem. Weekblad **13**, 536 en vlg., 1916) is er opmerkzaam op gemaakt, dat de in een gloeilamp schadelijke gassen voor een deel pas vrijkomen, als de draad bij het voor de eerste maal branden der lamp reeds een hooge temperatuur heeft bereikt. Het is daarom wenschelijk stoffen te gebruiken, welke bij die hooge temperatuur slechts (relatief) langzaam van den

---

[1]) W. REINDERS en L. HAMBURGER. Deze verslagen **25**, 661 (1916), **26**, 595 (1917).

[2]) P. P. v. WEIMARN, Zeitschr. f. Chem. u. Ind. d. Koll. **9**, 25 (1911).

draad verdampen. Als geschikte silicaten hebben wij bij onze proeven verschillende glassoorten, asbest, veldspaath, enz. leeren kennen. Maar behalve silicaten *voldoen aan dezen eisch ook aluminaten*, zooals magnesium-aluminaat, voorts ook $Ca_3\ (PO_4)_2$ (mits niet gehydrolyseerd) en andere soortgelijke verbindingen.

Onze eerste proeven met magnesium-aluminaat geschiedden met natuurlijk spinel, dat wij van een zeer bekende firma betrokken hadden. Daarmede werd het bovenstaande bevestigd gevonden. De analyse echter leerde dat de samenstelling was:

$SiO_2$ 39,3 %, $Al_2O_3$ 22,5 %, $Fe_2O_3$ 6,3 %, $CaO$ 34,3 %, $MgO$ 0,2. %

Dus allerminst spinel. Toch was deze proef leerzaam. Want ze toonde, dat voor het bereiken van het effect, de aanwezigheid van alkali-oxyden niet absoluut noodig is. We komen hierop terug.

Het natuurlijk spinel, dat te onzer beschikking stond, bleek, zooals we zagen, geen spinel te zijn. We hebben daarom kunstmatig, door verhitting van $MgO$ en $Al_2O_3$ op 1800°, een voor ons bruikbaar product gemaakt, dat inderdaad een gunstige werking in den boven aangegeven zin uitoefent. Ook andere stoffen hebben wij in dit opzicht geprobeerd. Men begrijpt, dat, wanneer de temperatuur maar hoog genoeg opgedreven wordt en het laagje der op het gloeilichaam gebrachte stof maar dun genoeg is, alles, wat aan vreemde stof op den draad aanwezig is, in dampvorm overgebracht kan worden. Onder die omstandigheden zal dan ook het $CaO$ uit het glas — indien men een dergelijk silicaat gebruikt — naar den wand gesublimeerd worden. En dan is het natuurlijk wel waarschijnlijk, dat ook wat vrij $Ca$-metaal ontstaat, dat niet minder werkzaam zal zijn dan het alkali-metaal.

Ten slotte vraagt men zich af, of er nog niet veel meer stoffen zijn, welke de „phosphorus-vervangende werking" bezitten. In verband hiermede werden lampen gemaakt, waarbij het gloeilichaam met verschillende oxyden bespoten was. We beproefden $ZrO_2$, $ThO_2$, $TiO_2$, $SiO_2$, $CaO$, $Na_2O$.

Bij alle trad bij het eerste branden een zeer sterke glimontlading op in de lampen. Slechts het $SiO_2$ maakte een uitzondering. Ofschoon de werking minder was dan bij glaspoeder, gaf het silicum-dioxyde bevredigende resultaten.

Dit doet het vermoeden aan de hand, dat ook het $SiO_2$ een weinig ontleed wordt, waarbij silicium vrijkomt, dat in zijn werking phosphorus vervangen kan. Later kan het $SiO_2$ op den wand natuurlijk weer het „afzwarten" daarvan (vergel. § 3) tegengaan. Wat er in de „gespoten lamp" echter aan $SiO_2$ is ontleed, is zeer gering ten opzichte van de hoofdmassa van deze stof, welke onont-

leed verdampt, op den wand condenseert en de donkerkleuring-tegengaande werking uitoefent.

Om hiervan meer te weten te komen, hebben wij kwartsbuizen tot capillairen uitgetrokken en evenals we dat bij het onderzoek met de glas-capillairen beschreven hebben, deze om den wolfraamdraad geschoven. Laat men nu den wolfraamdraad in vacuo op hooge temperatuur branden, dan heeft een relatief langzame $SiO_2$-verdamping plaats. Ten slotte is echter een betrekkelijk dik neerslag verkregen, dat in sterke mate interferentie-kleuren vertoont Bij het openen van den ballon neemt men op den duur veranderingen waar van het kwarts, dat in zulk een dunne laag aanwezig is. Overal schieten in één richting gestrekte naalden uit, welke ook interferentie-kleuren vertoonen, maar waarin men bovendien reeds met het oog onregelmatigheden ziet; bij 50-voudige vergrooting neemt men in die naalden reeds duidelijk een schelpachtige conglomeratie-structuur waar. Soms blijft een dergelijke verandering nog zeer plaatselijk; zij moet wel door het verschil in uitzettings-coefficient van glas (ondergrond) en kwarts (bovenlaagje) ingeleid worden. [1])

In een volgende proevenreeks werd de temperatuur-coefficient van den weerstand van den draad onderzocht om na te gaan, of deze een weinig $Si$ bij de veronderstelde ontleding van het $SiO_2$ opgenomen had. Gelijk men weet is de temperatuur-coefficient van den weerstand een uiterst gevoelig middel, om te zien, of een element, door opneming van iets anders verontreinigd is. Wolfraam en silicium allieeren zich gemakkelijk, zoodat indien veel silicium ontstaan was, dit in de verandering van den temperatuur-coefficient van den weerstand tot uiting moest komen.

Er is echter slechts zeer weinig silicium noodig om (met behulp van glim-ontladingen) restgassen weg te nemen. Onderstellen wij eens eenvoudigheidshalve, dat als restgas alleen zuurstof voorkomt, tot een totaal druk van 0.006 mm.; dan zou dit in een ballon met 150 $cm^3$. inhoud overeenkomen met 0.0017 mgr. $O_2$, welke door 0.0015 mgr. $Si$ zouden kunnen worden gebonden.

Niet alleen is er weinig $Si$ noodig, maar er ontstaat ook weinig $Si$ in de lamp. Daardoor vinden wij in de methode van de temperatuur-coefficient-meting geen positieve aanwijzing op $Si$ vorming; zulks is ook een gevolg daarvan dat voor de vorming van $Si$ uit $SiO_2$, de $W$-draad heftig moet gloeien, zoodat de ev. ontstane geringe hoeveelheid $Si$ direct weggedampt wordt. We zullen dus beter de proef met de kwarts-capillair zoo uitvoeren, dat wij nagaan of zich daarbij meer wolfraam op den wand in den vorm van $WO_3$ afzet, dan bij een lamp zonder kwarts het geval is. Inderdaad krijgt men dan een positief resultaat, doch de hoeveelheid $WO_3$ is veel geringer dan bij gebruik van glas. Die werking tusschen $W$ en $SiO_2$ is overigens analoog aan de werking van $C$ met kwarts, waarbij volgens W. HEMPEL [2]) reductie tot $Si$ onder $CO$-vorming plaats grijpt.

Een verregaande werking tusschen $SiO_2$ en $W$ bij de met $SiO_2$-poeder bespoten lamp, heeft dus zeker niet plaats. De gunstige invloed bij het eerste branden is bij kwarts dan ook veel geringer dan bij glas, zoodat reeds bij aanwezigheid van geringe hoeveelheden van gasontwikkelende verontreinigingen de werking van het $SiO_2$ te kort schiet.

Metaal-oxyden zooals $ZrO_2$, $ThO_2$, $TiO_2$, $Na_2O$ zijn niet geschikt

[1]) Ook R. B. SOSMAN (Journ. Ind. and Engin, Chem. **8**, 985 (1916)) constateert bij condensatie van kwartsdamp een geprononceerde neiging tot vorming van naalden van amorph kwarts.

[2]) W. HEMPEL, Zeitschr. f. angew. Chem. **30**, 10 (1917).

om de werking van phosphorus te vervangen, daar zij òf de glimontlading bij het eerste branden der lamp te zeer versterken (hetgeen tot destructie der laatste kan leiden), òf (zooals bij $Na_2O$) verdampen, voordat die elementen konden ontstaan, welke de functie van phosphorus vermogen uit te oefenen. Sporen van verontreinigingen, die zulke stoffen als $Na_2O$ vergezellen kunnen, verminderen dan bovendien nog den graad van luchtledigheid. Alleen $SiO_2$ is van de vroeger genoemde oxyden geschikt. Maar het silicium is dan ook geen metaal-oxyde, dat voor of bij de ontleding sterk electronen of ionen emitteert.

Is er nu niet een metaal-oxyde, dat minder vluchtig is dan $Na_2O$ en dat toch bij hooge temperatuur de glim-ontlading niet of zeer weinig versterkt?

Misschien zou $Al_2O_3$ niet geheel ongeschikt zijn. Dit oxyde met de bekende enorme affiniteit tusschen aluminium en zuurstof is echter uiterst hitte-bestendig en was in elk geval niet in die richting werkzaam. Anders echter was het resultaat met $MgO$. Inderdaad kan dit op bruikbare wijze de „phosphor"-werking uitoefenen.

Het eenvoudigste van alles blijft echter de toepassing van glas. Er is iets paradoxaals in gelegen, dat men den ballon van een gloeilamp slechts tot poeder behoeft te wrijven, en dit op het gestel aan te brengen, om na insmelting in den nieuwen ballon, een betere lamp verkregen te hebben. Maar deze paradox moge in het licht van het voorgaande een verklaring gevonden hebben.

Er zij nog op gewezen, dat men zich niet noodzakelijk tot het gebruik der aangeduide stoffen alleen behoeft te bepalen, doch deze ook kan toepassen in combinatie met andere, waarvan de gunstige werking bekend is. Merkwaardig is echter, dat de combinatie glaspoeder + phosphorus minder bevredigende resultaten geeft. Misschien dat de phosphorus bij het eerste branden der lamp reduceerend op het verdampende glas werkt en daardoor reeds een weinig het zwart worden van het aanslag op den wand bevordert. Men ziet n.l. reeds na het eerste uitbranden weliswaar een zwakken, doch merkbaar zwarten schijn op den ballonwand.

## § 5. *Samenvatting.*

1. Door middel van waarnemingen langs spectrographischen weg en bepalingen van de verandering van den gasdruk werd aangetoond, dat bij toepassing van electrische ontladingen phosphordamp met alle gassen behalve de edelgassen tot snelle reactie is te brengen.

2. De werking, welke met phosphorus in de gloeilamp wordt bereikt, kan ook met silicaten worden verkregen.

3. Bij hooge temperatuur ondergaan silicaten een gefractioneerde distillatie.

4. In contact met wolfraam heeft bij verhoogde temperatuur tusschen silicaten en dit element een reactie plaats, waarbij alkalimetaal vrijkomt. Met behulp van dit laatste kan, evenzeer als door middel van phosphorus, onder medewerking van electrische ontladingen, de volledige verwijdering van restgassen (bij gloeilampen) tot stand worden gebracht.

5. De werking tusschen wolfraam en glas maakt het gebruik van wolfraam als insmeltdraad voor hardglazen apparaten mogelijk.

6. Bij snelle afkoeling van verdampend sillicaat ontstaat een in onderkoelden toestand verkeerend product, dat geheel andere eigenschappen heeft dan het normale glas. Dit aldus verkregen condensaat kan in de gloeilamp de donkerkleuring van den wand, veroorzaakt door later verdampend wolfraam, verminderen.

7. Een soortgelijke werking als bij gebruik van silicaten wordt door toepassing van aluminaten, calciumphosphaat, magnesium-oxyde, silicum-dioxyde verkregen. Bij dit laatste oxyde moet het ontstaan van een spoor vrij *Si* aangenomen worden; reeds hoeveelheden ter grootte-orde van 0.001 *mgrSi* kunnen een merkbare werking uitoefenen.

Ten slotte stelt schrijver het op hoogen prijs op deze plaats de aandacht erop te vestigen, dat hij tot de uitvoering dezer onderzoekingen door den steun van Dr. G. L. F. Philips, w.i., in staat werd gesteld.

*Eindhoven, Laboratorium der N.V. Philips's Gloeilampenfabriek.*

**Scheikunde.** — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den Heer H. R. KRUYT en Mej. H. G. ADRIANI: *„Over onregelmatige reeksen”.*

(Mede aangeboden door den Heer ERNST COHEN).

**1.** Het hieronder beschreven onderzoek bedoelt een nadere contrôle, welke theorie omtrent de onregelmatige reeksen juist is, die welke het verschijnsel in samenhang brengt met de wederzijdsche uitvlokking van kolloiden [1]) of die welke zich aansluit aan het bizondere verloop der curve grensvlakpotentiaal-electrolytconcentratie voor die zouten, welke het verschijnsel te voorschijn roepen. [2])

Tegen eerstgenoemde theorie is een zeer krachtig argument te vinden in de oudste onderzoekingen, die zich met het verschijnsel bezig hielden. WILHELM BILTZ [3]) bepaalde n.l. voor het $As_2S_3$- en voor het $Sb_2S_3$ sol de grenswaarde, zoowel met oplossingen van de chloriden (resp. nitraat) als met de hydroxydesolen van Fe, Th en Al. Zijn uitkomsten waren de volgende:

28 mg. **$Sb_2S_3$** worden uitgevlokt door (in mg.)

| $Fe_2O_3$ | $ThO_2$ | $Al_2O_3$ | |
|---|---|---|---|
| 32 | 20 | 2.0 | als deze als kolloide hydroxyde-solen waren toegevoegd |
| 2.2 | 5.2 | 0.32 | als ze als electrolyten waren toegevoegd |

24 mg. **$As_2S_3$** worden uitgevlokt door

| $Fe_2O_3$ | $ThO_2$ | $Al_2O_3$ | |
|---|---|---|---|
| 13 | 6 | 2 | als deze als kolloide hydroxyde-solen waren toegevoegd |
| 0.6 | 1.0 | 0.13 | als ze als elektrolyten waren toegevoegd |

Deze uitkomsten leeren dus, dat de grenswaarden geheel verschillend zijn voor bijv. $Al^{\cdot\cdot\cdot}$-ion en $Al(OH)_3$, zoodat het dus onjuist

[1]) Zie alle leerboeken der kolloidchemie.

[2]) KRUYT, Deze Verslagen **23**, 265 (1914); Koll. Zeitschr. **22**, 81 (1918).

[3]) W. BILTZ, Ber d. Deutsch. chem. Ges. **37**, 1115 (1904).

moet zijn de eerste uitvlokkingszone voor $AlCl_3$ te beschouwen als veroorzaakt door een wederzijds neerslaan van het betrokken kolloid door het positief geladen hydroxyde sol, dat door hydrolyse ontstaan zou zijn.

Nu heeft verleden jaar JAC. VAN DER SPEK [1]) twee gevallen van onregelmatige reeksen gevonden, waarbij de oude verklaringswijze geheel faalde, n.l. bij het $Fe_2O_3$ sol, behandeld met NaOH resp. $Na_2HPO_4$, terwijl het gedrag volkomen overeenkomstig de verwachtingen was, die men stellen kon op grond van het electro-adsorptief karakter der deelnemende ionen.

Wij hebben nu een beslissend onderzoek willen doen ten aanzien der systemen, waarin hydrolytische afsplitsing van een tegengesteld geladen kolloid een rol zou kunnen spelen en wel door het onderzoek in neutraal en in alcalisch milieu te verrichten, waardoor dus de vorming van hydroxyde al of niet bevorderd wordt.

**2.** Na voorproeven met verschillende solen en electrolyten (zie § 4) vonden wij een zeer geschikte combinatie bij het goudsol, behandeld met $Th(NO_3)_4$.

Het goudsol was bereid volgens een methode, aangegeven door TEMMINCK GROLL [2]). 90 ccm. gedistilleerd water, 10 ccm. eener 3 % waterstofsuperoxyde oplossing (verkregen door verdunning van MERCK's „Perhydrol" en juist geneutraliseerd door een NaOH oplossing), 0.6 ccm, $HAuCl_4$ oplossing (1 : 150) werden samengebracht met nog weer zooveel natron als ter neutralisatie van het gevormde HCl noodig is. Vervolgens werd door toevoeging van nog 1.4 ccm. goudchloride oplossing (en neutralisatie!) de goudconcentratie verhoogd.

Daarna werd op gelijke wijze een tweede hoeveelheid gemaakt, de twee porties gemengd en daarna het mengsel weer in tweeën gedeeld. Aan een van deze dus volkomen vergelijkbare solen werd nu 1 ccm. 0.08 n. natronloog toegevoegd, waardoor deze portie als *alcalisch sol*, de andere als *neutraal sol* verder werd onderzocht.

Het uitvlokkingsverloop kon nagegaan worden in glazen buisjes met ingeslepen stop. Aan 5 ccm. sol werd 1 ccm. electrolytoplossing toegevoegd, goed geschud en na 5 min. de kleur beoordeeld. Dat blauwkleuring volledige uitvlokking aanwijst is door GALECKI's onderzoek [3]) duidelijk gebleken.

---

[1]) JAC. VAN DER SPEK, Diss. Utrecht 1918; KRUYT en VAN DER SPEK, Koll. Zeitschr. verschijnt eerstdaags.

[2]) TEMMINCK GROLL, Chem. Weekbl. **13**, 617 (1916).

[3]) A. GALECKI, Zeitschr. f. anorg. Chem. **74**, 174 (1912).

De Tabellen 1 en 2 geven de resultaten weer.

TABEL I. Neutraal Au-sol met $Th(NO_3)_4$.

| Electrolyt conc. m Mol. per L. | Toestand na 5 min. |
|---|---|
| tot 0.00084 | rood |
| 0.00086 — 0.00088 | blauw-rood |
| 0.00090 | blauw |
| 0.00090 — 0.0028 | blauw |
| 0.0030 | blauw-paars |
| 0.0040 | rood |
| 0.0040 — 15.00 | rood |
| 15.5 | rood-paars |
| 17 — 19 [1]) | paars |
| 20 [1]) | blauw |
| 21 — 26 [1]) | blauw |

TABEL II. Alcalisch Au-sol met $Th(NO_3)_4$.

| Electrolyt conc. m Mol. per L. | Toestand na 5 min. |
|---|---|
| 0.0005 — 0.02 | rood |
| 0.03 | roode vlokken |
| 0.04 | " " |
| 0.05 | " " |
| 0.10 | rood |
| 0.25 — 2.5 | rood |
| 3.0 | rood-paars |
| 5.0 [2]) | blauw |

In bovenstaande tabellen zijn alle concentraties eindconcentraties d. w. z. berekend op het eindvolume sol + electrolytoplossing. In Tabel 3 zijn de conclusies samengevat.

[1]) Bij deze proeven is inplaats van 1 ccm. resp. 1.2, 1.3, 1.4 ccm. electrolyt-oplossing toegevoegd wegens de vereischte *groote* eindconcentraties.

[2]) Bij deze proef is 2 ccm. electrolytoplossing toegevoegd.

TABEL III. Conclusies.

| | Neutraal sol. | Alcalisch sol. |
|---|---|---|
| 1e grenswaarde | 0.00090 | 0.03 |
| einde 1e vlokkingszone | 0.0030 | ca. 0.10 |
| 2e grenswaarde | 20 | ca. 5 |

**3**. Deze uitkomsten geven aanleiding tot verschillende eigenaardige gevolgtrekkingen.

In de eerste plaats is opvallend, dat bij het alcalische sol de eerste grenswaarde zoo enorm veel hooger ligt dan bij het neutrale, nl. bij 33 maal grootere concentratie. Dit feit leidt al dadelijk tot het vermoeden, dat het vlokkend agens in die twee gevallen verschillend is en in verband met de alcalische reactie ligt het voor de hand in dat geval de uitvlokking door kolloidaal thoriumhydroxyde aan te te nemen. Daarmede is in volkomen overeenstemming het opvallende feit, dat bij de behandeling van het alcalische sol de eerste uitvlokkingszône zich niet door blauwkleuring van het sol kenbaar maakt, maar door het neerslaan van roode vlokken. Men heeft hier klaarblijkelijk te doen met een analogon van het *purper van* CASSIUS, het fraaie roode neerslagsproduct, dat men verkrijgt bij reductie van $AuCl_3$ met $SnCl_2$ en dat door ZSYGMONDI [1]) herkend is als het product van wederzijdsche uitvlokking van kolloid goud en kolloid $SnO_2$; hier ontmoeten wij nu een overeenkomstig neerslagsproduct van kolloid goud en kolloid $ThO_2$.

Ten einde met zekerheid vast te stellen, dat zulk een product inderdaad bestaat, hebben wij een sol van $ThO_2$ bereid volgens A. MÜLLER [2]), door uit een oplossing van $Th(NO_3)_4$ met ammonia $ThO_2$ neer te slaan en dit vervolgens door middel van HCl te peptiseeren.

Wij gingen nu het verloop na van de wisselwerking van goud- en thoriumoxyde sol; in tabel 4 vindt men een resumé dezer proeven.

Inderdaad hebben wij hier met het normale beeld voor een wederzijdsche uitvlokking te doen, waarbij het roode neerslag alle overeenkomst vertoont met het purper van CASSIUS en met het praecipitaat der voorafgaande proeven uit Tabel 2. Eerst hebben wij het roode

[1]) ZSYGMONDI, Lieb. Ann. **301**, 365 (1898). Nadat dit onderzoek afgesloten was verscheen een verhandeling van ZSYGMONDI, Z. f. physik. Chem. **92**, 600, waarin hetzelfde feit wordt vermeld (p. 608).

[2]) A. MÜLLER, Koll. Zeitschr. **2**, Suppl. S VI (1907).

TABEL IV. Alcalisch Au-sol met $ThO_2$ sol.

| Conc. $ThO_2$ m Mol. per L. | Toestand na 5 min. |
|---|---|
| 0.002 — 0.10 | rood sol |
| 0.25 — 0.50 | roode vlokken |
| 0.60 — 7 | rood sol |

Au sol tegenover ons; dan zien wij volkomen praecipitatie van het thorium-goud-purper, dat vervolgens door overmaat hydroxyde gepeptiseerd wordt.

De bovenstaande uitkomsten leiden ons dus tot de conclusie, dat wij bij de bestudeering der combinatie Au sol-thoriumhydroxyde twee gevallen ontmoeten, die elk aan een der verklaringstheorien voor het verschijnsel der onregelmatige reeksen beantwoorden. Bij het alcalische sol heeft inderdaad de eerste uitvlokkingszône het karakter van die eener wederzijdsche uitvlokking, terwijl de tweede niet-uitvlokkingszône die is van het gepeptiseerde purper. Bij het neutrale sol daarentegen vindt de eerste uitvlokkingszône normaal haar verklaring als veroorzaakt door de ontladende werking van een tegengesteld geladen ion; zij eindigt door de omlading van het electro-capillair zoo sterk werkzame karakter van dat ion.

Niet slechts het kwalitatieve onderscheid van het praecipitatie-product der eerste uitvlokkingszône toont dat aan, ook de kwantitatieve uitkomsten bevestigen dit volkomen. De eerste grenswaarde voor het Th-ion bedraagt slechts 0.9 micro mol ($\mu$ mol = 0.000001 mol). Bij zijn onderzoekingen over stroomingspotentialen vond een van ons[1]), dat een glaskapillair ontladen wordt door 0.8 $\mu$ Mol $Al^{\cdots}$ ion, terwijl een onderzoek van POWIS[2]) geleerd heeft, dat $Th^{\cdots\cdot}$ nog belangrijk actiever is dan $Al^{\cdots}$. De grenswaarde 0.9 $\mu$ mol is een totaalconcentratie, de evenwichtsconcentratie der vloeistof na de adsorptie (aan het kolloide goud) ligt dus belangrijk lager, en komt dus juist in de orde, die men zou kunnen verwachten.

Bij uitvlokking met kolloid $ThO_2$ moet men natuurlijk een veel hooger thoriumgehalte verwachten, afhankelijk van den dispersiteitsgraad en de lading der deeltjes. Men kan verwachten, dat het $ThO_2$-sol, dat ontstaat door een zeer verdunde $Th(NO_3)_4$-oplossing bij het alcalische goudsol te brengen, hooger dispers wordt, dan dat, hetwelk

[1]) KRUYT, deze Verslagen **23**, 252 (1914); Koll. Zeitschr. **22**, 81 (1918).

[2]) POWIS, Zeitschr. f. physik. Chem. **89**, 91 (1915).

volgens MÜLLER bereid is. Dienovereenkomstig vindt men boven aangegeven als (eerste) grenswaarden in die gevallen 30 resp. 200 $\mu$ mol $ThO_2$, waarden dus, die een te verwachten verschil vertoonen, maar overigens beide veel hooger zijn dan die voor het Th-ion.

De algemeene conclusie van dit onderzoek is dus, dat in het algemeen de onregelmatige reeksen veroorzaakt worden door de sterke capillair-electrische werking der ontladende (en omladende) ionen; dat slechts bij opzettelijke vorming van hydroxyde sol, door alcalische reactie van het milieu het verschijnsel van wederzijdsche uitvlokking naar voren treedt.

**4.** Onze voorproeven met $AlCl_3$ wezen in eenzelfde richting. Werkt men met een sol, dat flink alcalisch gemaakt is, dan verkrijgt men eveneens roode vlokken, een aluminium-goud-purper dus, en wel bij 0.9 milliatomen Al.

Bij proeven met het formol-sol, dat zwak alkalisch is, zijn grenswaarden gevonden in de orde van 10—20 $\mu$ mol [1]), door constateering van blauwkleuring; daarbij heeft men dus klaarblijkelijk een tusschengeval, waarbij echter de ionenuitvlokking overheerscht.

Wij hebben nog verschillende andere voorproeven verricht. Werkend met het $As_2S_3$-sol (ca 5 gr. $As_2S_3$ per L.), konden wij vaststellen, dat noch met $Al\,K\,(SO_4)_2$, noch met $AlCl_3$, noch met $FeCl_3$, noch met $Th(NO_3)_4$ een tweede niet-uitvlokkingszône optreedt. Het is merkwaardigerwijze bekend, dat zulks wel gelukt met strychnine-nitraat en met nieuw-fuchsine [2]), hetgeen wij overigens kunnen bevestigen. Maar evenmin als POWIS [3]) is het ons gelukt met polyvalente ionen een voldoende omlading te bewerkstelligen, welke kunstgrepen wij ook toepasten om het sol over de fatale grens tusschen de negatieve en de positieve kritische potentiaal heen te krijgen. Daarvoor hebben wij eerst de 10 ccm. sol bij de 1 ccm. electrolyt laten vloeien; toen 5 ccm. sol bij 5 ccm. electrolyt; eindelijk lieten wij het sol druppel voor druppel in verschillende geconcentreerde elektrolytoplossingen loopen onder levendig omschudden. Bij het meest kansbiedende zout, $Th(NO_3)_4$ bleek de grenswaarde 0.075 m mol p. L., maar tot 10 m mol per L. toe had telkens onmiddellijke uitvlokking plaats.

Ook bij het $V_2O_5$-sol gelukte het niet een onregelmatige reeks te voorschijn te roepen.

---

[1]) Vgl. MORAWITZ, Koll. Beih. **1**, 301 (1910); KRUYT en VAN DUIN, ibid. **5**, 269 (1914).

[2]) FREUNDLICH, Zeitschr. f. physik. Chem. **73**, 385 (1910).

[3]) POWIS, Journ. chem. Soc. **109**, 734 (1916).

Naar aanleiding van deze resultaten zie men de hier volgende verhandeling van H. R. KRUYT en A. E. VAN ARKEL, § 3.

**5.** Het bovenbeschreven onderzoek is verricht in den zomer van 1917. De publicatie is door bizondere omstandigheden vertraagd, ze was bedoeld voor een uitvoeriger bespreking van het geheele vraagstuk in het Recueil des Trav. chim. des Pays Bas.

Deze voorloopige mededeeling geschiedt intusschen thans, in verband met het hier volgende onderzoek.

*Utrecht*, November 1918. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

---

**Scheikunde**. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van de Heeren H. R. KRUYT en A. E. VAN ARKEL: *„Over het verband tusschen grenswaarde en concentratie bij goudsolen"*.

(Mede aangeboden door den Heer ERNST COHEN).

1. Op grond van hun onderzoekingen aan het $As_2S_3$-sol hebben H. R. KRUYT en JAC. VAN DER SPEK[1]) de volgende theorie opgesteld over het verband tusschen de grenswaarde en de solconcentratie bij suspensoiden.

*a*. Wanneer de kritische potentiaal, die bereikt moet worden om een sol in een vastgestelden tijd volledig tot uitvlokking te brengen, onafhankelijk was van de solconcentratie, dan zou per electrolyt de evenwichtsconcentratie na de adsorptie constant moeten zijn voor alle verdunningen van het kolloide systeem. Daar de geadsorbeerde hoeveelheid afneemt met de verdunning van het sol, zouden de minder geconcentreerde solen ook een kleinere hoeveelheid electrolyt noodig hebben om de gewenschte potentiaal te bereiken.

*b*. Daar echter door vermindering der solconcentratie de botsingskans afneemt, wordt er bij verdunning van het sol een grootere verlaging van de contactpotentiaal vereischt, om een even sterke uitvlokkende werking te voorschijn te roepen. De vereischte grootere kleefkans sluit een verlaging van de kritische potentiaal in zich, wat dus een meerdere toevoeging van electrolyt medebrengt. Om deze reden zullen dus verdunde solen een grootere concentratie der electrolyt in het dispersiemiddel vereischen dan het onverdunde sol.

*c*. De twee tegengestelde tendenzen, onder *a* en *b* vermeld, zullen zich nu doen gelden, afhankelijk van den aard van het uitvlokkende ion. Is dat electro-capillair weinig actief (bv. door lage valentie van een anorganisch ion), dan zullen totaal-electrolyt en evenwichtsconcentratie in het dispersiemiddel relatief weinig verschillen. Invloed *a* zal zich dus bij electro-capillair actieve ionen doen gelden. Invloed *b* daarentegen treedt bij capillair-weinig-actieve ionen op den voorgrond, omdat een betrekkelijk aanzienlijke hoeveelheid daarvan vereischt wordt, wanneer een merkbare verlaging der contactpotentiaal tot stand gebracht moet worden.

---

[1]) Deze Verslagen **23**, 1104 (1915); Chem. Weekbl. **14**, 950 (1917); Diss. JAC. VAN DER SPEK, Utrecht 1918; Koll. Zeitschr. verschijnt eerstdaags.

Bij het $As_2S_3$-sol is nu gebleken, dat voor het K˙ ion de grenswaarde bij verdunning stijgt, bij Ba˙˙ nauwelijks daalt, bij Al˙˙˙ daarentegen sterk daalt. Het hier volgende onderzoek houdt zich nu bezig met de analoge verschijnsels bij het goudsol.

**2**. Goudsolen worden bereid volgens de methode TEMMINCK GROLL, met waterstofsuperoxyde, bereid uit „Perhydrol"-MERCK. Gebruikt werden nagenoeg neutrale solen, die slechts een miniem spoor vrij zuur bevatten.

De grenswaarde werd op de gebruikelijke wijze door volkomen *blauw* kleuring bepaald, aan het sol zelf, aan een dat met het eigen volume gedistilleerd water was verdund (1 : 2), en aan een, dat met driemaal het eigen volume was verdund (1 : 4).

In onderstaande Tabellen zijn de uitkomsten weergegeven; alle concentraties zijn eindconcentraties en uitgedrukt in millimolen per Liter.

| Sol concentratie. | Grenswaarde KCl. | | | Grenswaarde $BaCl_2$. | | | Grenswaarde $AlK(SO_4)_2$. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sol I. | II. | III. | Sol II. | III. | IV. | II. | III. |
| Onverdund | 13.5 | 12.5 | 9.4 | 0.30 | 0.39 | 0.45 | 0.017 | 0.016 |
| 1 : 2 | 15.5 | 16 | 15.5 | 0.63 | 0.63 | 0.75 | 0.031 | 0.025 |
| 1 : 4 | 22.5 | 23 | 19 | 0.70 | — | 0.84 | 0.045 | 0.054 |

| Sol concentratie. | Grenswaarden $Th(NO_3)_4$; Sol IV. [1] | | |
|---|---|---|---|
| | 1e grenswaarde. | Einde 1e uitvl. zône. | 2e grenswaarde. |
| Onverdund | 0.00086 | 0.0024 | 27 |
| 1 : 2 | 0.00080 | 0.0015 | 18 |
| 1 : 4 | 0.00070 | 0.0009 | 8 |

Bij het goudsol komt dus eenzelfde verschijnsel voor den dag als bij het $As_2S_3$ sol, dat bij verdunning van het sol de grenswaarde stijgt. Terwijl bij het $As_2S_3$-sol echter alleen het eenwaardige K˙-ion dit verschijnsel vertoonde, en bij een tweewaardig ion, bij $BaCl_2$, alreeds het omgekeerde verschijnsel zich voordoet, vertoont het

[1]) Een volledige duplobepaling leverde gelijke uitkomst.

gondsol deze eigenschap bij één-, twee- en driewaardig anorganisch kation, terwijl eerst bij het vierwaardige Th⁗ion dalende grenswaarden bij solverdunning optreden.

Een bespreking van dit verschil in gedrag tusschen Au- en $As_2S_3$-sol vindt men in de volgende verhandeling van een van ons beiden.

De uitkomsten zijn in overeenstemming met het onderzoek van ZSYGMONDI [1]), die vond, dat de uitvlokkingstijd van het goudsol door verdunning toenam voor de electrolyten $SrCl_2$ en NaCl Als de uitvlokkingstijd toeneemt zal men meer electrolyt noodig hebben om gelijk uitvlokkingsverschijnsel in eenzelfden tijd te voorschijn te roepen. Was het onderzoek ook uitgebreid tot Th⁗, dan zou ZSYGMONDI vermoedelijk het omgekeerde gedrag geconstateerd hebben.

**3.** Ten aanzien van het verschijnsel der onregelmatige reeksen doet zich hier iets eigenaardigs voor. Tegengesteld aan onze verwachting mocht het ons niet gelukken met Al, zoo min met het sulfaat als met het chloride, een tweede niet-uitvlokkingszône te bereiken bij het onverdunde sol. Vanaf de concentratie der eerste grenswaarde waren en bleven de solen blauw. Daar het in 't algemeen zeer goed mogelijk is met Al‴ion ladingsomkeering te bewerken, moet de oorzaak van ons resultaat daarin gezocht worden, dat de positieve lading niet voldoende hoog opgevoerd kan worden en daardoor beneden de kritische potentiaal (positief!) blijft. In nevenstaande figuur is die verhouding graphisch tot uitdrukking gebracht.

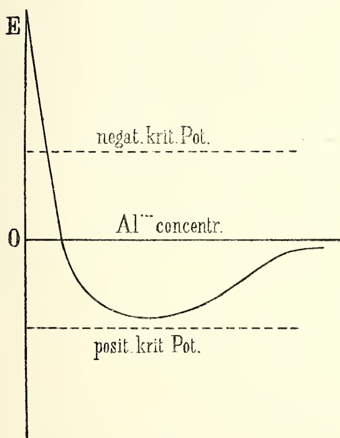


Fig. 1.

Nu moet men echter op grond der boven geresumeerde theorie verwachten, dat peptisatie van het goud tot een positief geladen sol bij een geringere potentiaal-waarde tot stand zal kunnen worden gebracht, indien door verdunning de botsingskans der deeltjes is verkleind. Deze overweging verklaart het herhaaldelijk geconstateerde feit, dat bij het meest verdunde sol (1 : 4) inderdaad telkens een aanwijzing voor een onregel-

[1]) R. ZSYGMONDI, Zeitschr. f. physik. Chem. **92**, 600 (1918).

matige reeks optrad. In de reeks buisjes, die bij de andere solconcentraties steeds alle blauw waren, trad hier altijd één paars buisje op; bij sol III bijv. bevatte dit buisje 0.078 mMol Al K $(SO_4)_2$ per Liter. De eerste uitvlokkingszône strekt zich daar dus uit over een concentratieveld van ca 24 $\mu$ Mol. De tweede niet-uitvlokkingszône is te klein voor meting.

In het geval der uiterste verdunning is de configuratie der figuur dus zoo, dat de lijn der positieve kritische potentiaal nog juist de lijn der grensvlakpotentiaal snijdt.

**4.** Het onderzoek betreffende het mechanisme der uitvlokking wordt aan andere solen voortgezet. Voorloopige proeven doen vermoeden dat het seleen-sol bizondere geschiktheid vertoont voor dit soort onderzoekingen en voor nadere ultramicroscopische bestudeering van deze verschijnselen. Wij hopen daarop terug te komen. [1])

*Utrecht,* November 1918. VAN 'T HOFF-*Laboratorium.*

[1]) *Noot bij de correctie.* Zie onze inmiddels verschenen mededeeling Chem. Weekl. **16**, 220, (1919).

**Scheikunde**. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den Heer H. R. KRUYT: *„Over de kritische Potentiaal"*.

(Mede aangeboden door den Heer ERNST COHEN).

**1**. De ontdekking van HARDY[1]), dat het uitvlokken van een kolloid sol plaats heeft bij de electrolytconcentratie, die tevens juist in staat is de electrische kataphorese der deeltjes te doen ophouden, is van het grootste belang geweest voor de ontwikkeling der kolloidchemie. Zij heeft geleid tot de opstelling van de wet, waaraan alle suspensoiden geacht werden te gehoorzamen, dat de uitvlokking geschiedt in het isoëlectrische punt. De onderzoekingen van BURTON[2]) schenen HARDY's uitkomsten geheel te bevestigen, maar het was opvallend, dat de proeven van dezen onderzoeker slechts verricht worden met trivalente ionen; eigen ervaring leerde ons reeds voor jaren (**1912**), dat bv. met $BaCl_2$ deze proeven zich niet laten reproduceeren. Dit werd begrijpelijk, toen een ander onderzoek ons[3]) leerde, dat met $Ba^{\cdot\cdot}$ een volledige ontlading zich in 't geheel niet laat bewerkstelligen. Volledige ontlading is dus geen vereischte voor spontane uitvlokking. Volkomen helderheid heeft een onderzoek van POWIS[4]) gebracht, die kon aantoonen, dat de snelle uitvlokking niet ontlading tot het isoëlectrische punt vereischt, maar dat het bereiken van zekere potentiaalwaarde, door hem de *kritische* potentiaal genoemd, voldoende is om de uitvlokking te voorschijn te roepen.

Het begrip kritische potentiaal beteekent wederom een belangrijke stap vooruit in de theorie van het uitvlokkingsproces; het heeft dan ook al reeds dienst gedaan bij de interpretatie van verschillende verschijnsels. Juist daarom is het van belang de algemeene beteekenis er van goed te doorzien; deze mededeeling bedoelt daartoe bij te dragen.

**2**. De kritische potentiaal is de potentiaal, waarbij snelle en volkomen uitvlokking plaats vindt. Nu is snelle en volkomen uitvlokking

---

1) W. B. HARDY, Zeitschr. f. physik. Chem. **33**, 385 (1900).

2) E. F. BURTON, Phil. Mag. [6] **11**, 425; **12**, 472 (1906) en **17**, 583 (1909).

3) H. R. KRUYT, Deze Verslagen van 27 Juni 1914.

4) F. POWIS, Zeitschr. f. physik. Chem. **89**, 186 (1915).

een begrip, dat nadere omschrijving vraagt. Men kan deze omschrijving geven door een zekeren uitvlokkingstijd te eischen in samenhang met een aantal afgesproken condities omtrent de wijze van vermenging van electrolyt en sol en omtrent de geheele verdere handelwijze. Alleen onder die voorwaarden is de kritische potentiaal een bepaalde grootheid.

Is zij dan echter een constante voor een bepaalde gedispergeerde stofsoort? Ook dat moet ontkend worden. Wij hebben vroeger ontwikkeld [1]), dat het mechanisme der uitvlokking ontleed moet worden (overeenkomstig de theoriën van VON SMOLUCHOWSKY [2]) en van H. C. BURGER [3])) naar de kans der deeltjes om onderling te botsen en om onderling aan elkander te blijven kleven. Deze laatste mogelijkheid wordt beheerscht door de grensvlaklading; de kritische potentiaal is dus de potentiaal, die kenmerkend is voor de kleefkans, welke onder gegeven omstandigheden voor de uitvlokking in bepaalden tijd vereischt wordt. Wij hebben nu vroeger uiteengezet dat, wil men uitvlokking in eenzelfden tijd verkrijgen, de kleefkans verhoogd moet worden als de omstandigheden een verlaging der botsingskans veroorzaakt hebben, zooals b.v. bij voorafgaande verdunning van het sol het geval is. Alsdan wordt dus een andere kritische potentiaal vereischt, en hetzelfde geldt bij de vergelijking van twee solen, die in dispersiteitsgraad verschillen.

**3.** De geheele samenhang van grenswaarde, contactpotentiaal, kritische potentiaal en kleefkans is in fig. 1 tot uitdrukking gebracht. De fig. op de assen $\frac{x}{m}$ en c is de bekende figuur van FREUNDLICH [4]), welke het verband van de grenswaarden voor uitvlokkende ionen van verschillende valentie weergeeft; de fig. op de assen $\varepsilon$ en c geeft den samenhang van concentratie en grensvlakpotentiaal weer voor die ionen [5]). Het verband tusschen deze beide figuren is elders besproken [6]). De fig. op de assen K en $\varepsilon$ geeft het verband aan tusschen kleefkans en grensvlaklading.

---

[1]) H. R. KRUYT en JAC. VAN DER SPEK, Koll Zeitschr. (verschijnt eerstdaags). Zie ook Chem. Wb. **14**. 950 (1917) en Diss. VAN DER SPEK. Utrecht 1918; een korte samenvatting van een toepassing vindt men in § 1 der hier voorafgaande verhandeling van KRUYT en VAN ARKEL.

[2]) M. VON SMOLUCHOWSKY, Zeitschr. f. physik. Chem. **92**. 129 (1917).

[3]) H. C. BURGER, Deze Verslagen **25**, 1482 (1917).

[4]) Zeitschr. f. physik. Chem. **73**, 385 (1910).

[5]) KRUYT, Deze Verslagen **25**, 1038 (1917).

[6]) KRUYT. Koll. Zeitschr. **22**, 81 (1917).

De kleefkans is het quotient van het aantal botsingen, dat tot vereeniging leidt en het totaal aantal botsingen, zij beweegt zich dus tusschen de grenzen 0 en 1; bij groote waarden van $\varepsilon$ nadert zij 0, bij het isoëlectrische punt is zij vermoedelijk 1. Het geteekende verloop geeft schematisch den toestand weer, zooals wij dien b.v. bij

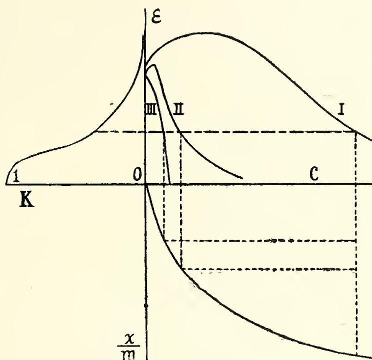



Fig. 1.

sulfide-solen kennen. Bij kleine electrolyt-concentraties, d. w. z. in het gebied der groote grensvlakpotentialen, heeft er geen merkbare verandering van het sol plaats. Daarin komt bij zekere concentratie verandering en men krijgt dan bij toenemende concentratie toenemende uitvlokking [1]). Dit rechtvaardigt het geteekende verloop der $K\varepsilon$-curve, in het besproken gebied nl. convex t.o.v. den oorsprong.

Bij isoëlectrische verhoudingen is de kleefkans waarschijnlijk 1. Men krijgt nu vaak den indruk, dat ook bij waarden tusschen $\varepsilon = 0$ en $\varepsilon = \varepsilon_{kr}$ er weinig verschil in uitvlokkingssnelheid overblijft, wanneer men tenminste $\varepsilon_{kr}$ een goed stuk gepasseerd is: men krijgt dan al gauw spontane uitvlokking. Van uit $K = 1$ stijgt de $K\varepsilon$-curve dus steil, de curve is daar dus concaaf en hierdoor het geteekende verloop met een buigpunt verantwoord.

Voor goudsolen moet het verloop echter anders zijn. Een concentratiegebied met gedeeltelijke uitvlokking is hier nauwelijks waar te nemen, de uitvlokkingssnelheid neemt, blijkens onderzoekingen van

---

[1]) Vgl. Powis, Journ. Chem. Soc. **109**. 734 (1916).

ZSYGMONDI en zijn leerlingen [1]), vanaf zekere concentratie uiterst snel toe om dan op een nagenoeg constante waarde te blijven.

In fig. 2 hebben wij de Kε-figuur voor het goud geteekend, vergelijkbaar met het overeenkomstige stuk uit fig. 1. Het is een lijn van dezelfde orde, maar met andere parameters, dan die voor een sulfidesol; zij brengt zoowel tot uitdrukking, dat er een vrij plotselinge sprong is tusschen het niet-uitvlokkings- en het uitvlokkingsgebied, alsook dat de uitvlokkingssnelheid (en dus de kleefkans) bijna niet verandert als de kritische potentiaal eenmaal bereikt is.

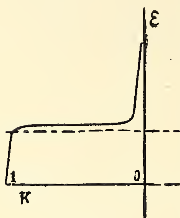


Fig. 2.

4. De geteekende figuren voor sulfide- en goudsol zijn in staat ons te verklaren de verschillen, die aan den dag getreden zijn bij de onderzoekingen over het verband tusschen grenswaarde en solconcentratie, zooals ik die te zamen met de heeren JAC. VAN DER SPEK [2]) en A. E. VAN ARKEL [3]) heb verricht, resp. aan een arseentrisulfide- en aan een goudsol.

Volgens de theorie, door ons opgesteld om de verschijnsels te verklaren [4]), wordt de vraag, of de grenswaarde bij verdunning van het sol toe- of afneemt beheerscht door de totaalconcentratie van het uitvlokkende ion en door den invloed, dien de electrolytconcentratie op de contactpotentiaal en daardoor op de kleefkans heeft. Ten aanzien van deze laatste nu bestaat er een groot onderscheid tusschen de beide solen, zulks is af te lezen uit de figuren, die wij zooeven opgesteld hebben op grond van de uitvlokkingsverschijnselen, zooals men die telkens bij één sol waarneemt. Bij het $As_2S_3$ sol wordt een verhoogde kleefkans gemakkelijk verkregen door een verhoogde electrolytconcentratie; want deze laatste wijzigt regelmatig de contactpotentiaal, en de kleefkans volgt vrij regelmatig de contactpotentiaal. Zulke regelmatige verhoudingen waren de vooronderstellingen der theorie, opgesteld naar aanleiding van de proeven met dit sol.

Maar bij het goud is het anders. De samenhang tusschen electrolyt-

[1]) Zie spec. Zeitschr. f. physik. Chem. **92**, 600 (1918), in het bizonder de figuur 4 op p. 613, die zijn uitkomsten met die van GALECKI [Z. f. anorg. Chem. **74**, 201 (1912)] vereenigt.

[2]) Deze Verslagen **23**, 1104 (1915); Koll. Zeitschr. (verschijnt eerstdaags); Diss. JAC. VAN DER SPEK, Utrecht 1918.

[3]) Zie de voorafgaande mededeeling.

[4]) KRUYT en VAN DER SPEK, l.c.

concentratie en grensvlaklading moge regelmatig zijn, die tusschen laatstgenoemde en kleefkans is wel niet discontinu, maar hij verandert toch tweemaal zeer rapide van karakter. Wanneer dus in onze fig. 2 de punt-streeplijn de kritische potentiaal weergeeft voor het onverdunde sol, dan toont die fig. tevens hoe moeilijk het is de kleefkans te verhoogen, wanneer dat ter compensatie van een verkleinde botsingskans vereischt wordt, althans hoe groote verlaging der contactpotentiaal daartoe eerst bewerkstelligd moet worden.

Vergelijken wij speciaal het gedrag t. o. v. een tweewaardig kation. De grenswaarde is betrekkelijk klein (of zij bij $As_2S_3$ en Au in verschillende mate gering is t. o. v. de geadsorbeerde hoeveelheid weten wij niet; wij nemen voorloopig aan dat te dien opzichte geen principieel verschilpunt aanwezig is), daardoor zal bij vermindering der sol-concentratie de geringere geadsorbeerde hoeveelheid zich kunnen doen gevoelen in de grenswaarde in den zin eener *verlaging*. De verkleinde botsingskans eischt echter een verhoogde kleefkans, dus een verlaagde contactpotentiaal of een *verhoogde* electrolytconcentratie d.i. grenswaarde. Nu is de contactpotentiaal gevoelig voor de concentratie van een tweewaardig ion. Maar dan komt het verschil: bij het $As_2S_3$ verandert de kleefkans merkbaar met de contactpotentiaal, dus met kleine verandering der electrolytconcentratie; bij het goud daarentegen wijzigt de contactpotentiaal voor waarden beneden de kritische weinig aan de kleefkans. Terwijl bij het $As_2S_3$ sol de concentratie*vergrooting* overgecompenseerd werd door de *verlaging* tengevolge der verminderde adsorptie, heeft bij het goudsol begrijpelijkerwijze de vergrootende tendens de overhand. Zelfs voor het $Al^{\cdot\cdot\cdot}$-ion is zulks nog het geval en eerst bij het capillair zoo buitengewoon actieve $Th^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$-ion treedt een omkeering op.

**5.** Uit het bovenstaande blijkt dus eenerzijds, dat de kritische potentiaal maar onder velerlei voorbehoud een constante is voor een bepaalde gedispergeerde stofsoort; anderzijds komt voor den dag, hoezeer haar nadere preciseering aanleiding geeft tot de verklaring van verschijnselen, die zonder haar kennis onontwarbaar zouden zijn.

*Utrecht*, November 1918. VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

---

44

**Scheikunde**. — De Heer JAEGER biedt, mede namens den Heer W. THOMAS, eene mededeeling aan: „*Onderzoekingen over* PASTEUR'S *Beginsel omtrent het Verband tusschen Moleculaire en Kristallografische Dissymmetrie: VIII. De spontane Splitsing van het racemische Kalium-Kobalt-Oxalaat in zijne optische Antipoden*".

§ **1**. In aansluiting met de thans bereikte splitsing der racemische complexe *tri-oxalaten* van het *kalium* en de driewaardige metalen *chromium* [1]), *rhodium* [2]), en *iridium* [3]), was het gewenscht om, ter wille der onderlinge vergelijking van hunne rotatie-dispersie en kristalvormen, ook de splitsing in optisch-actieve componenten te beproeven bij het analoog gebouwde *kalium-kobalti-oxalaat*. Daarmede zou dan de reeks der onderzochte complexe trioxalaten geheel volledig zijn.

Moeilijkheden van allerlei aard stonden tot dusverre aan de bedoelde splitsing in den weg, deels hun grond vindend in de geringe bestendigheid van het zout tegenover temperatuursverhooging, deels in de oplosbaarheidsverschijnselen der verbindingen van het *kobalt*houdende ion met actieve basen, alsmede in de groote gevoeligheid voor lichtstraling, die deze zouten snel doet uiteenvallen onder vorming van een rose, weinig oplosbaar neerslag.

Het racemische zout: $K_3\{Co(C_2O_4)_3\} + 3\frac{1}{2}H_2O$, is destijds reeds door COPAUX [4]) onderzocht. Het is, evenals de overeenkomstige zouten van de drie andere metalen, triklien, maar niet daarmede isomorf, in overeenstemming met het verschillend watergehalte, dat bij de *rhodium-* en *iridium*zouten $4\frac{1}{2}$ molekuul bedroeg. Het werd op de volgende wijze in grootere hoeveelheid bereid.

Een mengsel van 25 gram *kobaltcarbonaat*, 250 ccm. eener verzadigde oplossing van *kaliumoxalaat*, en 230 ccm. eener eveneens verzadigde oplossing van *oxaalzuur*, werden onder voortdurend omroeren op het waterbad zóó lang verwarmd, totdat al het carbo-

[1]) A. WERNER, Ber. d. d. Chem. Ges. **45**. 3061 (1912).

[2]) A. WERNER, Ber. d. d. Chem. Ges. **47**. 1954 (1914); F. M. JAEGER, deze Verslagen, **26**. 170 (1917).

[3]) F. M. JAEGER, Versl. der Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, **26**. 185 (1917). **27**. 81 (1918).

[4]) H. COPAUX, Bull. de la Soc. Min. **29**. 75 (1906); Ann. de Chim. et Phys. (8). **6**. 508 (1905).

naat opgelost was. De verkregen oplossing werd daarna op ca. 40° C. afgekoeld, en vervolgens werden 30 gram fijnverdeeld *lood-peroxyde*: $PbO_2$ toegevoegd. Daarna werden aan de goed afgekoelde oplossing langzaam, en onder voortdurend omroeren 50 ccm. eener 50 % oplossing van *azijnzuur* toegevoegd.

De gefiltreerde, smaragdgroene oplossing werd vervolgens neergeslagen met 400 ccm. 90 % alkohol, het groene precipitaat afgezogen, en verscheidene malen met absoluten alkohol uitgewasschen. Aldus werden 80 gram van het donkergroene *kalium-kobalti-oxalaat* gewonnen.

§ **2**. Daar zoowel het *zilver-*, als het *barium*zout beide slechts weinig oplosbaar zijn, moet voor de omzetting in het overeenkomstige *strychnine*-zout de *kalium*-verbinding zelve gebezigd worden, ten einde het arbeiden met groote hoeveelheden vloeistof zooveel mogelijk te vermijden, — wat temeer noodig is, aangezien de oplossingen reeds bij vrij lage temperaturen gedeeltelijk onder koolzuurontwikkeling worden ontleed. De *strychnine*-verbinding [1] slaat, na het toevoegen van de noodige hoeveelheid *strychnine-sulfaat* aan de oplossing van het *kalium*-zout, grootendeels neer; er wordt daarna zooveel koud water toegevoegd, als noodig is om alles juist weer in oplossing te brengen. Alle deze proefnemingen moeten in het donker worden uitgevoerd. De oplossing van het *strychnine*-zout wordt nu in een donker, koel vertrek, in een groote en wijde kristalliseerschaal gedurende langeren tijd aan zich zelf overgelaten, en de achtereenvolgens zich afzettende fractie's ieder afzonderlijk verzameld en bewaard. De aldus verkregen kristallen worden vervolgens op analoge wijze, als vroeger bij de andere zouten beschreven werd, met *joodkalium* behandeld, het *strychnine-jodide* afgezogen, en het filtraat met behulp van 97 % alkohol neergeslagen. Door herhaalde omkristallisatie uit weinig water wordt het verkregen zout tenslotte in zuiveren toestand gewonnen.

De eerste fractie's van de *strychnine*-verbinding leverden aldus de *links*draaiende antipode, welke met 1 molekuul kristalwater uitkristalliseert. Wegens de lage ontledingstemperatuur van het zout kan de waterbepaling der kristallen door verwarming op 110° C. niet geschieden: door langdurig overleiden van droge lucht bij 20° C., konden in het geheel ongeveer 0,8 mol. $H_2O$ worden uitgedreven.

Wat de licht-absorptie der oplossingen betreft, zoo werd vastgesteld, dat zij bij eene laagdikte van 20 cM., en bij eene concen-

[1] Oorspronkelijk werden de splitsingsproeven met behulp van *cinchonine* verricht, doch deze bleven zonder resultaat. Later nog eens herhaald op ietwat andere wijze, bleven zij ook ditmaal zonder gevolg.

tratie van 0,41 gewichtsprocenten, een duidelijken band vertoonden in het gele en het blauwe deel van het spectrum tusschen golflengten van 5510 en 6520 Ångström-eenheden. Bij concentratie's van 0,82% en 1% zijn zij in lagen van 20 cM. bijna geheel ondoorzichtig; de bovengenoemde oplossing van 0,41% liet onder de beschreven omstandigheden, licht door tusschen 4850 en 5515 A.E., en vervolgens boven 6520 A.E. Bij eene oplossing van 0.31% waren deze grenzen: 4770 tot 5670 A.E., en 6480 A E.; bij eene van 0.27%: 4720 tot 5750, en 6450 A.E.; enz. Voor de golflengten, die tusschen deze grenzen liggen, kunnen alleen bepalingen met zéér verdunde oplossingen geschieden; de daardoor veroorzaakte onzekerheden der aflezingen verklaren de afwijkingen in de resultaten bij de rechts- en linksdraaiende zouten, voor zooverre het de waarden in de onmiddellijke nabijheid van het diepe minimum in de dispersiekromme betreft.

Nochtans is, ondanks deze onzekerheid, het karakteristieke verloop der dispersie-kromme scherp vastgelegd. Bij de eerste fractie's werden voor de rotatie de volgende, onderling goed overeenstemmende waarden gevonden, die den abnormalen vorm der dispersie-kromme (fig. 1) reeds terstond kenmerken:

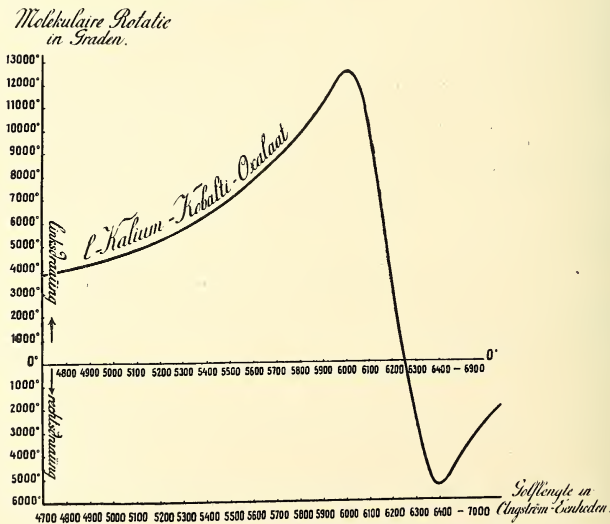



Fig. 1 *Molekulaire Rotatie-Dispersie van Linksch Kalium-Kobalti-Oxalaat* ($+1H_2O$).

MOLECULAIRE ROTATIE VAN LINKSDRAAIEND KALIUM-KOBALTI-OXALAAT ($+ 1\ H_2O$).

| Golflengte in A. E.: | Moleculaire Rotatie in Graden: |
|---|---|
| 4730 | — 3913° |
| 4780 | 4031 |
| 4870 | 4196 |
| 4945 | 4399 |
| 5020 | 4619 |
| 5105 | 4916 |
| 5180 | 5123 |
| 5260 | 5487 |
| 5340 | 5900 |
| 5420 | 6387 |
| 5515 | 7086 |
| 5610 | 7805 |
| 5700 | 8682 |
| 5800 | 9708 |
| 5910 | 11327 |
| 6020 | 12508 |
| 6140 | — 8506 |
| 6260 | + 263 |
| 6380 | 5391 |
| 6520 | 4126 |
| 6660 | 1799 |
| 6800 | + 160 |

Deze kromme vertoont derhalve de eigenaardigheid, dat de rotatie met aangroeiende golflengten eerst snel toeneemt, om aan de grens van den absorptie-band zeer sterk te dalen, en bij ongeveer 6260 A.E. van teeken te wisselen. De nu volgende rechtsdraaïing bereikt dan bij circa 6400 A.E. een minimum, neemt dan snel, en vervolgens langzamer af, zoodat de dispersie-kromme allengs weer tot de lijn

voor de *nul*-waarde nadert. Alleen tusschen 6240 A.E. en 6400 A.E. vertoont de dispersie dus eigenlijk een „normaal" verloop; het maximum der linksdraaïing ligt bij ongeveer 6000 A.E.

Eene vergelijking van de grootte dezer rotatie bij de thans onderzochte *oxalaten* van het *chroom, kobalt, rhodium,* en *iridium,* doet onmiddellijk den invloed zien, dien de specifieke chemische geaardheid van het centrale metaal-atoom zoowel op het algeheele karakter, als op de absolute grootte der rotatie in deze gevallen heeft. Fig. 2 en 3 kunnen daarvan eenige voorstelling geven; in fig. 2 zijn de betr. krommen voor de *kobalt-*, *rhodium-*, en *iridium*-zouten, in fig. 3 die voor de *chroom-*, en *kobalt*-zouten bijeengeplaatst. Terwijl de complexe *rhodium-*

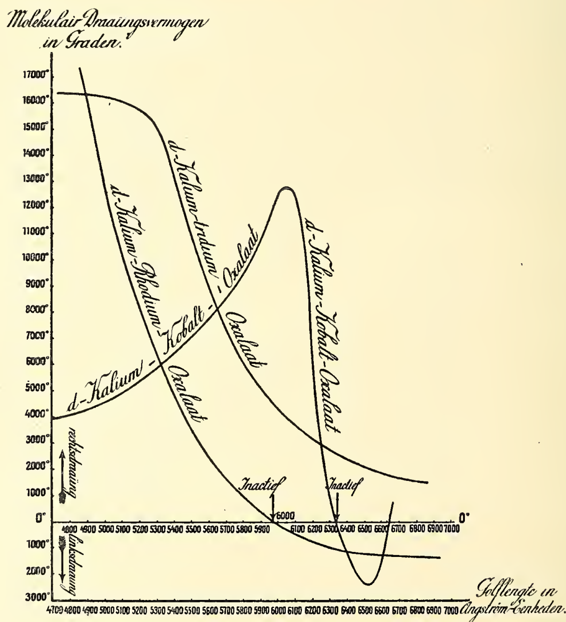
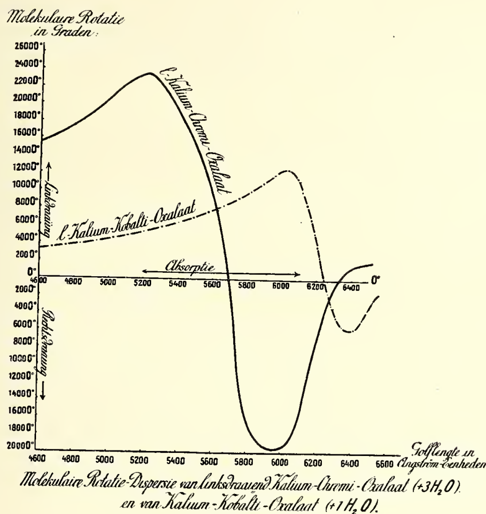



Fig. 2.

en *iridium-oxalaten* eene analoge dispersie vertoonen, blijkt het *kobalt*-zout oogenschijnlijk eene geheel afwijkende plaats onder hen in te nemen, en biedt het complexe *kobalt*zout in dit opzicht een geheel analoog beeld aan als het overeenkomstige *chroom*zout, zooals de in dit laborato-

rium door den heer P. J. BECKER verrichte bepalingen aan het volgens WERNER's methode[1]) gesplitste $\{Cr(C_2O_4)\}K_3 + 3H_2O$, duidelijk




*Molekulaire Rotatie-Dispersie van linksdraaiend Kalium-Chromi-Oxalaat (+3$H_2O$) en van Kalium-Kobalti-Oxalaat (+1$H_2O$).*

Fig. 3.

uitwezen. Eene vergelijking van de rotatie van dit zout met die van het *kobalt*zout bij overeenkomstige golflengten, leert, dat de draaïingen van het *chroom*zout, tot 5640 A.E. toe, en boven 6280 A.E., aanzienlijk *grooter* zijn dan die van het *kobalt*-zout; terwijl tusschen 5640 en 6280 A.E. het tegenovergestelde het geval is, en beide zouten daar ten deele zelfs tegengesteld draaïngsvermogen bezitten als gevolg van de verschuiving der maxima en minima, welke op haar beurt weer in verband staat met de in beide gevallen zéer verschillende ligging der absorptie-banden: het *chromium*-zout toch vertoont een breeden absorptie-band in het oranje, het geel en een deel van het groen en het violet.

Opgemerkt moge nog worden, dat vroeger bij de *triaethyleendiamine-chromi*-zouten gevonden werd, dat deze in het algemeen slechts

[1]) A. WERNER, Ber. d. d. Chem. Ges. **45**. 3061 (1912). De verbinding is moeilijk in goede kristallen te verkrijgen, en autoracemiseert in oplossing bovendien snel, zoodat kristalbepalingen helaas uitgesloten bleken.

ongeveer eene half zoo groote rotatie voor overeenkomstige golflengten vertoonden, als de overeenkomstige *triaethyleendiamine-kobalti*-zouten. Hieruit blijkt wel, hoe afwijkende en sterke invloed op de grootte der rotatie wordt uitgeoefend door de aanwezigheid van *basische* groepen eenerzijds, en van *zure*, sterk zuurstofhoudende radikalen anderzijds, als deze rondom het centrale metaal-atoom van zulke complexe zouten geplaatst zijn.

§ **3**. Gelijk reeds gezegd werd, is de racemische verbinding van het *kobalt*-zout destijds reeds door Copaux onderzocht, die haar als triklien beschreef, doch als *niet*-isomorf met het overeenkomstige *rhodium*-zout. Copaux heeft wel zeer waarschijnlijk, zooals straks blijken zal, zijne kristallen verkregen door verdampen der oplossingen bij lage temperaturen en in het duister; want zelfs in het diffuse daglicht ontleedt zich de oplossing onder koolzuur-ontwikkeling en praecipitatie van *kobalto-oxalaat*, — eene ontleding, die dus geheel analoog is aan die van het overeenkomstige *ferri*-zout door het licht. Op te merken is bij deze fotochemische ontleding, dat met het *blauwe* licht in dit geval eene veel snellere ontleding plaats grijpt, dan met *rood* of *groen* licht, — geheel in overeenstemming met de wet van Draper; doch merkwaardigerwijze heeft het *gele* en *oranje* licht, dat toch óók sterk door de oplossing geabsorbeerd wordt, nauwelijks eenigen sterkeren invloed dan het weinig actieve roode of groene licht.

Bij onze proefnemingen werden de verzadigde oplossingen verdampt in eene ruimte, welks temperatuur weinig van 0° C. verschilde. Daarbij werden inderdaad *triklien-pinacoïdale* kristallen verkregen, die donkergroen, bijna zwart, waren, en die meestal gekromde vlakken en rudimentaire vormen bezaten, zoodat de kristalmetingen daardoor zeer bemoeilijkt werden. De hoekwaarden weken in enkele zônes dan ook nog al wat af van de door Copaux opgegevene; doch de identiteit van zijne kristallen met de onze is wel boven allen twijfel verheven, zooals de volgende gegevens kunnen aantoonen:

| *Hoekwaarden:* | *Waargenomen:* Jaeger: | Copaux: | *Berekend:* |
|---|---|---|---|
| $m:\mu = (110):(1\bar{1}0) =$ | 60° 37′ | 60° 36′ | — |
| $c:m = (001):(110) =$ | 79 22 | 79 26 | — |
| $q:m = (011):(110) =$ | 65 10 | 65 28 | — |
| $a:b = (100):(0\bar{1}0) =$ | 89 2 | 88 42 | 88° 40′ |
| $c:q = (001):(011) =$ | 33 10 | 32 28 | — |
| $b:c = (010):(001) =$ | 88 37 | 88 39 | 88 32 |

enz.

Het specifiek gewicht der kristallen, die meestal slechts de vormen: $m = \{110\}$, $\mu = \{\bar{1}10\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $\omega = \{\bar{1}12\}$, en $a = \{100\}$ en $b = \{010\}$ zeer smal, vertoonden, werd bij 15° C. bepaald op: $d_{4°} = 1{,}877$; het moleculair-volume is dus: 268,14.

Eene analogie in vorm met de overeenkomstige *rhodium*- en *iridium*zouten is niet voorhanden; evenmin met het monokliene *chroom*-zout, dat met 3 $H_2O$ kristalliseert [1]).

In elk geval is door een en ander wel bewezen, dat even boven 0° C., zich uit de oplossing kristallen der *racemische* verbinding afzetten. Des te vreemder scheen ons oorspronkelijk nu het gedrag van oplossingen, die bij kamertemperatuur uitkristalliseerden. Immers eene eveneens inactieve oplossing, gedurende de zomermaanden in het donker langzaam verdampt bij eene temperatuur die weinig van 18° C. verschilde, leverde donkergroene, bijna zwarte naaldjes, welke reeds op het eerste gezicht van het trikliene racemaat merkbaar bleken te verschillen. De kristalmeting leerde, dat de kristalvorm *trigonaal* was, en identiek met dien van de linksdraaiende antipode. Eene uit meerdere kristalletjes bestaande fractie dezer kristallisatie, in water opgelost, vertoonde echter geene noemenswaarde draaïing. Terstond rees het vermoeden, dat het racemische zout zich onder deze omstandigheden spontaan in zijne antipoden zou gesplitst hebben, en dat men bij onze wijze van onderzoeken slechts dáárom geene rotatie kon waarnemen, omdat de oplossing de twee, wegens het gemis aan hemiëdrische kristalvlakken niet van elkaar te onderscheiden kristallen der antipoden, in gelijk aantal afzet, zoodat men, bij het op goed geluk uitzoeken van een zeker aantal dier kristalletjes, gemiddeld evenveel rechtsche als linksche treft, en de oplossing dezer gemengde kristalsoorten dus ook zoo goed als optisch-inactief zal bevonden worden.

Indien dit vermoeden juist was, dan zou dus bij het oplossen van telkens één enkel kristal, die optische activiteit voor den dag moeten komen. Inderdaad leerde de ervaring, dat het eerste aldus onderzochte kristal dat van den tot dusverre nog niet gewonnen *rechts*-draaienden component was, zooals onderstaande metingen kunnen bewijzen: (Zie de tabel op volgende pag.).

Het minimum in de dispersie-kromme ligt hier wat dieper dan volgens onze vroegere metingen bij den linksdraaienden component, een verschil, dat zijn oorzaak vindt in de onzekerheid der aflezingen

[1]) De assenverhouding van het *kobalt*zout is: $a : b : c = 0{,}5963 : 1 : 0{,}6590$; $\alpha = 91°42'$; $\beta = 101°23'$; $\gamma = 88°22'$. Het *chromium*zout is monoklien, met: $a : b : c = 1{,}0060 : 1 : 1{,}3989$; $\beta = 86°0'$. Voor de *rhodium*- en *iridium*zouten, zie men: deze Verslagen, **26**, p. 170 en 185, (1917); en **27**, 81 (1918).

MOLECULAIRE ROTATIE VAN HET RECHTSDRAAIENDE KALIUM-KOBALTI-OXALAAT (+ 1 $H_2O$).

| Golflengte in ANGSTRÖM-Eenheden: | Moleculaire Rotatie in Graden: |
|---|---|
| 4730 | + 3876° |
| 4780 | 4009 |
| 4870 | 4167 |
| 4945 | 4428 |
| 5020 | 4689 |
| 5105 | 4923 |
| 5180 | 5106 |
| 5260 | 5553 |
| 5340 | 6013 |
| 5420 | 6416 |
| 5510 | 7023 |
| 5610 | 7916 |
| 5700 | 8703 |
| 5800 | 9764 |
| 5910 | 11365 |
| 6020 | 12812 |
| 6140 | + 8269 |
| 6260 | — 103 |
| 6380 | 5468 |
| 6520 | 4317 |
| 6660 | 1678 |
| 6800 | 526 |
| 6940 | — 198 |

in het gebied van den absorptie-band. Overigens echter zijn beide kromme lijnen blijkbaar geheel en al elkaars spiegelbeelden. Voortgezet onderzoek op deze wijze leerde nu verder, dat men, nevens zulke rechtsdraaiende kristallen, ook zulke van den linksdraaienden component aantreft. In het algemeen is het onmogelijk, om de beide soorten

van kristallen uit te zoeken, daar meestal de vlakken der rechtsche of linksche bipyramiden of trapezoëders afwezig zijn, en dus beide soorten van individuen uiterlijk in het geheel niet verschillen.

Er is derhalve wel geen twijfel aan, of er is hier een eerste, volkomen zeker voorbeeld gevonden van eene splitsing door spontane kristallisatie bij zulke complexe metaalzouten; immers het vroeger als zoodanig door WERNER gesignaleerde geval van het *kalium-rhodium-oxalaat* kan, zooals wij bewezen hebben [1]), niet langer als zoodanig gelden.

Om nu het afdoende bewijs te leveren voor de juistheid onzer zienswijze, was het noodig de ligging der *overgangstemperatuur* vast te stellen. Wij hebben dit op twee wijzen gedaan: met behulp van den dilatometer, en door de bepaling der oplosbaarheidskrommen

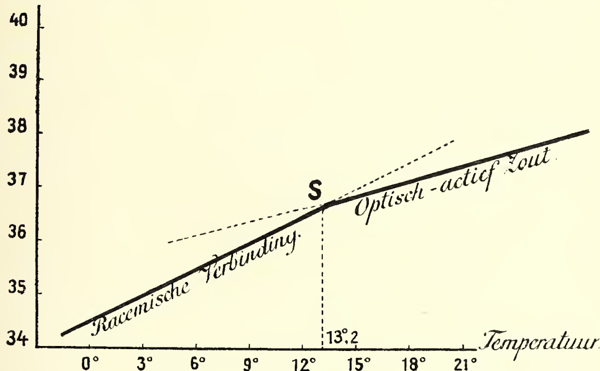


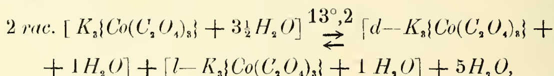

Fig. 4.

van de actieve antipoden eenerzijds en van de racemische verbinding anderzijds. Immers reeds vroeger werd er op gewezen [1]), dat beneden en boven de overgangstemperatuur, de metastabiele vorm altijd de grootere oplosbaarheid moet bezitten, — reden, waarom wij juist WERNER's conclusie omtrent het intreden eener spontane splitsing bij het overeenkomstige *rhodium*-zout, hebben moeten verwerpen.

---

[1]) A. WERNER. Ber. d. d. Chem. Ges. **47**. 1954 (1914); F. M. JAEGER. Proceed. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam, **20**. 264, 265. (1917).

Inderdaad leerden de proefnemingen nu, dat de oplosbaarheid van den inactieven vorm beneden 14° C. *kleiner* is dan die der optische antipoden, terwijl boven 14° C. het tegenovergestelde geval zich voordeed. Zoo bleken 100 gram water bijv. bij 0° C. 34,50 gram van het racemische zout, bij 14° C. 36,81 gram daarvan op te lossen; enz. Omgekeerd werden bij 20° C. in 100 gram 37.40 gram der linksdraaiende antipode, bij 22° C. 37,6 gram, enz., aangetroffen; en fig. 4 leert, dat de gezochte overgangstemperatuur, die dus als eene *minimale* transformatie-temperatuur:



$$2\,rac.\,[K_3\{Co(C_2O_4)_3\} + 3\tfrac{1}{2}H_2O] \overset{13°,2}{\rightleftarrows} [d\text{—}K_3\{Co(C_2O_4)_3\} + 1\,H_2O] + [l\text{—}K_3\{Co(C_2O_4)_3\} + 1\,H_2O] + 5H_2O,$$

zonder noemenswaardige fout op 13°,2 C. gesteld mag worden; dit is de laagste temperatuur, waarbij de optische antipoden nog stabiel zijn.

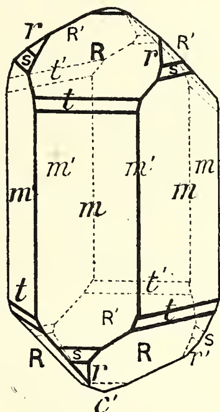
Dilatometrische proeven leveren nog al bezwaren op wegens de neiging van het zout tot ontleding, als de oplossing lang op wat hoogere temperaturen gehouden wordt, en wegens intredende vertragingsverschijnselen. Nochtans was eene scherpe discontinuïteit in de volume-temperatuur-kromme aan te toonen bij eene temperatuur, die tusschen 12° en 16° C. gelegen is. Dat vertragingsverschijnselen optreden, is buiten allen twijfel: het actieve zout gaat, zelfs in oplossingen, even beneden het overgangspunt nog betrekkelijk langzaam in den racemischen vorm over. Zoo vonden wij bijv., dat eene verdunde oplossing der linksdraaiende antipode bij 12° C. in één dag circa de helft, in twee dagen ongeveer $^2/_3$, in drie dagen circa $^5/_6$, en in vier dagen ongeveer $^9/_{10}$ van hare activiteit ingeboet had, alhoewel toch bij de genoemde temperatuur de optisch-actieve componenten ten opzichte der racemische verbinding metastabiel zijn.

Opzettelijk verrichte kristallisatie-proeven in een thermostaat, gaven resultaten, die met onze conclusies in algeheele overeenstemming zijn; zoo leverde eene oplossing bij 22° C. steeds naalden der beide antipoden naast elkaar, doch eene bij 6° C. steeds kristallen van het trikliene racemaat; enz. Hiermede is dus de *spontane* splitsing van het *kaliumkobaltixalaat* in tegengesteld draaiende componenten bij temperaturen boven 13°,2 C., thans ondubbelzinnig bewezen.

§ **4.** Het kristallografisch onderzoek der optisch-actieve zouten leverde nu verder het bewijs, dat beide antipoden in meestal niet van elkaar te onderscheiden, doch inderdaad *trigonaal-trapezoëdrische* kristallen optreden, welke weder geheel en al *isomorf* zijn met die der optisch-actieve *kalium-rhodium-*, en *kalium-iridium-oxalaten.*

Zij hebben de gedaante (fig. 5 en 6) van langere prismatische, of óók wel van meer gedrongen vormen; de *rechts*draaiende antipode werd steeds in den meer rhomboëdrischen vorm van fig. 6 aangetroffen.

*Trigonaal-trapezoëdrisch.*
$a : c = 1 : 0{,}8968$ (BRAVAIS); $\alpha = 100°27'$ (MILLER).




*Linksdraaiend Kalium-Kobalti-Oxalaat* $(+1H_2O)$.

Fig. 5.

*Waargenomen vormen*: $R = \{10\bar{1}1\}$ $[100]$, groot en sterk glanzend; $c = \{0001\}$ $[111]$, steeds aanwezig, doch klein; $m = \{10\bar{1}0\}$ $[2\bar{1}\bar{1}]$, bij de linksche kristallen voorheerschend, bij de rechtsche klein, doch goed ontwikkeld, en scherpe reflexen leverend; $r = \{01\bar{1}1\}$ $[221]$, en $s = \{02\bar{2}1\}$ $[11\bar{1}]$, steeds voorhanden, klein, doch sterk glanzend; $t = \{20\bar{2}1\}$ $[5\bar{1}\bar{1}]$, vrij breed, en scherpe spiegelbeelden gevend. Hemiëdrische combinatie-vormen werden zoo goed als nooit waargenomen; slechts ééne enkele maal werd aan een kristal der *linksche* antipode, eene *rechtsche* trigonale bipyramide $x = \{22\bar{4}1\}$ $[71\bar{5}]$ waargenomen, als eene uiterst smalle afstomping der ribbe $R : m$. Hieruit blijkt dus, dat ook in dit geval de neiging tot manifestatie van hemiëdrische vormen, ondanks de enorme optische rotatie der zouten, zeer weinig uitgesproken is; en voorts, dat ook in het geval der complexe *oxalaten* dezelfde morfologische betrekking tusschen de *kobalti-*, en *rhodium-*zouten bestaat, als bij de overeenkomstige

*kobalti-*, en *rhodium-triaethyleendiamine-nitraten* [1]), n.l. in zóóverre, als de *tegengesteld* draaiende *kobalt-* en *rhodium*-zouten, gelijk deze zich uit de moeilijker oplosbare verbindingen met optisch-actieve basen (*strychnine*) of zuren (*wijnsteenzuur*) lieten winnen, toch in hemiëdrische vormen met *hetzelfde* algebraïsche voorteeken optreden:

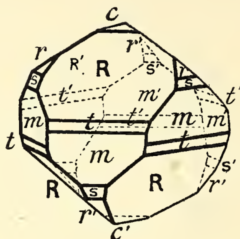



Fig 6.

| Verbinding: | Rotatie der uit het moeilijkst oplosbare zout gewonnen antipode: | Algebraïsch teeken der optredende hemiëdrische vormen: |
|---|---|---|
| *Triaethyleendiamine-Kobalti-nitraat.* | *(Chlorotartraat)*: **d.** | + sphenoïed. |
| *Triaethyleendiamine-Rhodium-nitraat.* | *(Chlorotartraat)*: **l.** | + sphenoïed. |
| *Kalium-Kobalti-Oxalaat.* | *(Strychnine zout)*: **l.** | + bipyramide. |
| *Kalium-Rhodium-Oxalaat.* | *(Strychnine-zout)*: **d.** | + bipyramide. |
| *Kalium-Iridium-Oxalaat.* | *(Strychnine-zout)*: **d** | + bipyramide. |

Tevens blijkt, dat de uit de moeilijkst-oplosbare verbinding met actieve basen of zuren gewonnen *kobalti-* en *rhodium*-zouten, in het geval der *triaethyleendiamine*-zouten juist het *tegengestelde* draaïngsvermogen bezitten als dat, hetwelk bij de *trioxalaat*-complexen wordt waargenomen; — een feit, dat steun geeft aan de opvatting, volgens welke de draaïngsrichting in eerste instantie beheerscht wordt door de basische, resp. zure natuur der om het centrale metaal-atoom

[1]) F. M. Jaeger, Proceed. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, **20**. 258, 261 (1917).

gerangschikte radikalen, meer dan door den aard dier metaal-atomen zelve.

| *Hoekwaarden:* | *Waargenomen:* | *Berekend:* |
|---|---|---|
| $c:R = (0001):(10\bar{1}1) =$ | * 46° 5′ | — |
| $m:t = (10\bar{1}0):(02\bar{2}1) =$ | 25 43 | 25° 46½′ |
| $m:m' = (10\bar{1}0):(01\bar{1}0) =$ | 60 0 | 60 0 |
| $R:R = (10\bar{1}1):(\bar{1}101) =$ | 77 11 | 77 12 |
| $c:r = (0001):(01\bar{1}1) =$ | 46 8 | 46 5 |
| $r:s = (0111):(02\bar{2}1) =$ | 18 0 | 18 8½ |
| $s:m = (02\bar{2}1):(01\bar{1}0) =$ | 25 55 | 25 46½ |
| $s:R = (02\bar{2}1):(10\bar{1}1) =$ | 51 13 | 51 5 |
| $R:t = (01\bar{1}1):(02\bar{2}1) =$ | 17 58 | 18 8½ |
| $R:m = (10\bar{1}1):(10\bar{1}0) =$ | 43 55 | 43 55 |
| $x:R = (22\bar{4}1):(01\bar{1}1) =$ | 78 13 | 78 9 |

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Het specifieke gewicht dezer kristallen was 1,8893 bij 15° C.; het molekulair-volume is dus: 242,57 en de topische assenverhouding wordt: $\chi : \omega = 7,4676 : 6,6971$; of $\chi' = 6,3789$. Bij de *Co-*, *Rho-*, en *Ir*-zouten neemt de waarde van $\chi$ dus met stijgend atoomgewicht regelmatig af, terwijl $\omega$ bij het *Rho*-zout een minimum bereikt.

*Groningen*, November 1918.

*Laboratorium voor Anorganische en*
*Physische Chemie der Rijks-Universiteit.*

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: „*Over den vorm van breede vloeistofdruppels en gasbellen en het gebruik daarvan bij de meting van capillaire constanten.*" (Supplement N°. 43*a* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

§ 1. De meridiaandoorsnede van het capillair oppervlak, in het geval van een omwentelingsoppervlak, wordt bepaald door de bekende vergelijking:

$$\frac{1}{x}\frac{d\,(x \sin \varphi)}{dx} = k\,(h+y) = kz\ ^{1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

welke wegens de betrekking $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ ook geschreven kan worden:

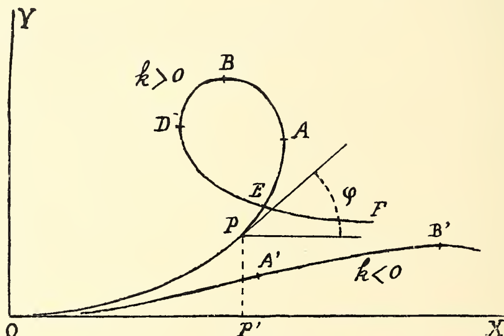



Fig. 1.

[1]) Zie: Over den vorm van kleine vloeistofdruppels en gasbellen. Suppl. N°. 42*c* bij de Meded. uit het Nat. Lab. Leiden, Zittingsversl. 29 Juni 1918.

De fig. 1 stelt de meridiaandoorsnede van het capillair oppervlak schematisch voor, voor $k = \frac{(\mu_1 - \mu_2)g}{\sigma} > 0$ en voor $k < 0$, in het geval, dat $R_0$ (de kromtestraal in den top) zeer groot is vergeleken bij $x$; d. w. z. in het geval. dat $R_0\sqrt{\pm k}$

$$kz\,dz = \sin\varphi\,d\varphi + \frac{\sin\varphi}{x}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

We zullen eerst onderstellen, dat $k > 0$ (vloeistof beneden het oppervlak, althans in de nabijheid van de as), zooals het geval is in een breede buis, bij een gasbel, gevormd onder een vlakke horizontale plaat, of bij een liggenden druppel.

§ 2. Is de meniscus zeer breed, dan is hij in de nabijheid van de as vrijwel vlak, en de kromming van het oppervlak is slechts merkbaar aan den rand. Het ligt dus voor de hand, met het oog op de integratie van verg. (1'), de meridiaankromme te splitsen in twee stukken: een centraal gedeelte, waarbij de hoek $\varphi$ slechts kleine waarden aanneemt, en dat zich tot vrij dicht bij den rand uitstrekt, en een marginaal gedeelte, waar $\varphi$ grootere waarden aannemen kan, en dat voor kleine $\varphi$ in het centrale deel overgaat.

Stel $l$ is een $x$-waarde behoorende bij het randgedeelte (we zullen daarvoor nemen de abscis van het punt $B$ in fig. 1). Is $l$ groot genoeg, dan is het duidelijk dat het marginale stuk der kromme slechts weinig zal verschillen van datgene, wat men zou vinden bij het tweedimensionale probleem ($l = \infty$); dan is de breedte van het marginale stuk klein t. o. v. van $l$ (zie § 3), zoodat, wanneer men stelt $x = l + u$, $u$ als klein t. o. v. $l$ mag worden beschouwd [1]. Voor dat gedeelte kan dus geschreven worden:

$$kz\,dz = \sin\varphi\,d\varphi + \frac{1}{l}\sin\varphi\left(1 - \frac{u}{l} + \ldots\right)dz, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en deze vergelijking kan door achtereenvolgende benaderingen worden opgelost.

§ 3. In eerste benadering heeft men dus, evenals in het tweedimensionale probleem [2]), omdat $z$ en $\varphi$ tegelijk zeer klein worden [3]), en $u = 0$ is voor $\varphi = \pi$,

---

een groot getal is, en dus $h\sqrt{\pm k} = \dfrac{2}{R_0\sqrt{\pm k}}$ een klein getal.

De fig. 1 is geteekend in de onderstelling, dat $R_0$ positief is (vloeistof beneden in het geval $k > 0$; vloeistof boven voor $k < 0$); in het tegenovergestelde geval zou de meridiaankromme voorgesteld worden door een figuur, die men zou verkrijgen, door fig. 1 om de $x$ as om te slaan.

[1]) Deze vereenvoudiging van het vraagstuk vindt men reeds bij POISSON, Nouvelle théorie de l'action capillaire. Zie ook: A. FERGUSON, Phil. Mag., (6), 25, 507, 1913.

[2]) Zie b.v. A. WINKELMANN, Handbuch der Physik, 2e Aufl. I (2), 1131, 1908.

[3]) $z$ wordt echter niet nul voor $\varphi = 0$; daaruit zou volgen dat de vergel. (3) slechts gelden zoolang $\varphi$ niet oneindig klein is. Ze gelden echter ook nog wanneer

$$z\sqrt{k} = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi\ ^{1)} \qquad u\sqrt{k} = \log tg \tfrac{1}{4}\varphi + 2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi\ ^{2)}. \quad . \quad (3)$$

Substitueert men die waarde van $z$ in den eersten correctieterm van (2), dan vindt men in tweede benadering:

$$\tfrac{1}{2} kz^2 = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{4}{3l\sqrt{k}}(1 - \cos^3 \tfrac{1}{2}\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

of, zoolang $\sin \frac{1}{2}\varphi$ niet oneindig klein wordt ($\varphi < 2\pi$)[3])

$$z\sqrt{k} = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3l\sqrt{k}}(2\, tg \tfrac{1}{4}\varphi + \sin\varphi)\ ^{4)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

$$u\sqrt{k} = \log tg \tfrac{1}{4}\varphi + 2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3l\sqrt{k}}(\tfrac{3}{2} \log tg \tfrac{1}{4}\varphi - \tfrac{1}{4} sec^2 \tfrac{1}{4}\varphi + \cos\varphi + \tfrac{3}{2}) \quad (5)$$

---

$\varphi$ wel oneindig klein is (mits $u << l$), omdat het blijkt, dat het verloop van $z$ als functie van $x$ voor kleine $z$ van exponentieelen aard is; uit (3) volgt nl. voor kleine $\varphi : u\sqrt{k} = \log \varphi + 2 - \log 4 = \log \varphi + 0{,}611$, $z\sqrt{k} = \varphi = 0{,}543\, e^{u\sqrt{k}} = 0{,}543\, e^{-l\sqrt{k}} . e^{x\sqrt{k}}$ zoodat de minimumwaarde, welke $z$ aanneemt op grooten afstand van den rand, oneindig veel kleiner is dan de oneindig kleine waarden van $z$ in de nabijheid van den rand.

[1]) Zal deze uitdrukking als eerste benadering gelden, dan moet $\frac{1}{l} \sin\varphi$ zeer klein zijn t. o. v. van $kz$, of, aangezien $\sin\varphi$ hoogstens $= 1$ is, $klz$ moet een groot getal zijn ($klz >> 1$); daaruit volgt, de waarde van $z$ in aanmerking nemende, en bedenkende, dat ook $\sin\varphi <$ of $= 1$, $2l\sqrt{k} >> 1$. $2l\sqrt{k}$ moet dus een groot getal wezen, bv. 100; daar nu voor water $k = 13$ ongeveer, zoo moet $l$ minstens 15 cM. wezen, zal de benadering praktisch toepasselijk zijn. Voor kwik ($k = 30$) wordt dit 10 cm.

[2]) Hieruit volgt, dat $\varphi$ reeds als oneindig klein beschouwd kan worden, terwijl $u$ zelf nog klein is t. o. v. $l$; d. w. z. $\varphi$ wordt werkelijk reeds zeer klein in het marginale gedeelte (mits $l\sqrt{k} >> 1$). Is b.v. $\varphi = 100$ (0°,6 ongeveer), dan is $u\sqrt{k}$ nagenoeg $= -4$, dus nog een matig getal; met het oog daarop is evenwel de praktische grens van toepasselijkheid der benadering op $l\sqrt{k} = 50$ wellicht nog wat te laag gesteld.

[3]) Wel mag $\varphi$ zelf oneindig klein wezen, omdat dan de correctieterm in (4) toch nog veel kleiner is dan den hoofdterm.

[4]) Dit is, behoudens een kleine herleiding, een reeds door Poisson (loc. cit.) gegeven formule. Dat de grootheid $l$ bij Poisson niet dezelfde beteekenis heeft als hier, komt er, bij den beschouwden benaderingsgraad niets op aan: het verschil is toch klein t. o. v. $l$ zelf; we hadden immers even goed door $l$ iedere andere lengte kunnen voorstellen, die er t. o. v. $l$ zelf oneindig weinig van verschilt, b.v. de abscis van het punt $A$ of van het punt $D$ (fig. 1).

Zie ook Ferguson, loc. cit., form. IX, waar de uitdrukking voor $z\sqrt{k}$ evenwel door een teekenfout onjuist is.

Hier zij nog terloops opgemerkt, dat de wijze, waarop Ferguson de vergelijking (2) integreert, feitelijk hierop neerkomt, dat hij een nieuwe veranderlijke $c = l\varphi + z$ invoert; verder wordt de vergelijking weer door successieve benaderingen opgelost. Die transformatie is nutteloos omslachtig.

$\varphi$ achtereenvolgens $= \frac{\pi}{2}$, $\pi$ en $\frac{3\pi}{2}$ stellende, vindt men als coordinaten der punten $A$, $B$ en $D$ (fig. 1):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A = \frac{\pi}{2} \quad z_A \sqrt{k} &= \sqrt{2} + \frac{1}{3l\sqrt{k}}(2\sqrt{2}-1) = 1{,}414 + \frac{0{,}609}{l\sqrt{k}} \\ u_A\sqrt{k} &= log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} + \frac{1}{6l\sqrt{k}}\{3log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}+1\} = 0{,}532 - \frac{0{,}039}{l\sqrt{k}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\varphi_B = \pi \quad z_B\sqrt{k} = 2 + \frac{2}{3l\sqrt{k}} \qquad u_B\sqrt{k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_D = \frac{3\pi}{2} \quad z_D\sqrt{k} &= \sqrt{2} + \frac{1}{3l\sqrt{k}}(2\sqrt{2}+1) = 1{,}414 + \frac{1{,}276}{l\sqrt{k}} \\ u_D\sqrt{k} &= log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2} + \frac{1}{6l\sqrt{k}}\{3log(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)\} \\ &= -\{log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}\} - \frac{1}{6l\sqrt{k}}\{3\,log(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1\} = -0{,}532 + \frac{0{,}372}{l\sqrt{k}} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

We zullen de benadering niet verder trachten door te voeren.

§ 4. Nu het centrale gedeelte van de meridiaankromme. Aangezien $\varphi$ in dat gedeelte oneindig klein is, is $\sin\varphi = \varphi = tg\,\varphi = z'$, zoodat de verg. (1) in eerste benadering geschreven kan worden

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xz') = kz \quad \text{of} \quad z'' + \frac{z'}{x} - kz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Door de substitutie $ix\sqrt{k} = \xi$, $z = \eta$, gaat deze vergelijking over in

$$\eta'' + \frac{\eta'}{\xi} + \eta = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

wat de vergelijking van Bessel van de orde nul is. Bedenkende dat $z$ bij $x = 0$ eindig is, heeft men dus

$$z = h\,J_0\,(ix\sqrt{k}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$J_0$ zijnde de functie van Bessel van de eerste soort en de orde 0; de integratieconstante $h$ is gelijk aan de waarde van $z$ bij $x = 0$[1]).

[1]) $J_0(\xi)$ is immers $= 1$ voor $\xi = 0$. In de nabijheid van de omwentelingsas heeft men dus, $h$ door de waarde $\frac{1}{2kR_0}$ vervangende (zie Meded. Suppl. N⁰. 42c). voor een zeer breeden meniscus (zeer groote $R_0$)

$$z = \frac{1}{2k\,R_0}\left\{1 + \frac{1}{(1\,!)^2}\frac{kx^2}{4} + \frac{1}{(2\,!)^2}\left(\frac{kx^2}{4}\right)^2 + \ldots\right\},$$

wat men ook rechtstreeks vindt, door de differentiaalvergelijking der meridiaandoorsnede door reeksontwikkeling op te lossen (zie b.v. Schalkwijk, Meded. N⁰. 67, Zittingsversl. 29 Dec 1900) en daarna $R_0 = \infty$ te stellen.

§ 5. Uit (10) volgt[1]), dat voor groote waarden van $x$, die weinig van $l$ verschillen ($x = l + u$),

$$z = h \frac{e^{x\sqrt{k}}}{\sqrt{2\pi x \sqrt{k}}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{l\sqrt{k}} e^{u\sqrt{k}}}{\sqrt{l\sqrt{k}}} \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{u}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Van een anderen kant volgt uit (4′) en (5), dat voor oneindig kleine $\varphi$, maar $x$ toch nog weinig verschillend van $l$,

$$\log z \sqrt{k} = \log \varphi = u\sqrt{k} - (2 - \log 4) - \frac{u}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Door identificatie der waarden van $z$ uit (11) en (12) vindt men, $x_A = r$ stellende en bedenkende, dat $r\sqrt{k} - l\sqrt{k} = u_A\sqrt{k}$ (form. 6)

$$h\sqrt{k} = 0{,}924 \sqrt{2\pi r \sqrt{k}}\, e^{-r\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Dit is dus de betrekking tusschen den straal $r$ van een wijde buis en de stijghoogte $h$ van de vloeistof in die buis (als de randhoek nul is).

§ 6. Bij onderzoek van het verdere verloop van de meridiaankromme, op grooteren afstand van de as dan $x = l$ (tak $DEF$... enz.), blijkt, dat deze kromme verder bestaat uit een reeds U-vormige, gekrulde bogen, zooals schematisch is voorgesteld in Winkelmann, Handbuch der Physik, I (2) p. 1141, fig. 404; die bogen zijn echter

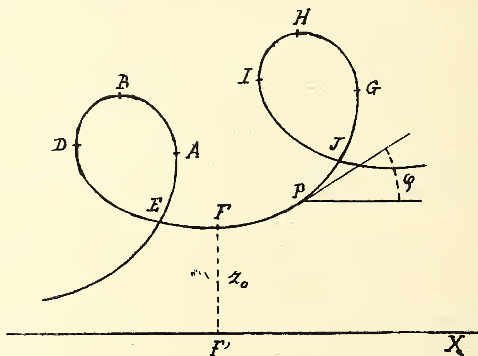



Fig. 2.

langgerekt, zooals in fig. 399, p. 1135. De wijdte van die bogen is klein, vergeleken bij $l$; ze behooren dus nog bij het marginale stuk der meridiaankromme, en hun vergelijking wordt gevonden op

[1]) Zie b.v. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, 1904, p. 156.

dezelfde manier als verg. (4). Door $z_0$ het minimum van $z$ voorstellende (ordinaat van het laagste punt $F$, fig. 2), en $\varphi = 0$ stellende bij $z = z_0$, vindt men

$$k(z^2 - z_0^2) = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi \pm \frac{8}{3l\sqrt{k}}(1 - \cos^3 \tfrac{1}{2}\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

(het teeken + geldende voor $\varphi > 0$, het teeken − voor $\varphi < 0$) [1]. Aangezien de bogen aan elkander moeten sluiten, leidt men daar gemakkelijk uit af, voor den $n^{den}$ boog:

$$z_0 \sqrt{k} = \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{3l\sqrt{k}}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarbij gevoeglijk als $l$ genomen kan worden de abscis van het punt $F$.

Stelt men $\Delta\psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \psi}$ met $\lambda^2 = \dfrac{4}{4 + kz_0^2}$ en $\psi = \frac{1}{2}(\pi + \varphi)$, dan is in eerste benadering, evenals in het tweedimensionale probleem [2]:

$$z\sqrt{k} = 2\,\Delta\psi \qquad u\sqrt{k} = \int_{1/2\pi}^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - 2\int_{1/2\pi}^{\psi} \Delta\psi\, d\psi, \quad . \quad . \quad (16)$$

$u$ zijnde de abscis van een willekeurig punt $P$ van den boog t.o.v. het punt $F$, dus $u = x_P - x_F$; de geheele wijdte $2p$ van den boog is dus zoodanig, dat

$$2p\sqrt{k} = (x_H - x_B)\sqrt{k} = 2(K - 2E), \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$K$ en $E$ respectievelijk zijnde de totale elliptische integralen $\left(\int_0^{1/2\pi}\right)$ van de eerste en van de tweede soort, met modulus $\lambda$. Nu is $\lambda$ zeer weinig kleiner dan 1, nl.:

$$\lambda = 1 - \tfrac{1}{8}kz_0^2 = 1 - \frac{2n}{3l\sqrt{k}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$K$ is dus zeer groot, en wel in eerste benadering [3])

$$K = \log \frac{4}{\sqrt{2(1-\lambda)}} = \tfrac{1}{2}\log 8 - \tfrac{1}{2}\log \frac{2n}{3l\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

terwijl $E$ eindig is, nl. = 1, zoodat

$$z_0\sqrt{k} = 1{,}082\, e^{-p\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

---

[1]) Die verandering van teeken bij $\varphi = 0$ is het gevolg hiervan, dat $\sin \frac{1}{2}\varphi$ bij $\varphi = 0$ van teeken verandert, zoodat bij $\varphi > 0$ $\sqrt{k(z^2 - z_0^2)} = +2\sin\frac{1}{2}\varphi$ bij $\varphi < 0 =$ $= -2\sin\frac{1}{2}\varphi$.

[2]) Zie b.v. WINKELMANN, loc. cit., p. 1134.

[3]) Zie b.v. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis.

de betrekking is tusschen den minimumordinaat $z_0$ van een boog en zijn wijdte $2p$.[1])

§ 7. Alvorens over te gaan tot het geval $k < 0$, zullen we eerst nog een ander vraagstuk beschouwen, n.l. dat der opstijging (eventueel neerdrukking) van een vloeistof langs den buitenkant van een wijde cirkelvormige buis, welke gedompeld wordt in een oneindig uitgestrekt vloeistofoppervlak; de meridiaankromme vertoont dan een in 't oneindige uitloopenden tak $RST$ (fig. 3), die ook, en wel tot bij

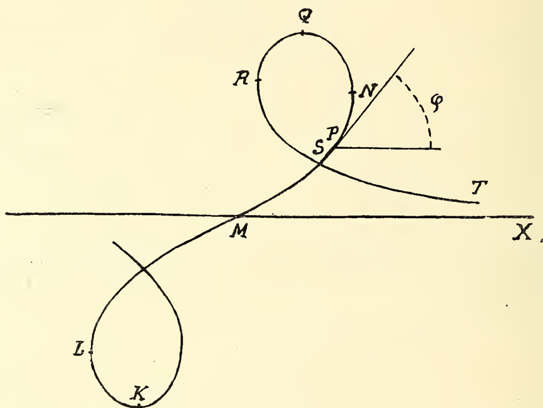



Fig. 3.

$Q$ (zie § 12), verwezenlijkt wordt bij het oplichten uit de vloeistof van een door de vloeistof bevochtigde, breede, cirkelvormige plaat.

De vergelijking van dien tak wordt gevonden op een soortgelijke wijze als die van den tak $OEAB$ in fig. 1. We splitsen n.l. dien tak weer in een marginaal gedeelte, waarvan de abscis $u$, gemeten van af $x_Q = l$, klein is t.o.v. $l$, en een verwijderd gedeelte, waarbij $u$ vergelijkbaar is met $l$, en zelfs groot kan worden ten opzichte van die lengte, en waar $\varphi$ weinig van nul verschilt ($\varphi = 0$ in 't oneindige).

Op dezelfde wijze als in §§ 2 en 3 vindt men (verg. (2) is nu ook nog geldig), nu bedenkende, dat $z = 0$ wordt voor $\varphi = 2\pi$ en $u = 0$ voor $\varphi = \pi$,

[1]) Stelt men $x_G - x_D = 2q$, dan is $p\sqrt{k} = q\sqrt{k} - 0{,}532$ (zie § 3), en

$$z_0 \sqrt{k} = 1{,}842\, e^{-q\sqrt{k}} \quad \ldots\ldots \quad (20)'$$

$$\tfrac{1}{2}\, kz^2 = 2\, sin^2\, \tfrac{1}{2}\, \varphi - \frac{4}{3l\sqrt{k}}(1 + cos^3\, \tfrac{1}{2}\, \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

of

$$z\sqrt{k} = 2\, sin\, \tfrac{1}{2}\, \varphi - \frac{1}{3l\sqrt{k}}(2\, cotg\, \tfrac{1}{4}\, \varphi - sin\, \varphi)\ ^{1)}, \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

waaruit

$$u\sqrt{k} = log\, tg\, \tfrac{1}{4}\, \varphi + 2\, cos\, \tfrac{1}{2}\, \varphi - \frac{1}{3l\sqrt{k}}(\tfrac{3}{2}\, log\, tg\, \tfrac{1}{4}\, \varphi + \tfrac{1}{4}\, cosec^2\, \tfrac{1}{4}\, \varphi - cos\, \varphi - \tfrac{3}{2}). \quad (23)$$

$\varphi$ achtereenvolgens gelijk aan $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ en $\frac{3\pi}{2}$ stellende, vindt men voor de coordinaten der punten $N$, $Q$ en $R$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_N = \frac{\pi}{2} \qquad z_N\sqrt{k} &= \sqrt{2} - \frac{1}{3l\sqrt{k}}(2\sqrt{2} + 1) = 1{,}414 - \frac{1{,}276}{l\sqrt{k}} \\ u_N\sqrt{k} &= \{log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}\} - \frac{1}{6l\sqrt{k}}\{3log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} - 1\} = 0{,}532 + \frac{0{,}372}{l\sqrt{k}} \end{aligned}\right\} (24)$$

$$\varphi_Q = \pi \qquad z_Q\sqrt{k} = 2 - \frac{2}{3l\sqrt{k}} \qquad u_Q\sqrt{k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_R = \frac{3\pi}{2}, \qquad z_R\sqrt{k} &= \sqrt{2} - \frac{1}{3l\sqrt{k}}(2\sqrt{2} - 1) = 1{,}414 - \frac{0{,}609}{l\sqrt{k}} \\ u_R\sqrt{k} &= log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2} - \frac{1}{6l\sqrt{k}}\{3log(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1)\} = -0{,}532 + \frac{0{,}039}{l\sqrt{k}} \end{aligned}\right\} (26)$$

§ 8. Het buitenste gedeelte der kromme $RST$, dat beantwoordt aan $\varphi$-waarden, welke oneindig weinig van $2\pi$ verschillen, en dat zich tot in het oneindige uitstrekt, wordt weer bepaald door verg. (9). Aangezien $z$ nu echter in het oneindige nul wordt, is nu de oplossing

$$z = aiH_0^{(1)}(iz\sqrt{k}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

waarin $H_0^{(1)}$ is de functie van HANKEL van de orde nul en van de eerste soort.

De integratieconstante $a$ wordt bepaald door aansluiting met de form. (22) en (23), waarin $\varphi = 2\pi - \psi$ met $\psi$ oneindig klein wordt gesteld. Op dezelfde wijze als in § 5 vindt men nl.

$$log\, z\sqrt{k} = -u\sqrt{k} - 0{,}611 - \frac{u}{2l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

terwijl uit (27) volgt, voor groote waarden van $x$, die weinig van $l$ verschillen,

[1]) Op een herleiding na een reeds bekende formule (zie b.v. WINKELMANN, loc. cit., p. 1148). Zie ook A. FERGUSON, Phil. Mag., (6), 24, 837, 1912.

$$z = 2a \frac{e^{-x\sqrt{k}}}{\sqrt{2\pi x\sqrt{k}}} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-l\sqrt{k}} \cdot e^{-u\sqrt{k}}}{\sqrt{l\sqrt{k}}} \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{u}{l}\right)^{1)} . \quad . \quad (29)$$

Men heeft dus, $x_R = r$ stellende en bedenkende, dat $r\sqrt{k} = l\sqrt{k} + u_R\sqrt{k}$ (form. 26)

$$a\sqrt{k} = \tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}924 \sqrt{2\pi r\sqrt{k}}\, e^{r\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

§ 9. Volgens form. (21) kan $\varphi$ niet nul worden; wel kan $z$ nul worden in een punt $M$ (fig. 3) bij een minimumwaarde van $\varphi$. Aan de linkerzijde bestaat dan ook het vervolg der kromme $QNSM$ uit een reeks langgerekte $S$-vormige bogen, zooals schematisch is afgebeeld in fig. 3[2]).

Weer is de wijdte der bogen klein t.o.v. van $l$ (abscis van het punt $M$), en men vindt voor de bogen de volgende vergelijking:

$$kz^2 = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \varphi_m{}^2 \pm \frac{8}{3l\sqrt{k}}(1 - \cos^3 \tfrac{1}{2}\varphi) . \quad . \quad . \quad (31)$$

(het teeken $+$ betrekking hebbende op het gedeelte waar $z > 0$, het teeken $-$ op het andere); $z$ wordt nul voor

$$\varphi = \varphi_m = \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{3l\sqrt{k}}} \text{ of voor } \varphi = 2\pi - \varphi_m , \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

naar gelang de orde $n$ van het punt $M_n$, waar de $n^e$ boog de as snijdt, oneven of even is[3]),

Voert men een nieuwen hoek $\psi$ in, zoodanig dat[4])

$$\sin \psi = \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{2}\varphi_m} = \left(1 + \frac{2\sqrt{n}}{3l\sqrt{k}}\right) \cos \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\lambda} \cos \tfrac{1}{2}\varphi, \quad . \quad . \quad (33)$$

dan is in eerste benadering, evenals in het tweedimensionale probleem:

$$z\sqrt{k} = \pm\, 2 \cos \psi \quad \pm u\sqrt{k} = \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - 2\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \Delta\psi d\psi, \quad . \quad (34)$$

de $u$ gemeten zijnde van af het punt $M$. De geheele wijdte $2p = x_Q - x_L$ wordt dus gegeven door dezelfde uitdrukking als in § 6, zoodat

$$\varphi_m = 1{,}082\, e^{-p\sqrt{k}} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (35)$$

[1]) Zie Nielsen, loc. cit.

[2]) Zie ook Winkelmann, loc. cit., p. 1138, fig. 400$a$.

[3]) In het eerste geval stijgt de boog naar den kant van grootere $x$-waarden, en verandert $\varphi$ van $\pi$ tot $\pi$ over $\varphi_m$, in het andere daalt hij en verandert $\varphi$ van $\pi$ tot $\pi$ over $2\pi - \varphi_m$.

[4]) Zie Winkelmann, loc. cit., p. 1137. We nemen den hoek $\psi$ zóó, dat $\psi = \pm \frac{1}{2}(\pi - \varphi) + \alpha$ (oneindig klein), met $+$ voor oneven bogen ($\varphi < \pi$), $-$ voor even bogen ($\varphi > \pi$).

de betrekking is tusschen de wijdte van een boog en den (scherpen) hoek waaronder hij de $x$-as snijdt [1])

§ 10. Capillaire oppervlakken, waarvan de meridiaandoorsneden overeenkomen met de bogen $DFG$ van fig. 2 of $LMN$ (ook de tegengesteld gerichte) van fig. 3 worden experimenteel verwezenlijkt tusschen twee buizen, waarvan de stralen $r_2$ en $r_1$ onderling betrekkelijk weinig verschillen ($r_2 - r_1 \ll l = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ b.v.) maar toch zooveel, dat $(r_2 - r_1)\sqrt{k}$ een vrij groot getal is. In 't algemeen echter zal, voor gegeven $p = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ en $l = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$, $n$ geen geheel getal zijn, d.w.z. het tusschen twee willekeurige buizen verwezenlijkte oppervlak maakt geen deel uit van de in de §§ 6 en 9 beschouwde. Intusschen, ook dan zijn de gegeven ontwikkelingen nog geldig, d.w.z. de meridiaankromme wordt nog door de verg. (14) of (31) voorgesteld, en de stijghoogte $z_0$ of de minimumhoek $\varphi_m$ worden nog door de form. (20′) of (35′) uitgedrukt.

Weer maken de aldus verkregen $U$-vormige of $S$-vormige bogen deel uit ieder van een reeks dergelijke bogen, maar de eerste reeks eindigt nu niet in 't algemeen aan den kant der omwentelings-as, met een boog die nagenoeg in den oorsprong uitloopt, en evenmin eindigt in 't algemeen de tweede reeks aan den van de as afgekeerden kant met een in het oneindig uitloopenden tak. Men ziet gemakkelijk in, dat zich het volgende voordoet: de $U$-vormige bogen komen aan den kant van de as (naar links) steeds lager ($z_0$ wordt kleiner), en na, een minimumwaarde te hebben bereikt, wordt $z_0$ imaginair, de verg. (14) gaat over in den vorm (33), d.w.z. de $U$-vormige bogen gaan in $S$-vormige over. Omgekeerd: de $S$-vormige bogen vertoonen naar rechts steeds kleinere waarden van $\varphi_m$; ten slotte wordt $\varphi_m$ imaginair en de $S$-vormige bogen gaan in $U$-vormige over [2]).

§ 11. We beschouwen nu het geval $k < 0$ (afhangende druppels).

[1]) Stelt men $2q = x_N - x_L$, dan is

$$\varphi_m = 1{,}842\, e^{-q\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35')$$

[2]) Is $(r_2 - r_1)\sqrt{k}$ een getal van matige grootte, dan zijn in eerste benadering de uitkomsten van het tweedimensionale probleem zonder vereenvoudiging toepasselijk. Is $(r_2 - r_1)\sqrt{k}$ een zeer klein getal, dan is de meridiaandoorsnede in eerste benadering cirkelvormig en de verdere benadering kan geschieden op een soortgelijke wijze, als voor kleine druppels werd gedaan in Meded. N⁰. 42$c$.

Is het verschil $r_2 - r_1$ niet klein t. o. v. $l = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$, dan gelden in de nabijheid van $x = r_1$ en van $x = r_2$ de beschouwingen der §§ 7 en 3, terwijl tusschenin

$$z = ai\, H_0^{(1)}(ix\sqrt{k}) + bJ_0(ix\sqrt{k}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$a$ de waarde hebbende gegeven door form. (30) met $r = r_1$, $b$ de waarde van $h$ in form. (13) met $r = r_2$.

Breede afhangende druppels bestaan niet; dat men onder aan een wijde buis geen druppels kan laten hangen is duidelijk, maar ook de druppels, die zich vormen aan de onderzijde van een horizontaal bevochtigd vlak, bereiken geen groote afmetingen. Dompelt men b.v. een horizontale plaat in water, en licht die er weer uit, dan verzamelt zich de vloeistof, die aan de plaat blijft kleven, tot één of meerdere druppels, die aangroeien (soms samenvloeien), afvallen, weer aangroeien, enz., maar de breedte van die druppels, die rakend aan de plaat uitloopen, staat in 't geheel niet in verhouding tot de grootte van die plaat.

De meridiaandoorsnede van het capillair oppervlak bestaat in dat geval (zoolang de druppel nog niet ingesnoerd is) uit een golvende lijn (fig. 4), waarvan de golvingen hoe langer hoe lager worden,

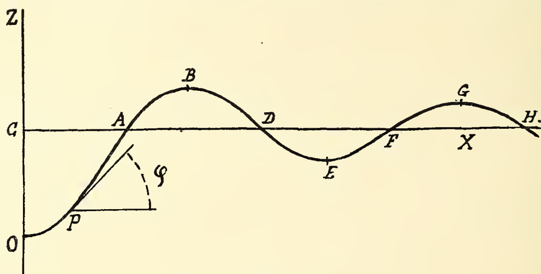



Fig. 4.

naarmate ze verder van de as verwijderd zijn; [1]) de afhangende druppel vertegenwoordigt het stuk $OAB$, begrepen tusschen de as en het eerste maximum. Uit lijnen, door toepassing van de graphische methode van Kelvin geconstrueerd, schijnt te volgen, [1]) dat de afstanden der achtereenvolgende maxima en minima tot de as toenemen met den kromtestraal in den top; dat aangroeien heeft echter een grens: bij zeer vlakke druppels blijven die afstanden toch nog matig groot, zooals blijkt uit het volgende.

Is de druppel zeer vlak, dan kan de hoek $\varphi$ overal als zeer klein worden beschouwd, en de vorm van de meridiaandoorsnede wordt bepaald door vergelijking (9), of, $k = -k'$ stellende, door

$$z'' + \frac{z'}{x} + k'z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9'')$$

Deze vergelijking gaat over in (9') door de substitutie van $x\sqrt{k'} = \xi$, $z = \eta$, zoodat

[1]) Zie Winkelmann, loc. cit., p. 1146.

$$z = z_0 J_0 (x \sqrt{k}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

$z_0$ zijnde de ordinaat ($-CO$) van den top $\left(z_0 = \frac{2}{k'R_0}\right)$. Het verloop van deze functie beantwoordt werkelijk aan fig. 4 [1]). Het maximum $B$ ligt bij $x \sqrt{k} = 3{,}83$ [2]) en de ordinaat daarvan is $z_B = 0{,}4028\, z_0$, zoodat de geheele hoogte van den druppel is

$$H = 1{,}4028\, z_0 = 1{,}4028 \times \frac{2}{k'R_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

onafhankelijk van de breedte (ten minste zoolang $R_0$ groot is).

Op grooten afstand van de as nadert de kromme tot

$$z = \frac{z_0}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \sin x \sqrt{k'} \text{ [3])} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

§ 12. Hoewel uit waarnemingen, aan groote (liggende) druppels of gasbellen verricht, wel eens capillaire constanten berekend zijn, en methodes bekend zijn, die daarop berusten [4]), is daaraan toch geen werkelijk praktisch belang toe te kennen. Het is dan ook slechts volledigheidshalve dat die methodes hier, in verband met het voorgaande, nog even worden besproken en, waar het noodig bleek, aangevuld zijn.

Bij de bespreking van de verschillende wijzen, waarop oppervlaktespanningen met behulp van zeer kleine druppels of bellen bepaald kunnen worden [5]), werden die methodes ingedeeld in drie groepen, die men zou kunnen noemen: de drukmethodes, de gewichtsmethodes en de meetkundige methodes. Volgens de methodes van de eerste groep wordt de oppervlaktespanning $\sigma$ afgeleid uit de meting van den druk in een druppel (of bel) van bepaalden straal; volgens die van de tweede meet men de kracht, die met de oppervlaktespanning langs een bepaalde lijn evenwicht maakt (d. w. z. men bepaalt het gewicht van de door de oppervlaktespan-

---

1) Zie b.v. Jahnke und Emde, Funktionentafeln.

2) Voor water ($k = 13$) is dus $x_B = 1{,}06$ cM.

3) Zie Nielsen, loc. cit. Voor groote waarden van $x$ is de algemeene oplossing van verg. (9″):

$$z = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \sin (x \sqrt{k'} + b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38')$$

Stukken der meridiaankromme, zooals $BDEFG$ (fig. 4) schijnen niet realiseerbaar te zijn. Bevochtigt men b.v. horizontale ringen, dan blijven daaraan wel een of meer druppels hangen, maar tot één vloeistofring vereenigen die druppels zich niet.

4) Zie b.v. Winkelmann, p. 1155.

5) Suppl. N°. 42$d$ bij de Meded. uit het Nat. Lab. Leiden.

ning gedragen vloeistof)[1]; in de derde groep vindt men methodes, waarin $\sigma$ enkel uit den vorm van den druppel (of bel) afgeleid wordt (meting van zekere afmetingen). Deze indeeling is algemeen en geldt ook voor groote druppels en bellen; alleen is in dat geval de drukmethode praktisch zonder belang, wegens de kleinheid der te meten drukken, tengevolge van de groote kromming in den top; zoo heeft dan ook de formule (13), welke de stijghoogte aangeeft in de as van een wijde buis met bekenden straal, geen praktische beteekenis.

Van meer beteekenis zijn hier natuurlijk de meetkundige methodes, welke bestaan in het meten der coördinaten van de punten $A$ of $B$ van fig. 1, $Q$ of $R$ van fig. 3, en toepassing der formules (6), (7), (25) of (26). De toepassing dezer methodes stuit echter op het bezwaar, dat het moeilijk is die coördinaten nauwkeurig te bepalen.

Het grootste praktische belang schijnen hier de gewichtsmethodes te hebben. Reeds GAY-LUSSAC heeft capillaire constanten afgeleid uit de meting van de kracht, welke noodig is, om een horizontale schijf, die met een oneindig uitgestrekt vloeistofoppervlak in aanraking is geweest, boven dat oppervlak op te heffen;[2]) die kracht is (afgezien van het gewicht der schijf):

$$P = \pi r^2 \mu g z - 2\pi r \sigma \sin \varphi_{,,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

waarin $z$ door de uitdrukking (22) te vervangen is (met $l = r$). Daarbij zijn eenvoudige gevallen die, waar $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ en $\varphi = \pi$[3]); in dit laatste geval, dat alleen bereikt kan worden met een schijf, die volkomen door de vloeistof wordt bevochtigd, is de kracht een maximum.[4])

[1]) De methode der stijghoogtemeting in nauwe buizen behoort zoowel tot deze tweede als tot de eerste groep.

[2]) Vermeld in LAPLACE, Mécanique céleste, IV, 2e suppl. au livre X.

[3]) WINKELMANN, p. 1148 en 1156.

[4]) Dit maximum wordt eigenlijk reeds bereikt, even vóór dat de schijf tot de maximale hoogte (ordinaat van het punt $Q$, fig. 3) opgelicht is; stelt men $\varphi = \pi + \varepsilon$, dan wordt $P$ maximum, wanneer $\varepsilon = \frac{4}{r\sqrt{k}}$. Zoolang echter $z$ slechts in tweede benadering bekend is, is deze omstandigheid zonder invloed op de in dit geval te gebruiken formule.

Is er een randhoek $i$, dan kunnen $\sigma$ en $i$ beide uit twee waarnemingen worden berekend, b.v. één waarbij $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (dit is niet meer mogelijk wanneer $i > \frac{\pi}{2}$), en een andere waarbij de kracht maximum is, in welk geval $\varphi = \pi + i$. Is $i > \frac{\pi}{2}$, zooals voor kwik, dan kan men ook het gewicht bepalen van een op een horizontale

In de beteekenis, die hierboven aan het woord gewichtsmethode werd gegeven, behoort de methode van GAY-LUSSAC eigenlijk niet tot zulke methodes, maar moet veeleer onder de 3[de] groep worden gerangschikt. [1]) Werkelijke gewichtsmethodes zijn die, waarbij men bepaalt de capillaire kracht, werkende op een verticaal in de vloeistof opgehangen plaat [2]), of de kracht, welke noodig is om een smallen horizontalen ring van de vloeistof los te maken. Deze laatste kracht is, afgezien van het gewicht van den ring,

$$P = 2\pi\sigma\,(r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2) + \pi\,(r_2^2 - r_1^2)\,\mu g z, \quad . \quad . \quad (40)$$

$r_1$ en $r_2$ zijnde de inwendige en de uitwendige straal van den ring; de hoeken $\varphi_1$ en $\varphi_2$ worden, bij gegeven $z$, bepaald door de formules (4') en (22). De ring laat los, wanneer $z$ een weinig grooter is geworden dan de ordinaten der punten $A$ (fig. 1) en $D$ (fig. 3); stelt men $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_2$, $\frac{1}{2}(r_2 + r_1) = r$ en $r_2 - r_1 = \delta$, dan vindt men, dat $P$ maximum wordt wanneer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{4}\delta\sqrt{2k}$, en dan is

$$\frac{P_M}{4\pi\sigma r} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\sqrt{2k} + \tfrac{1}{16}\,k\delta^2 + \tfrac{1}{6}\,\frac{\delta}{r}\,(2\sqrt{2}-1)\;{}^{3)} \quad . \quad . \quad (41)$$

---

plaat rustenden druppel; dan geldt ook weer de formule (39). Ook kan men in dat geval de maximale kracht bepalen, welke noodig is om een schijf in de vloeistof onder te dompelen (zie A. MAYER, Sill. Journ., (4), 253, 1897).

[1]) Volgens form (39) maakt de aangewende kracht hoofdzakelijk (en, wanneer $\varphi = \pi$ is, uitsluitend) evenwicht met den hydrostatischen druk; in hoofdzaak is hier dus de gewichtsbepaling een onrechtstreeksche wijze van meting van de hoogte $z$.

[2]) Methode van WILHELMY. Zie WINKELMANN, p. 1156.

[3]) Deze formule werd reeds vroeger gevonden (zie WINKELMANN, loc. cit., p. 1157), op den laatsten term na, die nochtans even belangrijk is als de voorgaande.

De formule geldt ook voor het geval van een ring, die in een vloeistof als kwik wordt neergedrukt.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van de Heeren L. HAMBURGER, G. HOLST, D. LELY en E. OOSTERHUIS: *„Over den invloed van verschillende stoffen op de lichtabsorptie van dunne wolfraamlaagjes"*.

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

*Inleiding.* Het onderzoek, waarover wij hier in het kort iets willen mededeelen, heeft betrekking op een onderwerp van groot belang voor de gloeilampen-industrie, n.l. het tegengaan van het zwart worden gedurende het branden bij vacuum-wolfraamlampen.

Het is bekend, dat de economie van zulk een lamp toeneemt, naarmate men de temperatuur van den gloeidraad hooger opvoert. Men kan zoodoende wel aanvankelijk een zeer hoog nuttig effect verkrijgen, doch de verdamping van het wolfraam, die met toenemende temperatuur buitengewoon snel grooter wordt, maakt, dat de glazen ballon zich met een dun laagje wolfraam bedekt, dat zooveel licht absorbeeren kan, dat na korten tijd de economie van de lamp weer lager wordt dan voor eenzelfde lamp, die op een minder hooge temperatuur brandt.

Het spreekt van zelf, dat men op vele wijzen geprobeerd heeft, dit afzwarten van den ballon tegen te gaan. De middelen, die men daartoe heeft toegepast, kan men in twee groepen onderscheiden:

1°. Men probeert door het invoeren van bepaalde stoffen in de lamp het wolfraam-neerslag te ontkleuren en daardoor minder schadelijk te maken.

2°. Men vermindert de verdampingssnelheid van het wolfraam door het aanbrengen van een gasvulling van hoogen druk. Deze laatste methode wordt in de zoogenaamde halfwattlampen toegepast.

Wij willen ons hier echter uitsluitend bezighouden met de eerste wijze van werken en nagaan, welke stoffen geschikt zijn, het afzwarten der vacuumlampen tegen te gaan en tevens onderzoeken op welke wijze deze stoffen werken.

Wij zullen daarbij in hoofdzaak twee groepen stoffen kunnen onderscheiden.

1°. Gassen, welke chemisch werkzaam zijn met het verdampte wolfraam en het in een minder gekleurde verbinding omzetten, en stoffen, die gedurende het branden van de lamp door dissociatie zoodanige gassen ontwikkelen.

2°. Stoffen, waarvan men niet zonder meer mag aannemen, dat ze met het verdampte wolfraam chemisch werkzaam zijn.

Deze laatste groep van stoffen zal ons in het bijzonder bezighouden. Vooraf moeten wij echter enkele opmerkingen maken over de eerste.

§ 1. *Werking van gassen of stoffen, die door dissociatie gassen ontwikkelen.*

Het eenvoudigst is de werking van kleine hoeveelheden gas, die in den ballon gebracht worden. In dit opzicht vragen in het bijzonder chloor en zuurstof onze aandacht.

LANGMUIR [1]) heeft aangetoond, dat chloor bij kamertemperatuur en zelfs bij 200° het wolfraam-neerslag op den wand niet of maar zeer weinig aantast. Laat men een kleine hoeveelheid droog chloor in een lamp, waarin zich reeds een wolfraam-neerslag op den wand gevormd heeft, dan zal het dit niet aantasten. Laat men echter den draad gloeien dan verdwijnt het wolfraam-neerslag snel. LANGMUIR verklaart dit door aan te nemen, dat het chloor door den gloeienden draad gedissocieerd wordt; de zeer reactieve chloor-atomen die bij den lagen chloordruk direct naar den wand vliegen, grijpen het wolfraam aan en zetten het in kleurloos $WCl_6$ om.

Men zou dus kunnen denken, dat men door het aanbrengen van een kleine chloorvulling de lamp kan verbeteren. Het resultaat valt echter niet mee, daar de chloordruk noodig om den levensduur [2]) van een normale lamp te verdubbelen, niet minder dan $^1/_2$ m.m. zou moeten zijn [3]).

Bij dezen druk zal het chloor niet meer kunnen werken op de bovenbeschreven wijze, daar de vrije weglengte veel te klein is. Het zal echter wel met de wolfraamdamp kunnen reageeren en zoodoende de vorming van een wolfraamneerslag kunnen tegenhouden. Aan een dergelijke gasvulling zijn echter bezwaren verbonden.

Bij een druk van $^1/_2$ m.m. is de warmteafleiding door het gas reeds vrij groot, waardoor het nuttig effect weer achteruit gaat,

---

[1]) I. LANGMUIR, Journ. Amer. Chem. Soc. (37), 1142, 1915.

[2]) Onder levensduur verstaat men gewoonlijk den tijd, waarin de lichtsterkte 20% afneemt.

[3]) De hoeveelheid wolfraam die bijv. in een lamp voor 110 Volt en 50 kaarsen verdampt en 20% van het licht absorbeert, bedraagt ongeveer 0,26 mgr. Om dit in $WCl_6$ om te zetten is 0,3 mgr. chloor noodig, overeenkomende met een druk van ± $^1/_2$ m.m.

terwijl althans bij de hoogere voltages electrische ontladingen door het gas, die de lamp kunnen verwoesten, niet uitgesloten zijn. Maar bovendien verdampt het wolfraam slechts geleidelijk en zal het chloor reeds vóórdat zich een belangrijk wolfraamneerslag heeft kunnen vormen, door andere werkingen de lamp hebben te gronde gericht.

LANGMUIR vond n.l. dat $W$ en $Cl$ ook zonder voorafgaande dissociatie van het halogeen kunnen reageeren, en wel het sterkst bij ± 1500° K., terwijl bij hoogere en lagere temperaturen de reactiesnelheid geringer is. Bij de hooge temperatuur waarop de draad gloeit, reageeren zij practisch niet, daar volgens LANGMUIR de tusschen producten noodig voor de vorming van $WCl_6$ weer dissocieeren (onder vorming van atomair $Cl$), vóórdat de reactie tot de vorming van $WCl_6$ heeft kunnen voortschrijden.

Nu bevinden zich in de lamp steeds deelen van den draad en vaak ook van de wolfraamhaakjes, waarover de draad is uitgespannen, op een temperatuur waarbij de reactie-snelheid groot is. Deze deelen zullen worden aangetast onder vorming van $WCl_6$. Inderdaad bleek in een met chloor gevulde lamp, de gloeidraad, wanneer deze slechts zwak gloeide, spoedig te worden aangetast, waarbij $WCl_6$ op den wand condenseerde tegenover de draden. Liet men daarentegen den draad op hooger temperatuur gloeien dan bleef deze vrijwel intact, terwijl zich $WCl_6$ op den wand afzette tegenover de haakjes. De gloeidraad nam zelfs in diameter toe; na 5 minuten was de electrische weerstand 12 °/₀ kleiner geworden. Dit laat zich eenvoudig verklaren. Door de groote warmtegeleiding door het gas, wordt de ballonwand warm. Het $WCl_6$ verdampt en dissocieert aan den gloeienden draad, er een kleine hoeveelheid wolfraam op achterlatende, terwijl het chloor weer vrij komt. De gloeidraad wordt dikker ten koste van die deelen van de lamp, die zich op een temperatuur bevinden, waarbij de reactiesnelheid groot is, en de lamp gaat spoedig te gronde.

Het chloor doorloopt dus een soort kringproces en men kan zich nu afvragen of het niet mogelijk zou zijn veel minder chloor in de lamp te brengen, zoo weinig, dat de deelen, die zich op de temperatuur der maximale reactiesnelheid bevinden, niet in enkele uren doch eerst na bijna 1000 uren brandens door de inwerking van het chloor vernield worden.

Vermindert men echter den gasdruk, dan wordt de warmteafleiding kleiner, de glaswand minder warm, het gevormde $WCl_6$ verdampt niet meer, het chloor wordt niet teruggevormd. Het bleek dan ook, dat men op deze wijze niets kan bereiken. Na korten tijd was al het chloor in den ballon vastgelegd en lampen met kleine chloor-

vullingen gedroegen zich na korten tijd alsof er geen chloor in aanwezig was.

De andere halogenen en zuurstof gedragen zich op analoge wijze. Door den geringen dampdruk van $WO_3$ is hier van een kringproces eerst recht geen sprake.

Wel heeft men succes gehad door stoffen in de lamp te brengen, die gedurende het branden voortdurend kleine hoeveelheden chloor of zuurstof ontwikkelen. F. SKAUPY was de eerste, die deze oplossing aan de hand deed. Een kleine hoeveelheid kalium-thallium-chloride wordt in een buisje op zoodanige wijze in de lamp gebracht, dat de temperatuur bij het branden hoog genoeg wordt om chloor te doen ontwijken. De hoeveelheid zout wordt zoo gekozen, dat de chloordruk niet te groot en niet te klein wordt. Niet te groot om de bovengenoemde redenen, niet te klein omdat dan de werking onvoldoende is. Wij hebben kunnen constateeren, dat $K_3\ Tl\ Cl_6$ inderdaad bij 350° C. reeds chloor afstaat. Een kleine hoeveelheid van het zout werd tusschen de 2 glazen wanden van een Dewarglas gebracht, dat met vloeibare lucht gevuld was en waarvan de buitenwand op 350° verwarmd werd. Het in het hooge vacuum gevormde distillaat, dat zich op den kouden binnenwand afzette, bevatte veel vrij chloor en verder thallium-chloride; kalium-chloride was er niet in aanwezig.

De gunstige werking van dit zout in de lamp mag dus veilig toegeschreven worden aan het voortdurend aanwezig blijven van een chlooratmospheer van zeer lagen druk, waardoor het wolfraamneerslag wordt omgezet in $W\ Cl_6$, dat slechts een zeer geringe kleuring geeft. Een soortgelijke werking kan men bij koper- en zilverchloride constateeren en ook bij eenige gemakkelijk ontleedbare chloraten en oxyden als bariumchloraat, bariumperoxyde, hoogere loodoxyden enz.

### § 2. *Werking van vaste stoffen, die niet gemakkelijk dissocieeren.*

De werking van de boven besproken stoffen liet zich gemakkelijk verklaren uit hun dissociatie. Nu heeft H. H. NEEDHAM echter gevonden dat ook een stof als cryolieth op plaatsen in de lamp gebracht waar de temperatuur tusschen 400° en 800° bedraagt, een gunstige werking uitoefent, terwijl van andere zijde wordt aanbevolen kleine hoeveelheden keukenzout op het gloeilichaam aan te brengen. Inderdaad blijken nu dergelijke lampen met cryolieth of keukenzout minder snel zwart te worden dan gewone vacuumlampen. NEEDHAM neemt aan, dat er een ontleding van het cryolieth plaats vindt,

waardoor er een „zekere" halogeen atmosfeer in de lamp ontstaat welke die werking zou uitoefenen. Daar het optreden van een halogeen atmosfeer ons onwaarschijnlijk toeleek, hebben wij dit verschijnsel nader onderzocht en een aantal proefnemingen verricht, die ons een beter inzicht in de werking van deze stoffen konden verschaffen. Eerst hebben wij nagegaan of keukenzout op dezelfde wijze werken kan als $K_2TlCl_6$. In een buisje in de lamp gebracht bleek het echter, zooals te verwachten was, volkomen onwerkzaam te zijn. Werd het echter op staafje en draad gespoten dan werkte het zeer goed. Werden alleen staafje en haakjes bespoten dan was de werking wederom gering. Het zout op den *draad* is dus het werkzame gedeelte. Zoodra men de lamp laat gloeien verdampt dit echter en condenseert op den glaswand. Hiervan kan men zich gemakkelijk overtuigen door zulk een lamp te openen [1]). Bij het intreden van vochtige lucht ziet men het zout op den wand kristalliseeren. Dit dunne zoutlaagje moet dus, wanneer de ontkleurende werking op halogeenontwikkeling berust, gedurende het branden van de lamp voortdurend kleine hoeveelheden chloor afscheiden. Noch door verwarming noch door de inwerking van het licht staat keukenzout echter chloor af. Uit de onderzoekingen van GOLDSTEIN [2]) en WIEDEMANN en SCHMIDT [3]) was echter bekend dat $NaCl$ door kathode stralen kan worden beïnvloed. Wij hebben daarom gedacht aan de mogelijkheid dat de electronen, die door den gloeienden draad worden uitgezonden een dergelijke werking konden hebben. Dit bleek echter achteraf niet het geval te zijn.

Treffen electronen met groote snelheid een laagje keukenzout dan treedt, afhankelijk van die snelheid, een bruin of violet kleuring van het zout op. Het bruine zout wordt door de inwerking van het daglicht weer ontkleurd, het violette is daarentegen lichtbestendig. GOLDSTEIN neemt nu aan dat deze kleuring slechts aan een physische beïnvloeding te danken is, terwijl WIEDEMANN en SCHMIDT tot de conclusie kwamen dat het zout ontleed wordt, waarna het gevormde Natrium of Natriumsubchloride colloidaal in de overmaat zout oplost. Alleen in het laatste geval kan er dus van het ontstaan van een halogeen atmosfeer sprake zijn. Het bleek ons nu bij nader onderzoek dat bij het bruine zout geen chloor uit de vaste phase ontweken

---

[1]) De dikte van het laagje bedroeg bij deze proeven ongeveer $1-2 \times 10^{-6}$ cm., d.w.z. ongeveer 50 molekulen.

[2]) E. GOLDSTEIN, Wied. Ann. (54), 371, 1895 en (60), 491, 1897.

[3]) E. WIEDEMANN en G. C. SCHMIDT, Wied. Ann. (54), 604, 1895; (56), 201, 1895 en (64), 78, 1898.

is, het reageert neutraal; bij het violette zout daarentegen heeft ontleding plaats gevonden.

Daar een ontleding van het $NaCl$ door electronenstoot dus mogelijk is hebben we ons afgevraagd, bij welke snelheid der electronen een dergelijke ontleding plaats zal vinden en hypothetisch aangenomen, dat een splitsing zal geschieden, wanneer de kinetische energie van het electron grooter is dan de bindingswarmte van het zout. Deze bedraagt voor $NaCl$ 97.6 Kg. cal. per grammol. en dus voor een molecuul $0.676 \times 10^{-11}$ erg. Electronen met grooter snelheid dan $1.23 \times 10^8$ cm/sec. zouden dan een splitsing te weeg kunnen brengen. Zulke snelle electronen komen nu inderdaad in de lamp voor. Wij konden dit aantoonen met behulp van een lamp, waaraan een zijbuis was geblazen, die een FARADAY's kooitje bevatte. De oplading bedroeg bij normale brandtemperatuur steeds — 5.7 Volt ten opzichte van de negatieve pool van den gloeidraad. Electronen-snelheden van $1.40 \times 10^8$ cm/sec. komen dus voor.

Door het aanbrengen van een versnellend of vertragend veld kon men de werking echter niet beinvloeden[1]; evenmin met behulp van een solenoïde. Hierbij komt nog, dat het niet waarschijnlijk is, dat het aantal electronen sneller dan $1.23 \times 10^8$ cm sec. voldoende groot is. Waren er geen versnellende of vertragende electrische velden in de lamp aanwezig, dan zou bij de normale gloei-temperatuur van 2350° abs. op elke 250 verdampte moleculen slechts 1 voldoende snel electron aanwezig zijn. Inderdaad is echter de electronenstroom kleiner dan de verzadigingsstroom, zoodat ongetwijfeld het aantal snelle electronen nog kleiner zal zijn. Een ontleding van het zout door electronenstoot lijkt dus zeer onwaarschijnlijk. Maar bovendien konden wij direct, langs chemischen weg, aantoonen, dat in de lamp een ontleding van het $NaCl$ in het geheel niet plaats vindt.

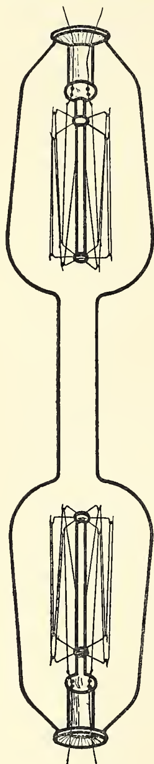
Een lamp met aangeblazen zijbuis werd vervaardigd. De zijbuis werd bij het branden in vloeibare lucht gebracht. Na afloop der proefneming bleek er geen spoor van een chloorcondensaat aanwezig. Een druppel kwik onder in de buis liet bij het schudden geen strepen na, hetgeen steeds het geval is bij de aanwezigheid van sporen chloor.

Verder zou het keukenzout-restant alkalisch moeten reageeren. Zelfs met de methode van F. MYLIUS en F. FÖRSTER met 0.001 normaal oplossingen en jood-eosine als indicator hebben wij geen verandering in de alkaliniteit van het zout waar kunnen nemen. Klaarblijkelijk vindt dus geen ontleding van het zout plaats.

Verder constateerden wij dat de werking van het zout even goed

[1]) Bij deze proefnemingen konden wij wel constateeren, dat de verdampende $W$ deeltjes niet geladen zijn.

is, wanneer de lamp geheel in vloeibare lucht ondergedompeld brandde. Hierdoor wordt het al zeer onwaarschijnlijk, dat wij met een ontleding van het zout en de ontklenrende werking door een halogeen atmosfeer te doen hebben. Het bleek verder, dat ook andere halogeen verbindingen zooals *NaBr*, *KI* alle evengoed bij de temperatuur van vloeibare lucht als bij kamertemperatuur werkten terwijl toch voor *Br* en vooral voor *I* bij vloeibare luchttemperatuur uiterst geringe werking te verwachten is.


Fig. 1.

De mogelijkheid dat de *verdampingssnelheid* van het wolfraam door het bedekken met een laagje zout *verkleind* zou kunnen worden hebben wij ook onder oogen gezien. M. KNUDSEN [1]) had een dergelijke afname van de verdampingssnelheid door kleine verontreinigingen bij kwik geconstateerd en I. LANGMUIR [2]) kwam bij zijn studies over wolfraam tot de overtuiging dat zelfs bij 3300° K. wolfraam gedurende eenigen tijd gedeeltelijk met een laagje zuurstof (van atomaire dikte) bedekt kan blijven. Het was dus niet uitgesloten, dat er een weinig zout op den draad zou achterblijven dat de verdamping tegengaat. Wij hebben echter gevonden, dat bij gelijke temperatuur een bespoten en niet bespoten wolfraamdraad 1°. gelijke toename van den electrischen weerstand door de afname van den draaddiameter vertoonen, 2°. een gelijk gewichtsverlies ondergaan, terwijl in beide gevallen 3°. het wolfraam condensaat op den ballonwand gelijk gewicht heeft.

Wij komen dus tot de overtuiging dat het keukenzout als zoodanig in vasten toestand werkzaam is en dat de ontkleuring van het wolfraam, in tegenstelling met hetgeen wij vroeger bij $K_3TlCl_6$ waarnamen, niet door het vrijkomend chloor geschiedt.

Bijzonder duidelijk treedt het verschil in werking tusschen *NaCl* en $K_3TlCl_6$ bij de volgende proefneming aan het licht, waarbij van een dubbellamp gebruik gemaakt wordt (fig. 1). Bedekt

[1]) M. KNUDSEN, Annalen der Physik. (47), 697, 1915.

[2]) I. LANGMUIR, Journ. Amer. Chem. Soc. (38), 2221, 1916.

men den gloeidraad van de onderste lamp met $NaCl$, dien van de bovenste niet, dan vindt men dat de onderste lamp veel minder snel afzwart, dan de andere. Herhaalt men nu deze proef met een dergelijke combinatie, waarbij de onderste lamp in plaats van $NaCl$ een kleine hoeveelheid $K_3TlCl_6$ bevat, dan vindt men een dergelijk verschil niet. De werking van het $NaCl$ is dus een *plaatselijke* in tegenstelling met die van het $K_3TlCl_6$. Het door dit laatste ontwikkelde chloor verspreidt zich over den geheelen ballon en tast zoowel in de onderste als in de bovenste helft het wolfraam-neerslag aan.

Wat is nu wel de werking van het dunne op den ballonwand aanwezige zoutlaagje op het verdampende wolfraam?

Ontstaat er een of andere minder gekleurde chemische verbinding, of blijven het $NaCl$ en $W$ als zoodanig op den wand, slechts een minder licht absorbeerende groepeering vormende?

De volgende proefnemingen maken het waarschijnlijk, dat wij niet met een chemische werking te doen hebben. Vooreerst konden wij constateeren, dat een ontkleuring van het neerslag ook bij andere metalen optreedt en vonden, dat $C$, $Mo$, $Pt$, $Fe$, $Ni$, $Au$, $Cu$, $Ag$ alle zoowel bij kamertemperatuur als bij die van vloeibare lucht minder donker gekleurde neerslagen gaven, wanneer de ballonwand met een dun laagje zout bedekt was, dan wanneer dat niet het geval was. Een chemische werking bij lagere temperatuur bijv. tusschen $Au$ en $NaCl$ zal ieder wel voor uitgesloten houden. Bovendien bleek, dat niet alleen keukenzout, maar vrijwel elke andere stabiele verbinding een afname van de licht-absorptie van het verdampte wolfraam teweeg bracht. Wij konden een in dit opzicht gunstige werking constateeren bij $Na_3PO_4$, $Na_2WO_4$, $KCN$, $Na_2O$, $NaF$, $CaF_2$ en vele andere stoffen.

Wij konden nog op de volgende wijze waarschijnlijk maken, dat het verdampte wolfraam als zoodanig in het $NaCl$-laagje aanwezig is. Brengt men $H_2O$ in de lamp, dan wordt er een hoeveelheid waterstof ontwikkeld, die quantitatief overeenkomt met de hoeveelheid neergeslagen wolfraam.

Daar wij vroeger reeds vonden, dat het $NaCl$ niet alkalisch reageert en er dus geen vrij $Na$ aanwezig is, moet deze $H$-ontwikkeling wel aan de aanwezigheid van vrij $W$ worden toegeschreven.

Terwijl dus de werking van het zoutlaagje weinig van de chemische samenstelling ervan afhangt, bleek dikwijls de vorm, waarin het zout zich op den wand bevindt, wel van invloed te zijn. Bij $NaCl$ is het van den draad verdampte dunne laagje zout volkomen onzichtbaar. Brengt men veel meer zout in de lamp, dan ontstaat evenals bij het toetreden van vochtige lucht een wit gekristalliseerd

neerslag (pag. 706). In dezen vorm blijkt het zout veel minder goed werkzaam te zijn. Lampen, waarvan de ballonwand met zichtbare zoutkristallen bedekt is, zijn niet veel beter dan zulke, waarbij in het geheel geen zout aanwezig is. Een dergelijk verschijnsel doet zich bij *glas* voor. Brengt men dit in poedervorm in geringe hoeveelheid op den draad en laat men het naar den ballonwand overdistilleeren, dan oefent dit fijner verdeelde distillaat een dergelijke werking uit als $NaCl$, terwijl de gladde ballonwand zelf klaarblijkelijk onwerkzaam is. Toch kan men niet algemeen zeggen, dat gekristalliseerde stoffen niet werkzaam zijn. Met gekristalliseerd $NaF$ en $KCl$ kon wel degelijk een gunstige werking worden waargenomen, zij het dan ook niet evengoed als in amorfen toestand.

In het algemeen blijkt het echter voor de ontkleurende werking van het zout van belang, dat dit zich in zeer fijn verdeelden toestand op den wand bevindt. Het is nu waarschijnlijk, dat de $W$ deeltjes, welke met relatief groote snelheid van den draad komen, eenigen afstand in het zout zullen doordringen en zich daar in uiterst dispersen toestand bevinden. Dat in een dergelijken toestand de licht-absorptie zeer gering kan zijn werd reeds door VON WEIMARN[1]) bij kleurloos goudglas en goudkwarts en door ZSIGMONDY[2]) bij kleurlooze colloïdale goud-oplossingen gevonden, terwijl VON WEIMARN[3]) en MC. INTOSCH en EDSON[4]) er op gewezen hebben, dat kleurlooze colloidale oplossingen kunnen ontstaan door snelle afkoeling van ware oplossingen. De deeltjes worden dan verhinderd groote conglomeraten te vormen. REINDERS en HAMBURGER[5]) hebben met behulp van den ultramikroskoop de uiterst dunne door verdamping ontstane metaal- en zoutlaagies onderzocht. Zij vonden bij $CaF_2$ dat bij vele der volgende proefnemingen gebruikt werd, het veld optisch leeg. Ook bij wolfraamlaagjes werd een optisch leeg veld gevonden, zoowel in het geval dat het $W$ direct op den glaswand condenseerde, als in het geval, dat de wolfraamdeeltjes in een zout laagje terecht kwamen. Er kon dus met den ultramikroskoop geen verschil tusschen een met zout behandelde lamp en een gewone geconstateerd worden. Bij metalen met lager smeltpunt zooals zilver, waarvan de moleculen een grooter beweeglijkheid bezitten, trad echter wel degelijk een verschil op. Een dun zilverlaagje op glas neergeslagen vertoont ultramikroskopisch een aaneengesloten netwerk van ultramikronen.

---

1) P. V. WEIMARN, Zeitschr. für Chem. und Ind. der Kolloïde, (11), 287, 1912.

2) R. ZSIGMONDY, Zur Erkenntniss der Kolloïde, 1905 en Zeitschr. für phys. Chemie, (56), 65, 1906.

3) P. V. WEIMARN, Grundzüge der Dispersoidchemie, p. 70, 1911.

4) D. MC. INTOSCH and R. EDSON, Journal Am. Chem. Soc. (38), 613, 1916.

5) W. REINDERS en L. HAMBURGER, Versl. Kon. Ak. v. Wet. (25), 661, 1916 en (26), 595, 1917.

Wordt het zilver op een zoutlaagje ($CaF_2$) neergeslagen, dan blijkt het gezichtsveld optisch leeg. Door de aanwezigheid van het zout worden dus de metaal molekulen verhinderd zich aaneen te sluiten. Blijkbaar bevinden zij zich verspreid in het zout, en berust de werking van dit laatste op dit gescheiden houden der metaal molekulen. Wij hebben de kwestie, hoe hierdoor de licht absorbtie beïnvloed wordt, nog nader onder oogen gezien en nagegaan, of het optisch gedrag van zulk een dun laagje in nauw verband zou kunnen staan met het electrische geleidingsvermogen. Wij hebben daarom een reeks metingen over het geleidingsvermogen van deze laagjes verricht en inderdaad gevonden, dat in een lamp met zout op den wand, veel meer wolfraam moet verdampen alvorens een electrisch samenhangend laagje ontstaat dan bij lampen zonder zout. Wij meenden nu de werking van het zout aldus te moeten verklaren, dat de electrisch nog niet samenhangende molekulen zich optisch ook min of meer als losse molekulen zouden gedragen en dus evenals gas molekulen een lijnen absorptie spectrum zouden geven, terwijl eerst wanneer hun onderlinge afstand zoo klein wordt, dat electrische geleiding intreedt, metallische absorbtie op zou treden. Dit bleek echter niet het geval te zijn. Lang voordat er een electrisch samenhangend laagje zich gevormd heeft, treedt reeds grauw kleuring en metallische absorptie op.

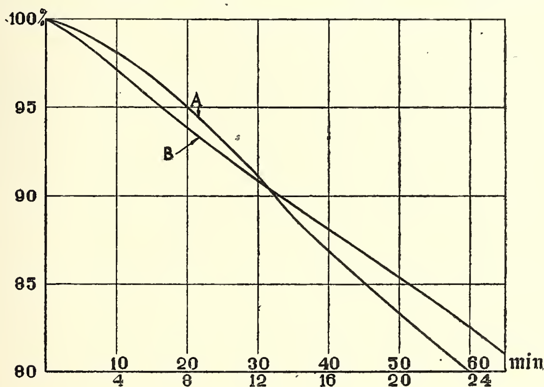


Fig. 2.

In fig. 2 vindt men de lichtsterkte van een lamp zonder zout ($A$) en een met zout ($B$) als functie van den tijd voorgesteld. De temperatuur van den draad was in beide lampen vrijwel dezelfde. [1]) De

[1]) In de figuur behooren de getallen boven de abscissen as bij ($B$), die er onder bij ($A$).

draaddikte was zoo groot gekozen, dat de afname van den draad door verdamping geen noemenswaardigen invloed op de lichtsterkte kon hebben. De gebruikte lamp is in fig. 3 afgebeeld. Om de lamp kunstmatig oud te maken, werd zij eerst gedurende eenigen tijd met den glazen binnen-cylinder omhoog gebrand, zoodat geen wolfraam op den glaswand terecht kon komen. Daarna liet men den cylinder zakken en werd de lichtsterkte op gezette tijden met een thermozuil door een $CuCl_2$ filter gemeten. Zoodoende kon men veel nauwkeuriger resultaten krijgen, dan door fotometrische bepalingen.

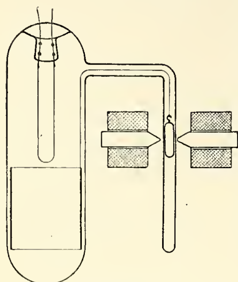


Fig. 3.

Het blijkt nu, dat ook in de met zout behandelde lamp het zich vormende $W$-neerslag onmiddellijk begint te absorbeeren, en dat de absorptie vrijwel evenredig is met het aantal verdampte $W$-moleculen. In de lamp zonder zout vertoont de kromme aan het begin een eigenaardige hellingsverandering, die vrij goed reproduceerbaar bleek te zijn.

Het schijnt dus, dat men in deze dunne laagjes met een dergelijk verschijnsel te doen heeft als door Stark wordt besproken [1]), waar hij de dragers der spectraallijnen behandelt en van electronen spreekt, die optisch vrij, doch electrisch gebonden zijn.

Het verschijnsel moet echter veel beter bestudeerd worden, alvorens men een inzicht zal kunnen verkrijgen in hetgeen zich inderdaad in deze dunne laagjes afspeelt. Eindelijk willen wij nog de volgende proefneming vermelden. In een lamp werd op den ballonwand onder vloeibare lucht een dun laagje chloor gecondenseerd, hierop werd het $W$ gedistilleerd. Bij het verdampen van het chloor, nadat de lamp uit de vloeibare lucht verwijderd was, bleef het $W$ niet als een poeder achter, doch scheurde het laagje over een lengte van eenige centimeters vaneen, waarbij het metaal als samenhangende vellen op den wand bleef.

Ten slotte willen wij nog aangeven, wat men door het aanbrengen van een zoutlaagje op de boven beschreven wijze kan bereiken.

Uit vele proefnemingen bleek, dat de gemiddelde branddUur, waarna de lichtsterkte tot 80°/₀ van de oorspronkelijke terugvalt, bij lampen met $NaCl$ ongeveer 2,6 maal, bij lampen met $CaF_2$ 3.3 maal zoo lang is als bij lampen zonder zout.

*Eindhoven. Laboratorium der*
*N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.*

[1]) Stark, Jahrbuch der Rad. und El. (14), 139, 1917.

**Anatomie.** De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van den Heer EUG. DUBOIS over: „*Vergelijking van het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, tusschen de twee seksen*".

(Mede aangeboden door den Heer C. WINKLER).

De algemeene betrekking van het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, tusschen homoneure diersoorten kon met juistheid bepaald worden, omdat tusschen deze dikwijls belangrijke verschillen in grootte bestaan. Men weet aldus, dat het gemiddeld hersengewicht evenredig is aan de macht 0.56 van het gemiddeld lichaamsgewicht, aan $P^{0.56}$ (nauwkeuriger $P^{0.555..}$).

Tusschen individuen van eene zelfde soort en van gelijke sekse evenwel is het hersengewicht van ieder gemiddeld evenredig aan eene macht van het lichaamsgewicht, die slechts half zoo groot is; maar met de beschikbare gegevens kon nog niet worden vastgesteld of dit $P^{0.22}$, $P^{0.25}$ dan wel $P^{0.28}$ is. De verschillen der lichaamsgrootte zijn, binnen eene soort, meestal gering, en worden ze aanzienlijker, zooals het geval is met den Hond, dan heeft men weder met zoo ongelijkwaardig materiaal te doen, dat de bedoelde betrekking toch slechts bij benadering te bepalen is. Bij de soort Mensch heeft men wel het voordeel, over een groot aantal van gewichtsbepalingen te kunnen beschikken, maar hier is meestal het hersengewicht, doôr de aan den dood voorafgegane ziekte, eenigermate veranderd, in het algemeen kleiner geworden, doch niet gelijkelijk bij alle individuen. Wel kan men zich bedienen van een indirecte methode, om het hersengewicht te bepalen, maar uit den aard der zaak zijn daartegen ook weder bezwaren. Aangaande normale, plotseling gestorven menschen beschikt men nog over te weinig gegevens.

Op grond van de betrekkingen die tusschen de cellulaire dimensies en inhouden in het zenuwstelsel blijken te gelden, ben ik steeds meer geneigd geworden om $P^{0.28}$ (nauwkeuriger $P^{0.277..}$) als den waren interindividueelen factor aan te nemen en mijn vroegere pogingen om $P^{0.22}$ te interpreteeren als overbodig te beschouwen [1]).

Wat betreft de bepaling van den intersexueelen relatie-exponent

[1]) Deze Verslagen. Deel 22 (1913), p. 606.

zijn de bezwaren wel iets geringer, omdat het mogelijk is ruimer gemiddelden te rekenen; maar er bestaan, behalve van den Mensch, nog weinig gegevens. LAPICQUE heeft (in 1907)[1]) aangetoond, dat deze relatie-exponent bij den Mensch gelijk is aan dien tusschen homoneure diersoorten. Bij de Europeanen is de man gemiddeld 11 tot 12 kilogram zwaarder dan de vrouw; zijn gemiddeld hersengewicht is ongeveer anderhalf hektogram meer dan dat van de vrouw. LAPICQUE komt, door rekening te houden met de uitkomsten van alle schrijvers, tot de ronde waarden 66 en 54 kilogram voor de lichaamsgewichten en 1360 en 1220 gram voor de hersengewichten van den Europeeschen man en de Europeesche vrouw, waaraan een relatie-exponent van **0.56** beantwoordt.

Binnen iedere sekse geldt een veel kleinere relatie-exponent; het hersengewicht verandert, naar verhouding van het lichaamsgewicht veel minder sterk. Op de aldus blijkende discontinuiteit van de eene sekse naar de andere vestigt LAPICQUE de aandacht. Men had sinds lang opgemerkt, dat aan gelijke gemiddelden van de lichaamslengte of van het lichaamsgewicht, van mannen aan den eenen en vrouwen aan den anderen kant, niet gelijke gemiddelde hersengewichten beantwoorden; men heeft hier inderdaad te doen met twee gescheiden reeksen, als twee soorten. Het paradoxale van deze voorstelling, zegt LAPICQUE dan verder, verdwijnt als men haar aldus formuleert: „dans le cas de dimorphisme sexuel la différence sexuelle doit être traitée au point de *vue mathématique* comme une différence spécifique"[2]). Het verschil in lichaamsgewicht tusschen den man en de vrouw beschouwt hij terecht als een duidelijke secundaire sexueele eigenschap. In het hersengewicht nu is een verschil van dezelfde orde en, de bovenstaande redeneering als juist aannemend „ces deux caractères en réalité se ramèneraient à un seul, la différence de poids corporel; la différence de grandeur encéphalique ne serait qu'une conséquence harmonique"[3]).

Met deze laatste conclusie van den verdienstelijken Franschen physioloog kan ik mij, bij nader inzien, niet vereenigen. Ware zij juist, dus inderdaad de eene van de bedoelde sexueele eigenschappen noodzakelijk gevolg van de andere, dan zou men tusschen *alle*

---

[1]) LOUIS LAPICQUE, Différence sexuelle du poids encéphalique dans l'espèce humaine. Bulletins et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris. Séance du 6 juin 1907. Paris 1908, p. 337—344.

[2]) LOUIS LAPICQUE, Comparaison du poids encéphalique entre les deux sexes de l'espèce humaine. Comptes rendus de la Société de Biologie de Paris. T. 63, Séance du 9 novembre 1907, p. 434.

[3]) Ibid., p. 746.

dimorphe seksen niet slechts mathematisch gelijke, doch ook *oorzakelijk* gelijke betrekking moeten vinden als tusschen homoneure soorten, bij welke immers het hersengewicht en het lichaamsgewicht tot elkander in vaste, oorzakelijke betrekking staan. Dit nu is, naar ik mij voorstel aan te toonen, niet het geval [1]).

Om de oorzaak van de tusschen den Man en de Vrouw gevonden overeenkomst met de betrekking tusschen homoneure soorten, tevens afwijking van de interindividueele betrekking, op te sporen is het, in de eerste plaats noodig, te onderzoeken of die overeenkomst en die afwijking *algemeen* is, en verder, *hoe* het sexueel verschil der lichaamsgrootte invloed kan hebben op de hoeveelheid der hersenen.

Wat het eerste punt betreft, heeft LAPICQUE, reeds in 1907, nagegaan of bij gewone Rat (Mus norvegicus Erxl.) en de Huismusch (Passer domesticus L.) de mannelijke sekse een overmaat van lichaamsmassa en van hersenmassa boven de vrouwelijke sekse bezit, zooals bij den Mensch [2]). Hij vond dit bij beide soorten, het minst duidelijk bij de Rat. Van 15 volwassen mannetjes musschen en 13 volwassen wijfjes musschen waren de gemiddelde lichaamsgewichten 30.8 en 28.7 gram en de gemiddelde hersengewichten 994 en 959 milligram, waaruit een relatie-exponent 0.5077 te berekenen is [3]). Gegeven evenwel de geringe verschillen der gemiddelde gewichten, welke LAPICQUE zelf (p. 747) slechts „approximatives" noemt, en daarbij betrekkelijk groote individueele afwijkingen, kan aan deze uitkomst niet veel waarde worden toegekend. Het lichaamsgewicht varieerde bij de mannelijke musschen van 28.61 tot 33 gram, bij de vrouwelijke van 26.30 tot 31.10 gram; het hersengewicht bij de mannetjes van 825 tot 1080 milligram en bij de wijfjes van 900 tot 1110 milligram! Tot een betrekking van het hersengewicht en het lichaamsgewicht, tusschen de twee seksen, van soortgelijken aard als bij den Mensch, kan hieruit zeker niet besloten worden; waartoe LAPICQUE zich dan ook niet gerechtigd acht. Het is overigens welbekend, dat bij de Musch sexueel verschil in lichaamsgrootte, zoo het al bestaat, slechts in zeer beperkte mate voorhanden is. Hetzelfde is het geval met den Boomkwartel (Colinus virginianus L.),

---

[1]) Ook ik heb hier iets goed te maken, daar ik vroeger (deze Verslagen, Deel 22 (1913), p. 605) ten onrechte aannam, dat deze betrekking algemeen bij de Gewervelde Dieren dezelfde zoude zijn als bij den Mensch.

[2]) LOUIS LAPICQUE, Différence sexuelle dans le poids de l'encéphale chez les animaux: Rat et Moineau. Comptes rendus de la Société de Biologie. Tome 63 (1907), Séance du 21 décembre, p 746—748

[3]) Naar de aldaar herhaaldelijk aangegeven gemiddelde gewichten van $P$ en $E$ in de twee seksen. Er staat (p. 748), als uitkomst dezer berekening, abusievelijk 0,57.

bij welke hoendersoort HRDLICKA lichaamsgewichten en hersengewichten van 7 volwassen hanen en 9 volwassen hennen bepaalde [1]). De gemiddelden zijn 124.1 gram lichaamsgewicht en 1.223 gram hersengewicht voor de hanen en 123 gram lichaamsgewicht en 1.242 gram hersengewicht voor de hennen. Hieruit kan men tot gelijkheid der seksen, in beide opzichten, besluiten.

Belangrijk sexueel verschil in lichaamsgrootte bestaat daarentegen bij het Huishoen. In welke hoeveelheidsbetrekking staat hier, tusschen de twee seksen, de massa der hersenen tot die van het lichaam?

Zorgvuldige gewichtsbepalingen bij een volwassen haan en een volwassen kip door FALCK [2]) en bij een volwassen haan door WELCKER [3]) leeren als volgt.

Van den voor zijn ras buitengewoon grooten haan van FALCK was het lichaamsgewicht (zonder „ballast") 1745.67 gram, het hersengewicht 3.82 gram, van de kip het (netto) lichaamsgewicht 985.15 en het hersengewicht 3.36 gram. Men vindt hieruit een relatie-exponent 0.2248. Door vergelijking van dezelfde kip met den meer middelmatigen haan van WELCKER, die een „Reingewicht" had van 1445.7 gram en 3.7 gram hersenen bezat, verkrijgt men een relatie-exponent 0.2513.

Gegeven de betrekkelijk veel grooter verschillen der hersengewichten tusschen de twee seksen, hebben deze uitkomsten reeds op zich zelf meer beteekenis dan die welke LAPICQUE bij de Musch verkreeg. Wel vond ik tusschen een bijna volwassen (ruim halfjarigen) haan van het Leghorn-ras en een geheel volwassen (tweejarige) kip van hetzelfde, doch niet geheel zuiver ras, bij (netto) lichaamsgewichten van 1803 en 1197 gram (met ontledigde krop en maag) en hersengewichten van 3.75 en 3.12 gram, een relatie-exponent 0.4490. Aangezien echter deze haan niet volkomen volwassen en aldus voor zijn hersengewicht te licht was, blijkt toch ook hier de intersexueele relatie-exponent bij het Huishoen slechts half zoo groot als bij den Mensch te zijn [4]).

Dit is in overeenstemming met hetgeen bij verschillende zoogdiersoorten gevonden wordt. Vergelijkt men in de serie der honden bij

[1]) A. HRDLICKA, Brain Weight in Vertebrates. Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 48. Publication N⁰. 1574. Washington 1905, p. 106.

[2]) C. PH. FALCK, Beiträge zur Kenntniss der Bildungs- und Wachsthumsgeschichte der Thierkörper. Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Band 8. Marburg 1857, p. 165—249, (p. 142).

[3]) R. WELCKER—A. BRANDT, Gewichtswerthe der Körperorgane bei dem Menschen und den Thieren. Archiv für Anthropologie, Band 28. Braunschweig 1902, p. 53.

[4]) Zie onder, p. 727.

Max Weber [1]) de 7 grootste mannelijke, die 12040 tot 53000 gram, gemiddeld 27503 gram wegen en 70 tot 123, gemiddeld 100 gram hersenen bezitten, met de 7 kleinste vrouwelijke honden, die 6000 tot 14250 gram, gemiddeld 8908 gram zwaar zijn en 64 tot 86, gemiddeld 77 gram hersenen bezitten, dan verkrijgt men een relatie-exponent 0.2318; dat is volkomen de interindividueele, bij gelijke sekse, tusschen honden ook door Lapicque bepaalde exponent.

Onder de 157 honden bij Richet [2]) zijn er twintig als vrouwelijk aangegeven. Mogelijk schuilen onder de overige honden ook nog *enkele* vrouwelijke, niet als zoodanig aangeduid; dit kan voor ons doel weinig hinderen. Vergelijkt men die twintig vrouwelijke honden met een gelijk getal mannelijke, welker lichaamsgewichten zoo dicht mogelijk bij de vrouwelijke gelegen zijn, terwijl die gewichten voor beide seksen gezamenlijk uiteenloopen van 5 tot 37 kilogram en de hersengewichten van 53 tot 125 gram, tien aan tien met elkander, dan vindt men:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tusschen | de | grootste | ♂ | en | de | kleinste | ♀ | een relatie-exponent | 0.3287 |
| ,, | ,, | ,, | ♂ | ,, | ,, | ,, | ♂ | ,, ,, | 0.3374 |
| ,, | ,, | ,, | ♀ | ,, | ,, | ,, | ♂ | ,, ,, | 0.2988 |
| ,, | ,, | ,, | ♀ | ,, | ,, | ,, | ♀ | ,, ,, | 0.2899 |

Het is duidelijk, dat hier de discontinuiteit bij den overgang van de eene tot de andere sekse, die bij den mensch zoo in het oog loopend is, niet bestaat.

Van vijf huiskatten, bij Wilder [3]), hebben drie mannelijke gemiddeld 3284 gram lichaamsgewicht en 29 gram hersengewicht, twee vrouwelijke gemiddeld 2410 gram lichaamsgewicht en 27 gram hersengewicht, waaruit een relatie-exponent 0.2310 te berekenen is.

Twee stieren en zes koeien bij Lapicque [4]), met gemiddelde lichaamsgewichten van 540 en 397 kilogram en gemiddelde hersengewichten van 480 en 429 gram geven 0.3650; twee rammen en drie schapen aldaar, met lichaamsgewichten van 55 en 50 en hersengewichten van 140 en 125 gram, geven 0.2064. Ook de eerst-

---

[1]) Max Weber, Vorstudien über das Hirngewicht der Säugethiere. Festschrift für Carl Gegenbaur. Leipzig 1896, p. 111—112.

[2]) Charles Richet, Poids du cerveau, de la rate et du foie, chez les chiens de différentes tailles. Comptes rendus de la Société de Biologie de Paris, T. 3, 9me Série Paris 1891, p. 405—415.

[3]) B. G. Wilder, Cerebral Variation in Domestic Dogs Proceedings of the American Association for the Advancement of Science, 22nd Meeting (1873). Salem 1874, p. 238.

[4]) Bulletins et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris. Séance du 6 juin 1907, p. 335—336

genoemde waarde van den intersexueelen relatie-exponent ligt nog veel dichter bij 0.28 dan bij 0.56.

Moge ook het aantal der vergeleken individuen gering zijn, gezamenlijk zijn deze vergelijkingen toch wel voldoende om te bewijzen dat er twee verschillende verhoudingen der hersengewichten tot de lichaamsgewichten tusschen de twee seksen bestaan.

Bij niet weinig, waarschijnlijk bij de allermeeste soorten bestaat sexueel dimorphisme in dit opzicht *niet*, zelfs waar men het, naar het uitwendig verschil in lichaamsgrootte, wel verwachten zou, zooals bij het Rund en het Hoen. Bij die soorten, welke in de grootte van het lichaam geen sexueel dimorphisme vertoonen is dit in het hersengewicht dan wel nog minder te verwachten. Van 16 mannelijke Eekhoorns (Sciurus vulgaris L.) vond ik het lichaamsgewicht gemiddeld 331 gram en van 15, in dezelfde streek gedoode vrouwelijke eekhoorns gemiddeld 326 gram. Zooveel is nu ook aan de nog niet talrijke bepalingen van het hersengewicht wel reeds te zien, dat bij deze soort zeker *niet* de grootere relatie-exponent tusschen de seksen geldt.

Bij den Mensch, daarentegen, beantwoordt aan het opvallend uiterlijk sexueel dimorphisme der lichaamsgrootte ook het belangrijk inwendig dimorphisme der hersenhoeveelheid, dat in den tweemaal grooteren relatie-exponent tot uitdrukking komt; de man heeft naar verhouding van het lichaamsgewicht onevenredig grooter hersenhoeveelheid dan de vrouw. Van buitengewoon groote beteekenis is nu het feit, dat eene javaansche apensoort, de Boedeng, *Semnopithecus maurus* F. Cuv. (incl. *pyrrhus* Horsf.), naar bepalingen door Kohlbrugge[1]) der lichaams- en hersengewichten van een aantal in den natuurstaat gedoode mannelijke en vrouwelijke dieren, hierin geheel met den Mensch overeenstemt. Met enkele woorden maakte ik hiervan reeds in 1913 gewag[2]). Waarschijnlijk is dat sexueel dimorphisme in de hoeveelheid der hersenen, van gelijken aard en grootte als bij den Mensch, een algemeene eigenschap van de Apen, althans van die der Oude Wereld, want algemeen vertoonen deze aanzienlijke sexueele verschillen in lichaamsgrootte, de Anthropoieden zelfs nog opvallender dan de Mensch, waarmede bij dezen laatste het dimorphisme der hersenhoeveelheid samengaat.

De door Kohlbrugge bij de genoemde soort bepaalde waarden van

---

1) J. H. F. Kohlbrugge, Mittheilungen über die Länge und Schwere einiger Organe bei Primaten. Zeitschrift für Morphologie und Anthropologie, Bd. II. Stuttgart 1900, p. 54.

2) Deze Verslagen, Deel 22, p. 605.

*P* en *E*, welke voor de berekening van een intersexueelen exponent dienst kunnen doen, geef ik in Tabel I volledig weder, opdat naast de gemiddelden ook de individueele waarden kunnen beoordeeld worden.

TABEL I. — Lichaamsgewicht en hersengewicht van *Semnopithecus maurus* F. Cuv. (Bepalingen op Java door J. H. F. KOHLBRUGGE).

| 6 volwassen ♂ | | | 12 volwassen ♀ | | | 4 volwassen of bijna volwassen (*) ♂ *E*, in grammen | 7 volwassen of bijna volwassen (*) ♀ *E*, in grammen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nummer. | Lengte, van neus-punt tot anus, in c.M. | *P*, in grammen | Nummer. | Lengte, van neus-punt tot anus, in c.M. | *P*, in grammen | | |
| 18 | 66 | 16500 | 3 | 65 | 12500 | 81.7* | 76 |
| 13 | 68 | 10000 | 6 | 64 | 12000 | 81 | 76* |
| 16 | 64 | 8750 | 29 | — | 7500 | 78 | 73* |
| 14 | 67 | 8100 | 4 | 64 | 6970 | 71 | 68 |
| 17 | 64 | 7500 | 5 | 64 | 6900 | | 66 |
| 15 | 65 | 7000 | 32 | 64 | 6900 | | 66 †) |
| | | | 1 | 67 | 6800 | | 57.5 |
| | | | 2 | 66 | 6500 | | |
| | | | 7 | 64 | 6240 | | |
| | | | 30 | 61 | 6100 | | |
| | | | 31 | 64 | 6000 | | |
| | | | — | 61 †) | 6100 †) | | |
| Gem. | 65.7 | 9642 | Gem. | 64 | 7542.5 | Gem. 77.93 | Gem. 68.93 |

Een enkel, bijzonder laag lichaamsgewicht, 3600 gram bij een vrouwelijk individu (N°. 11 van KOHLBRUGGE) heb ik weggelaten, daar geen overeenkomstig laag lichaamsgewicht van een mannelijk individu er tegenover staat. De variatiecurven zijn nu, voor beide seksen, naar denzelfden kant eenzijdig en aldus vergelijkbaar. Daarentegen is in deze en de volgende tabel nog een (ongenummerd) vrouwelijk individu †) opgenomen, dat niet onder de opgaven van KOHLBRUGGE voorkomt, en waarvan deze op den dag der bepaling (in 1897) mij de gegevens vriendelijk had toegezonden. Onder de hersengewichten zijn ook drie bepalingen van bijna volwassen (in de periode van tandwisseling verkeerende) individuen opgenomen,

daar deze hersenen zeker als geheel volwassen kunnen beschouwd worden [1]).

Men verkrijgt nu deze uitkomst:

$$(\log 77.93 - \log 68.93) : (\log 9642 - \log 7542.5) = \mathbf{0.5006}$$

Door vergelijking der gemiddelde gewichten van het lichaam en de hersenen van drie volwassen mannelijke met die van vier volwassen vrouwelijke dieren, opgenomen in Tabel II, vindt men een relatie-exponent **0.5248**.

TABEL II. — Lichaamsgewicht en hersengewicht van *Semnopithecus maurus* F. Cuv. (Grammen)

| 3 volwassen ♂ | | | 4 volwassen ♀ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *P.* | *E.* | | *P.* | *E.* |
| N⁰. 18 | 16500 | 78 | N⁰. 3 | 12500 | 76 |
| „ 14 | 8100 | 81 | „ 4 | 6970 | 57.5 |
| „ 15 | 7000 | 71 | „ 5 | 6900 | 68 |
| | | | — | 6100 | 66 |
| Gem. | 10533 | 76.7 | Gem. | 8117.5 | 66.9 |

Voor deze Apensoort geldt dus ongetwijfeld, tusschen de seksen, een geheel andere wet van de verhouding van het hersengewicht tot het lichaamsgewicht dan voor de andere besproken diersoorten, en wel dezelfde als voor den Mensch.

Het ligt voor de hand, dat deze afwijking, ten opzichte van vele andere diersoorten, niet alleen berust op het verschil in lichaamsgrootte tusschen de twee seksen, want dan moest zij veel algemeener en o.a. ook bij het Rund en het Hoen te vinden zijn. Er moet nog iets bij dat quantitatief verschil in lichaamsgewicht komen, en dit kan niet anders zijn dan een *qualitatief* verschil, in tegenstelling ook met twee homoneure soorten, welker lichaamsmassa alleen wat de hoeveelheid betreft onderscheiden is.

Als echte secundaire geslachtskenmerken van qualitatieven aard nu zijn de volgende welbekend. In alle menschenrassen heeft de vrouw betrekkelijk langer romp en korter ledematen, breeder heupen, smaller schouders, inwendig een onevenredig lichter gebouwd skelet

---

[1]) J. H. F. Kohlbrugge, l.c., p. 48: „Bei Semnopithecus erreicht das Gehirn so frühzeitig sein Maximalgewicht dass es schon bei Säuglingen dem erwachsener Thiere ganz nahe steht".

en minder krachtige muskulatuur, daarentegen in de huid een meer ontwikkelde vetlaag, welke de vormen afrondt. Aldus beteekenen gelijke gewichtshoeveelheden niet hetzelfde in beide seksen. Vooral maakt bij de vrouw de muskulatuur een geringer deel van het lichaamsgewicht uit, des te minder nog omdat de beenen en armen, waartoe in beide seksen het viervijfde deel van de geheele muskulatuur behoort (bij den man nog iets meer), bij de vrouw ook nog korter zijn.

Het kleiner spiergehalte nu van het vrouwelijk lichaam moet noodzakelijk samenhangen met, *ten opzichte van het lichaamsgewicht*, onevenredig geringer grootte in het zenuwstelsel. Waar het dus op aankomt is, na te gaan of de, in vergelijking met andere zoogdieren, geringe hoeveelheid der hersenen, naar evenredigheid van het lichaamsgewicht, in de vrouwelijke sekse, beantwoordt aan de onevenredig geringe ontwikkeling der muskulatuur.

Dit blijkt inderdaad het geval te zijn; *naar evenredigheid van de spiermassa* is, tusschen de twee seksen bij den Mensch, de verhouding der hersenhoeveelheid dezelfde als tusschen de twee seksen bij alle andere diersoorten en tusschen individuen van gelijke sekse. Het sexueel dimorphisme der hersenhoeveelheid van den Mensch en zeker wel vele Apen bestaat alleen met betrekking tot het lichaamsgewicht. Bij de meeste diersoorten, mogen zij uitwendig sexueel dimorph zijn of niet, ontbreekt cerebraal dimorphisme, ook met betrekking tot het lichaamsgewicht, waarschijnlijk zelfs bij de Robben, al zijn van sommige soorten dezer orde de mannetjes gemiddeld drie-, viermaal zwaarder dan de wijfjes.

De beste gegevens, waarover wij aangaande het spiergehalte van het mannelijk en het vrouwelijk lichaam beschikken, zijn van FRIEDRICH WILHELM THEILE en van HERMANN WELCKER, eerst na hun dood bekend gemaakt, van dezen door A. BRANDT [1]), van genen door W. HIS [2]).

THEILE heeft zich door zijne, met pijnlijke nauwkeurigheid verrichte gewichtsbepalingen der afzonderlijke spieren van een aanzienlijk getal mannelijke en vrouwelijke lijken van volwassenen en kinderen een onvergankelijk gedenkteeken gesticht. Voor ons doel wordt hunne waarde iets beperkt, doordien meestal de lichaamsgewichten der volwassenen niet bepaald werden. Dit is wel het geval bij WELCKER.

[1]) WELCKER—BRANDT, l.c., p. 38—40.

[2]) F. W. THEILE, Gewichtsbestimmungen zur Entwickelung des Muskelsystems und des Skelettes beim Menschen. Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol.-Deutschen Akademie der Naturforscher. Band 46, N°. 3, Halle 1884. p. 133—471.

In tabel III heb ik de gegevens van WELCKER, in zoover ze betrekking hebben op het spiergewicht, alle overgenomen, behalve de vrouw N°. 3. Deze bepalingen bij WELCKER betreffen meest gezonde mannen en vrouwen, door een plotselingen dood gestorven. Behalve I. 5 en III. 4, die aan BISCHOFF's „Hirngewicht des Menschen" ontleend zijn, werden ze door hem en door andere onderzoekers verricht en elders niet of op niet meer toegankelijke plaatsen bekend gemaakt.

TABEL III. Lichaamsgewicht en spiergewicht van 10 mannen en 3 vrouwen (Ontleend aan Tabellen I tot III, p. 38 tot 40, in WELCKER-BRANDT, Gewichtswerthe der Körperorgane bei dem Menschen und den Thieren)

| | Nummer | Leeftijd, in jaren | Lengte, in c.M. | Lichaams-gewicht, *P*, in grammen | Spierge-wicht, *M*, in grammen | Relatief spiergewicht, in % van *P* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mannen | I. 1 | — | 157 | 46870 | 21451 | 45.77 | |
| | „ 2 | waarschijnl. onder 50 | 165 | 53714 | 25156 | 46.83 | |
| | „ 3 | ca. 26 | 184 | 61267 | 26563 | 43.35 | |
| | „ 4 | 50 | 176 | 65050 | 28017 | 43.07 | |
| | „ 5 | 33 | 168 | 69668 | 29102 | 41.77 | |
| | II. 1 | 36 | 163 | 50500 | 18484 | 36.60 | |
| | „ 2 | — | 163 | 54000 | 16625 | 30.79 | door oedeem betrekkelijk hooge *P* |
| | „ 3 | — | 168 | 56330 | 23467 | 41.66 | |
| | „ 4 | — | 172 | 61500 | 25594 | 41.62 | |
| | „ 5 | 42 | 172 | 65250 | 30574 | 46.86 | |
| | Gemiddeld | — | **168.8** | **58415** | **24503** | **41.95** | |
| Vrouwen | III. 1 | 61 | 153 | 44000 | 14776 | 33.58 | |
| | „ 2 | 55 | 160 | 47000 | 15625 | 33.24 | |
| | „ 4 [1]) | 22 | 159 | 55400 | 19846 | 35.82 | |
| | Gemiddeld | — | **157.3** | **44800** | **16749** | **34.32** | |

De spiergewichten zijn in deze tabel meestal gering voor de

[1]) Vrouw N°. 3 hier weggelaten: „Diese Bestimmungen" (nl. nog eene van een pasgeboren kind) „falls sie sich überhaupt auf normale Körper beziehen, schliessen erhebliche Fehler in sich". (l.c., p. 14).

lichaamslengten, hetgeen wel daaraan moet worden toegeschreven, dat de meeste onderzochte mannen en vrouwen toch voor hun dood het normale gewicht niet bezaten. Volgens deze en de volgende tabel is het spier*gehalte* in iedere sekse evenwel, uitzonderingen daargelaten, een weinig veranderlijke eigenschap, ook niet met hoogeren leeftijd. Van een zoo op den voorgrond staand orgaanstelsel als de musknlatuur, welke, wat de hoeveelheid betreft, voor ongeveer een derde van het gewicht aan de samenstelling van het lichaam deelneemt, en welker ontwikkeling nauw samenhangt met die van andere deelen der massa van het lichaam, zooals het skelet en vele andere, is dit wel niet anders te verwachten.

Het sexueele verschil in het relatief spiergewicht krijgt hierdoor nog grooter beteekenis. Dit is zeer aanzienlijk. Niet minder dan ruim **22**%, in verhouding tot gelijk lichaamsgewicht, is de man, volgens deze gewichtsbepalingen, meer gespierd dan de vrouw.

Het is zeer te betreuren, dat bij de overigens bijzonder zorgvuldige gewichtsbepalingen der spieren door Theile, die ik overneem in tabel IV, slechts in een enkel geval het lichaamsgewicht genoteerd kon worden. Theile zelf berekent de gemiddelde relatieve spiergewichten door eenvoudig voor zijne krachtige mannen, zelfmoordenaars of aan een acute ziekte gestorven, een gemiddeld lichaamsgewicht van 68 kilogram (voor 8 individuen), voor zijne (4) krachtige, aan acute ziekten gestorven vrouwen, gemiddeld 54 kilogram aan te nemen, en vindt dan (p. 223): „Die Gesammtmuskulatur des erwachsenen kräftigen Weibes scheint also durchschnittlich noch nicht ein Drittel des Körpergewichts zu erreichen, während sie beim erwachsenen kräftigen Manne durchschnittlich mehr als ein Drittel des Körpergewichts beträgt". Ik meen de werkelijke gewichten nog iets beter te kunnen benaderen door de individueele lengten en wat verder van ieder individu beschreven wordt voor de schatting der gewichten in aanmerking te nemen. Het getal der voor mijn doel dienstige bepalingen wordt dan beperkt tot 4 mannen en 4 vrouwen. De man N°. 8 van Theile is in tabel IV niet opgenomen, wegens zijn, in vergelijking met de andere mannen en vrouwen, hoogen leeftijd van 54 jaar. Zijn gewicht, bij een lichaamslengte van 160.2 cM., op 57 kilogram schattend, vindt men voor dezen 38% spiergewicht.

Blijkens de gemiddelde lichaamslengten zijn de mannen kleiner, de vrouwen grooter dan het algemeen gemiddelde. Ongetwijfeld heeft Theile het gewicht der eersten overschat, dat der vrouwen daarentegen onderschat; in zijn tijd stonden nog niet zooveel gegevens daarvoor in de literatuur ter beschikking als tegenwoordig.

In tabel IV is het gemiddeld relatief spiergewicht der vrouwen

TABEL IV. — Lichaamsgewicht en spiergewicht van 4 mannen en 4 vrouwen (Naar bepalingen van F. W. Theile. De lichaamsgewichten, behalve van N⁰. 3, door mij geschat)

| Sekse | Nummer | Leeftijd, in jaren | Lengte, in c.M. | Lichaams-gewicht, *P*, in grammen | Spiergewicht, *M*, in grammen | | | Relatief spiergewicht in % van *P* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Rechts | Links | Totaal | | |
| Mannen | 1 | 24 | 167.2 | 62000 | 12033.8 | 11866.5 | 23900.3 | 38.55 | |
| | 2 | 24 à 26 | 167.2 | 66000 | 12825.4 | 12735.0 | 25560.4 | 38.73 | |
| | 3 | 26 | 165.1 | 64000 | 14608.0 | 14308.2 | 28916.2 | 45.19 | „mit stro[…] voller Mu[…] tur" *P* r[…] streeks be[…] |
| | 5 | 35 | 162.4 | 59000 | 10718.0 | bijgeschat | 21300.0 | 36.10 | |
| | Gemiddeld | — | 165.5 | 62750 | 12546.3 | 12372.9 | 24919.2 | 39.64 | |
| Vrouwen | 13 | 22 | 162.4 | 62000 | — | 9261.6 | berekend als het dubbele der bepaalde lichaamshelft | 29.88 | bijzonder ve[…] |
| | 14 | 22 | 148.9 | 50000 | — | 7388.1 | | 29.55 | krachtig lich[…] |
| | 15 | 35 | 161.1 | 56000 | — | 8041.5 | | 28.72 | „mässig entw[…] te Muskulatu[…] |
| | 16 | 44 | 163.3 | 62000 | 9549.3 | — | | 30.80 | „stark knoch[…] „kräftige Mu[…]" |
| | Gemiddeld | — | 158.9 | 57500 | — | — | — | 29.74 | |

iets te laag berekend, doordien in twee gevallen het totale spiergewicht op het dubbele van dat der *linker* zijde werd gesteld, zonder dat andere gevallen, waarbij de *rechter* zijde verdubbeld werd, daartegenover staan. Stelt men deswege het relatieve spiergewicht op **30**%, dan zal dit het werkelijk gemiddelde der onderzochte vrouwen, indien hare lichaamsgewichten goed geschat zijn, wel zeer nabij komen. Het gemiddeld relatief spiergewicht der mannen moet daarentegen als iets te hoog beschouwd worden, doordien een van de vier mannen abnormaal sterk gespierd was. Men zal deswege het gemiddeld spiergehalte der mannen, voor zoover dit bij zulk een schatting der lichaamsgewichten te benaderen is, op **38**% kunnen stellen, hetgeen per eenheid van lichaamsgewicht bijna **27**% meer is dan dat der vrouwen.

Op enkele uitzonderingen na, zijn de relatieve spiergewichten bij Theile lager dan bij Welcker. Dit ligt gedeeltelijk daaraan, dat de lichaamsgewichten bij Welcker in het algemeen voor de lichaamslengten laag zijn, maar nog meer wel aan een andere omstandigheid. De spiergewichten bij Welcker werden namelijk, behalve die van II. 1 en II. 5, *indirect* bepaald, met zeker noodzakelijk overwicht,

wegens verlies der van het lichaamsgewicht afgetrokken gewichten der overige organen; THEILE, daarentegen bepaalde de *directe* spiergewichten, bij welke langdurige manipulaties eenig gewichtsverlies, in ieder geval door verdamping, onvermijdelijk is.

Daar evenwel deze afwijkingen gelijkelijk voor beide seksen gelden, wordt de *verhouding* tusschen deze stellig daardoor maar weinig veranderd. De man III.5 van WELCKER is wel een buitengewoon krachtig individu geweest, evenals N°. 3 van THEILE, maar tegenover de hooge waarde van III.5 staan de lage waarden van II.1 en II.2.

*Tweeëntwintig percent*, volgens de eene, *zevenentwintig percent*, volgens de andere reeks van bepalingen, is dus de Man, per eenheid van lichaamsgewicht, meer gespierd dan de Vrouw. Het behoeft geen betoog, dat deze uitkomsten, zelfs afgezien van de onzekerheid der bedoelde schattingen, als berustend op een gering aantal waarnemingen, nog eenigermate van het algemeene gemiddelde kunnen afwijken.

Ook aangaande de gemiddelde lichaamsgewichten van den europeeschen Man en de europeesche Vrouw verkeert men nog niet in den staat van volstrekte zekerheid. Maar stelt men met LAPICQUE deze gemiddelden op 66 en 54 kilogram, dan vindt men, dat deze waarden nauwkeurig in dezelfde verhouding tot elkander staan als de gemiddelde relatieve spiergewichten volgens de bepalingen bij THEILE. Inderdaad is $\frac{66}{54} = 1.22222$ en $\frac{41.95}{34.32} = 1.22280$.

Heeft dus het mannelijk lichaam, per gewichtseenheid, 22 °/₀ meer spiermassa dan het vrouwelijk lichaam, in dezelfde verhouding is het gewicht van het eerste bovendien absoluut grooter dan het laatste.

RUDOLF MARTIN neemt in zijn voortreffelijk leerboek der anthropologie [1]) voor de gemiddelde gewichten van de Europeesche Vrouw 52 kilogram en van den Europeeschen Man 65 kilogram, dat is 25 °/₀ meer, aan. Deze verhouding nadert meer die van de gemiddelde relatieve spiergewichten, berekend uit de door THEILE bepaalde gewichtswaarden.

Men kan derhalve wel veilig aannemen, dat, bij den Mensch, het mannelijk lichaam in dezelfde verhouding hooger spiergehalte heeft dan het vrouwelijk lichaam als het eerste reeds meer gewicht bezit dan het laatste. Met andere woorden, *Tusschen de Vrouw en den Man verandert het absolute spiergewicht evenredig met het kwadraat van het lichaamsgewicht.*

Dit verklaart nu, dat van de Vrouw tot den Man, het hersen-

---

[1]) R. MARTIN, Lehrbuch der Anthropologie in systematischer Darstellung. Jena 1914, p. 237.

gewicht, in functie van het lichaamsgewicht, toeneemt evenredig aan het kwadraat der toeneming van het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, tusschen de twee seksen van de meeste andere soorten, namelijk evenredig aan $P^{0.56}$ tusschen de Vrouw en den Man, en evenredig aan $P^{0.28}$ tusschen de twee seksen der meeste andere diersoorten.

Berekent men inderdaad den relatie-exponent van het hersengewicht, tusschen de Vrouw en den Man, niet naar het gemiddeld lichaamsgewicht, doch naar het absolute gemiddelde *spiergewicht*, dan vindt men dezen gelijk aan den relatie-exponent van het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, tusschen de individuen van eene zelfde diersoort, namelijk ongeveer **0.28**, in plaats van **0.56**.

Directe gegevens omtrent de spierverhoudingen tusschen individuen van gelijke sekse eener zelfde soort, tusschen de twee seksen en tusschen verschillende homoneure soorten staan weinig ter beschikking. Uit de bepalingen der spiergewichten bij den Mensch, van WELCKER en THEILE, wordt wel reeds duidelijk, dat de spiermassa tusschen individuen van gelijke sekse evenredig met het lichaamsgewicht verandert.

Van twee bijna volwassen taksen, uit hetzelfde nest, bij FALCK [1]), had de iets ouder en zwaarder vrouwelijke iets hooger spiergehalte (hetwelk met den leeftijd, in beide seksen, snel toeneemt) dan de mannelijke. Hoewel van de albino-Rat (Mus norvegicus Erxl.) het volwassen mannetje gemiddeld ongeveer 300 gram weegt, tegen het wijfje ongeveer 250 gram, staan beide gelijk in gespierdheid, te oordeelen naar de bepalingen van JACKSON en LOWREY [2]) bij onvolwassen dieren. Zes mannetjes van 150 dagen, die gemiddeld wogen 218.7 gram, waarvan 93.38 gram spiergewicht, vergelijkend met zeven wijfjes van denzelfden ouderdom, die gemiddeld 154.8 gram wogen en 65.94 gram spiergewicht bezaten, vindt men 42.7 °/₀ spiergehalte voor de mannetjes en 42.6 °/₀ voor de wijfjes. Bij vier mannelijke albino-ratten (Mus norvegicus Erxl.), van 365 dagen, die gemiddeld 260.2 gram wogen, was het gemiddeld spiergehalte 46.5 °/₀, en twee vrouwelijke, die gemiddeld 183.5 gram wogen, hadden 43.3 °/₀ spiergehalte. Berekend naar de door WELCKER opgegeven absolute spiergewichten 761.8 en 517.1 gram [3]), bestond tusschen

---

[1]) C. PH. FALCK, Beiträge zur Kenntniss der Wachsthumsgeschichte des Thierkörpers. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie (VIRCHOW), Band VII. Berlin 1854, d. 37 – 75.

[2]) H. H. DONALDSON, The Rat. Philadelphia 1915, p. 76.

[3] WELCKER—BRANDT, l.c., p. 53. — Het spiergewicht der kip van FALCK door

den haan van 1445.7 gram en de kip van 985.1 gram lichaamsgewicht gelijkheid van spiergehalte (nl. 52.7 en 52.5 %). Bij den bovenbedoelden, bijna volwassen haan vond ik voor het gezamenlijk gewicht der drie linker en drie rechter borstspieren 213.9 gram of 11.9 % van het lichaamsgewicht; bij de geheel volwassen kip 174.6 gram of 14.6 % van het lichaamsgewicht! In ongeveer dezelfde verhouding overtroffen de spieren van het onderbeen der kip die van den haan. Berekent men het lichaamsgewicht van den haan bij gelijk spiergehalte als de kip, dan wordt de relatie-exponent 0.2984. Een volwassen mannelijke en een volwassen vrouwelijke hagedis (Lacerta agilis L.), bij WELCKER [1]), hebben ongeveer gelijk spiergehalte; ook een mannelijke en een vrouwelijke Landsalamander (Salamandra maculosa Laur.), aldaar [2]).

Maar zulk een evenredigheid van lichaamsgewicht en spiergewicht, tusschen individuen van eene zelfde soort en gelijke sekse, zoowel als tusschen de twee seksen, mag men zeker aannemen, indien deze evenredigheid ook tusschen homoneure soorten bestaat.

Kostbare gegevens deed ons hieromtrent aan de hand A. MAGNAN [3]). Uit de waarden, die hij voor de gemiddelde relatieve gewichten van den musculus coraco-brachialis (welke spier den vleugel oplicht) in verschillende orden der Vogels geeft (p. 126), blijkt, over het geheel genomen, reeds evenredigheid met het lichaamsgewicht. Maar het komt mij voor van belang te zijn, dit ook na te gaan bij den 5 tot 10 maal zwaarderen musculus pectoralis major. Deze machtige spier werkt, door den vleugel neer te drukken, meer rechtstreeks locomotorisch, en is quantitatief zeer verschillend ontwikkeld in de verschillende orden, het meest bij de Hoenderachtigen en Duiven, die overwegend roeiend vliegen (vol ramé), het minst bij de Grijpvogels en de Uilen, die meest de zwevende vlucht beoefenen (vol plané), weinig ook bij de zwemvliespootige zeevogels, die zeer veel zeilend vliegen (vol à voile). In verband daarmede staan in hun ontwikkeling het vleugelvlak en de massa der voornaamste vliegspier, de musculus pectoralis major, in omgekeerde orde tot elkander. Om alleen de uitersten te noemen, hebben de Grijpvogels gemiddeld

---

WELCKER gecorrigeerd. Onder deze spiergewichten is, bij den haan en de kip, ook een bepaald gedeelte van het skelet begrepen.

1) L.c., p. 55.

2) L.c., p.. 57

3) A. MAGNAN, Relation chez les Oiseaux entre le poids de leurs muscles pectoraux et leur manière de voler. Bulletin du Muséum national d'Histoire naturelle. Année 1913, N'. 1, Paris 1913, p. 40—52. Les muscles releveurs de l'aile chez les Oiseaux. Ibid., N⁰. 2, p. 126—128.

meer dan het dubbele vleugelvlak van de Hoenderachtigen, maar ook een slechts half zoo veel wegende musculus pectoralis major Voor ons doel is het intusschen wel noodig te weten of ook het gewicht van laatstgenoemde spier, onder overigens gelijke omstandigheden, evenredig is aan het lichaamsgewicht. Blijkt dit inderdaad het geval te zijn, dan mag veilig besloten worden, dat het voor de geheele muskulatuur geldt en dan ook bij andere Vertebraten. Men moet dus alleen Vogels van dezelfde orde, en die ook overigens zooveel mogelijk in vorm en wijze van vliegen overeenstemmen, met elkander vergelijken, daar, wegens het aanwezig zijn van twee tegengesteld werkende factoren: grootte van het vleugelvlak en ontwikkeling der spier, afwijkingen van deze eerste, ook binnen eene zelfde orde, onmiddellijk groote beteekenis voor de laatste erlangen. In nevenstaande tabel V heb ik nu, naar de bepalingen van MAGNAN, voor 10 paren, gevormd uit 20 vogelsoorten, die twee aan twee, hoewel in grootte verschillend, zooveel mogelijk elkander gelijken, in lichaamsvorm en wijze van vliegen, berekend: het relatief

TABEL V. — Relatieve gewichten van het lichaam (*P*), den musculus pectoralis major (*Mp*) en den musculus coracobrachialis (*Mc*), en relatieve oppervlakken van het lichaam (*S*) en de vleugels (*A*) bij 10 paren, gevormd uit 20 soorten, van Vogels. (Berekend naar de bepalingen van A. MAGNAN)

| | *P* | *Mp* | *S* ($P^2/_3$) | *A* | *P* | *Mc* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Buizerd (Buteo vulgaris Leach) — Torenvalk (Tinnunculus alaudarius Gm.) | 4.715 | 4.812 | 2.812 | 3.235 | 5.862 | 4.568 |
| 2. Mantelmeeuw (Larus marinus L.) — Kokmeeuw (Larus ridibundus L.) | 8.025 | 9.115 | 4.008 | 3.158 | 7.285 | 8.781 |
| 3. Zilvermeeuw (Larus argentatus Brunn.) — Vischdiefje (Sterna hirundo L.) | 6.566 | 6.471 | 3.506 | 3.470 | 6.860 | 6.760 |
| 4. Bonte Kraai (Corvus cornix L.) — Meerkol (Garrulus glandularius L.) | 3.140 | 3.434 | 2.144 | 2.332 | 3.102 | 3.062 |
| 5. Merel (Turdus merula L.) — Basterdnachtegaal (Accentor modularis L.) | 4.117 | 4.143 | 2.569 | 2.583 | 4.601 | 4.052 |
| 6. Rotgans (Bernicla branta Briss.) — Witoogeend (Fuligula nyroca Guld.) | 2.246 | 2.196 | 1.715 | 2.258 | 2.246 | 1.705 |
| 7. Wilde eend (Anas boschas L.) — Wintertaling (Querquedula crecca L.) | 3.174 | 2.555 | 2.160 | 2.025 | 3.041 | 2.200 |
| 8. Goudpluvier (Charadrius pluvialis L.) — Bontbekpluvier (Charadrius hiaticula L.) | 3.554 | 4.443 | 2.329 | 2.470 | 3.554 | 4.875 |
| 9. Roode Grutto (Limosa Baueri Naum.) — Vijverruiter (Totanus stagnatilis Bechst.) | 3.694 | 3.590 | 2.390 | 2.342 | 3.694 | 4.697 |
| 10. Rotsduif (Columba livia Briss.) — Tortelduif (Turtur auritus Ray) | 3.592 | 4.126 | 2.346 | 2.570 | 3.649 | 3.657 |
| Gemiddeld | 4.2823 | 4.4885 | 2.5979 | 2.6443 | 4.3894 | 4.4357 |

lichaamsgewicht ($P$), het relatief gewicht van den musculus pectoralis major ($Mp$), het relatief lichaamsoppervlak ($S$, als $P^{\frac{2}{3}}$) en het relatief vleugelvlak ($A$)[1]) en voor (meest andere individuen van) dezelfde soorten ook het relatief gewicht van den musculus coracobrachialis ($Mc$).

Specifieke en individueele afwijkingen daargelaten, blijkt aldus wel eenvoudige evenredigheid van het spiergewicht met het lichaamsgewicht te bestaan. In de gevonden gemiddelden is van beide spieren het gewicht iets meer dan evenredig aan het lichaamsgewicht; maar dit is zeker wel hoofdzakelijk daaraan toe te schrijven, dat ook de vleugels gemiddeld iets grooter worden naar evenredigheid van het lichaamsoppervlak; hetgeen ook noodig schijnt te zijn om het met betrekking tot zijn oppervlak onevenredig zwaarder wordend lichaam zwevend te houden.

Door dit onderzoek is alzoo de noodige zekerheid verkregen, dat tusschen homoneure soorten, onder overigens gelijke omstandigheden, het gewicht der musculatuur evenredig met het lichaamsgewicht verandert. Geldt dit tusschen groote en kleine homoneure soorten, dan mag wel *a fortiori* worden aangenomen, dat de grooter individuen van eene zelfde soort en van gelijke, meestal ook van verschillende sekse, zeker geen hooger spiergehalte bezitten dan de kleinere, daar tusschen hen het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, veel minder verandert dan tusschen homoneure soorten.

Bij den Man evenwel, in vergelijking met de Vrouw, neemt het spiergewicht toe als het kwadraat hunner lichaamsgewichten. Daarmede ook het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, als het kwadraat der vergrooting van het hersengewicht, in functie van het lichaamsgewicht, tusschen individuen eener zelfde soort, meestal zelfs van verschillende sekse. Bij den Man, vergeleken met de Vrouw, dus als $P^{0.28+0.28}$ of $P^{0.56}$, gelijk tusschen homoneure soorten.

*In functie van het spiergewicht* evenwel verandert het hersengewicht in iedere soort — ook bij den Mensch —, tusschen individuen van gelijke en van verschillende sekse, evenredig aan $M^{0.28}$.

Anders tusschen homoneure soorten. Hier verandert het hersengewicht zoowel evenredig aan $M^{0.56}$ als aan $P^{0.56}$; *naar verhouding van de spiermassa* neemt dus het hersengewicht meer toe dan algemeen binnen eene soort.

---

[1]) A. MAGNAN, Variations de la surface alaire chez les Oiseaux, l.c., Année 1913, N⁰. 2, p. 119—125.

Dit is een belangrijk verschil in de verhouding tusschen homoneure soorten en tusschen de twee seksen — ook bij den Mensch —, waarmede ongetwijfeld in verband staan verschillen in de anatomische en physiologische verhouding van het zenuwstelsel en het spierstelsel.

Inderdaad is reeds lang bekend, dat de spiervezels van den man gemiddeld belangrijk dikker zijn dan die van de vrouw. BOWMAN [1]) vond (reeds in 1840), dat de gemiddelde diameter bij den man ongeveer een vierde grooter is, beantwoordend aan een verhouding der doorsneden van 1.664. SCHWALBE en MAYEDA [2]) wijzen uitdrukkelijk op den „bedeutenden Einfluss" die de sekse heeft voor de dikte van homologe spiervezels. „Ganz allgemein liegen in den hier verwerthbaren Messungen die Kaliber-Maxima im weiblichen Muskel tiefer als im männlichen" (p. 502). Hetzelfde geldt voor de gemiddelde kalibers der vergelijkbare metingen, die in tabel VI zijn weergegeven. Daarbij ook de relatieve breedten en maxima der „variatie-curven", waaruit volkomen gelijkvormigheid dezer gemiddelde curven blijkt (voor de breedte zoowel als voor het maximum is de verhouding 1.653); hetgeen, in verband met de functioneele betrekking tusschen de zenuw en de spier, naar de onderzoekingen van KEITH LUCAS, MINES en van LAPICQUE, van groote beteekenis is [3]).

TABEL VI. — Dikte der spiervezels. (Naar metingen van G. SCHWALBE en R. MAYEDA)

| | Gemiddelde diameter (in micra) | | Relatieve breedte en maximum der variatie-curven | |
|---|---|---|---|---|
| | Man | Vrouw | Man | Vrouw |
| Biceps brachii | 51.7 | 39.5 | 14 20 | 12 17 |
| Sartorius | 51.8 | 36.2 | 18 24 | 13 17 |
| Gastrocnemius | 57.5 | 47.5 | 22 28 | 17 22 |
| Gemiddeld | 53.7 | 41.1 | 18 24 | 14 18.7 |

[1]) W. BOWMAN, On the Minute Structure and Movements of Voluntary Muscle. Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1840. Part II, London 1840, p. 461.

[2]) G. SCHWALBE und R. MAYEDA, Ueber die Kaliberverhältnisse der quergestreiften Muskelfasern des Menschen. Zeitschrift für Biologie (KÜHNE und VOIT). Band 27, München und Leipzig 1890, p. 482—516.

[3]) K. LUCAS, in Journal of Physiology. Cambridge 1905, p. 125; 1909, p. 113. — G. R. MINES, Ibid. 1913, p. 1. — L. LAPICQUE, in Comptes Rendus de la Société de Biologie. Paris 1913, p. 35. — De vezels eener skeletspier kunnen namelijk

De gemiddelde *doorsnede* der vezels van deze drie spieren is bij den man **1.708** maal grooter dan bij de vrouw; van beide seksen werden „kräftige Leichen" vergeleken. In de „muskelkräftige" mannen en vrouwen van THEILE hadden de gelijknamige spieren de in tabel VII aangegeven gewichten.

TABEL VII. Spiergewichten (naar bepalingen van F. W. THEILE) (in grammen)

| | Vier mannen | | | | | Vier vrouwen | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | n°. 1(*r*) | 2(*l*) | 3(*l*) | 7(*r*) | Gem. | n°. 13(*r*) | 14(*l*) | 15(*l*) | 16(*r*) | Gem. |
| Biceps brachii | 179.2 | 152.9 | 181.7 | 196.3 | 177.5 | 96.9 | 72.1 | 77.8 | 104.0 | 87.7 |
| Sartorius | 143.5 | 211.8 | 201.0 | 207.5 | 191.0 | 110.6 | 73.9 | 102.5 | 100.6 | 96.9 |
| Gastrocnemius | 346.0 | 291.4 | 449.2 | 460.7 | 386.8 | 259.1 | 223.7 | 238.6 | 252.2 | 243.4 |
| Gemiddeld | 222.9 | 218.7 | 277.3 | 288.2 | **251.8** | 155.5 | 123.2 | 139.6 | 152.3 | **142.7** |

Het gemiddeld gewicht der drie spieren is bij de mannen 1.765 maal grooter dan bij de vrouwen. Neemt men aan, dat in verhouding tot de grooter lichaamslengten, de spieren bij de mannen gemiddeld 1.069 maal langer waren [1]), dan vindt men de doorsnede gemiddeld **1.651** maal grooter dan bij de vrouwen. Dit laatste getal ligt zeer nabij het voor de vergrooting der gemiddelde doorsnede van de spiervezels gevonden getal 1.708. Aangezien nu ook naar de lengte der spier, in het algemeen, verandert de lengte harer vezels [2]) en aldus het gemiddeld getal van deze gelijk blijft, mag men aannemen, dat het getal der spiervezels van den Man gelijk is aan dat van de Vrouw. Dit geldt dan ook voor het getal van de motorische zenuwvezels en daarmede van alle andere zenuwvezels en van de neuronen.

Alzoo kan de verhouding der hersengewichten alleen door de

ieder afzonderlijk in contractie geraken. Dit moet ongetwijfeld zoowel in verband staan met de dikte der spiervezels als met de dikte der zenuwvezels.

[1]) Van den man N°. 5 was de gastrocnemius niet afzonderlijk gewogen. Ik koos daarvoor N°. 7, „Mann von mehr als mittlerer Grösse", voor welks lichaamslengte ik 175 c.M. aannam. De gemiddelde lengte dezer vier mannen wordt dan 168.6 c.M.; de gemiddelde lengte der vier vrouwen is 158.9 c.M. De verhouding van de lengten der ledematen van deze mannen tot deze vrouwen kan men aldus op 170 : 159 = 1.069 stellen.

[2]) Vergelijk: R. MAYEDA, Ueber die Kaliberverhältnisse der quergestreiften Muskelfasern. Zeitschrift für Biologie (KÜHNE und VOIT), Band 27. (1890), p. 142 en 146.

lengte en de doorsnede der zenuwvezels, of een van beide (niet door het getal), bepaald worden. Het volume der cellichamen is miniem in vergelijking met dat van de overige bestanddeelen van het neuron. De hersengewichten nu staan tot elkander als de lengte der zenuwvezels, waaruit volgt, dat de doorsnede der zenuwvezels gelijk blijft, evenals tusschen individuen van gelijke sekse eener soort. Tusschen homoneure soorten, daarentegen, verandert de doorsnede der zenuwvezels evenredig aan $P^{0.28}$.

In de physiologische betrekking tusschen het spierstelsel en het zenuwstelsel onderscheiden zich aldus de seksen niet van elkander. Bij den Mensch echter, en zeker ook bij vele Apen, staat, ten opzichte van de betrekking tusschen deze beide orgaanstelsels en de massa van het lichaam, de man wel, doch de vrouw niet met de mannelijke en de vrouwelijke sekse van andere soorten gelijk. Dynamisch staat de vrouw, doordien zij naar hare krachten onevenredig grooter lichaamsgewicht te bewegen heeft, bij den man ten achteren. De verhouding der lichaamsgewichten is hier zoodanig geregeld, doordien de vrouw onevenredig minder spiergehalte bezit, dat het dynamisch nadeel der groote tegenover kleine individuen voor den man is opgeheven, hetgeen kwadrateering der gewone verhouding van het hersengewicht en het spiergewicht tot het lichaamsgewicht vereischt.

Aldus is het niet alleen bij den Mensch, doch ook bij andere Primaten. De hier bestaande eigenaardigheid: geringere mobiliteit van de vrouw en daartegenover groote mobiliteit van den man, is alleen te verklaren door de gansch bijzondere mechanische eischen, welke, in deze orde, de moederzorg aan de eene en het familieleven aan de andere sekse stelt. Onnoodig er nadruk op te leggen welke beteekenis dit ook in sociologisch opzicht heeft en de onmogelijkheid te betoogen, dat men ooit terecht zal kunnen zeggen: „nous avons changé tout cela".

---

**Natuurkunde.** — De Heer HAGA biedt eene mededeeling aan van den Heer M. J. HUIZINGA: *„De unipolaire geleiding van kristaldetectoren".*

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

In een vroegere mededeeling (Verslag Kon. Acad. September-vergadering 1916) zijn electrolytische ontledingsverschijnselen bij den molybdeenglans-detector beschreven, die het waarschijnlijk maakten dat het gelijkrichtend vermogen bij dit kristalcontact niet, zooals men gewoonlijk doet, aan thermoelectrische werkingen is toe te schrijven, maar aan polarisatiespanningen als gevolg van electrolyse.

De vraag of men gerechtigd is deze conclusie ook tot andere kristaldetectoren uit te breiden werd in mijn dissertatie — 5 Juli 1918, Groningen — besproken.

Deze mededeeling bevat de daarin beschreven resultaten.

§ 1. *Aard der ontledingsproducten van het molybdeenglans-contact.*

Plaatst men op het molybdeenglans een platinaspits en laat men een stroom van ongeveer één milliampère van het kristal naar het platina gaan, dan ontstaat een kleine hoeveelheid eener donkerblauwe vloeistof. Bij een grootere stroomsterkte breidt het vloeistofplekje zich niet uit, daar de meerdere stroomwarmte een snellere verdamping tengevolge heeft. Daarom werd telkens een klein druppeltje gedistilleerd water op de contactplaats gebracht en weer weggezogen zoodra dit na eenige seconden een diep blauwe kleur had aangenomen. Op deze wijze werden eenige c.c. verkregen. In het anorganisch chemisch laboratorium te Groningen (directeur Prof. F. M. JAEGER) werd deze vloeistof onderzocht en gaf bij verdamping een blauw residu dat de formule $Mo_5O_{14} + 6H_2O$ heeft ($MoO_2, 4MoO_3, 6H_2O$) een colloïdale stof, die aan de lucht langzaam oxydeerde tot $MoO_3$.

De bruine stof die optreedt wanneer men den stroom van platina naar molybdeenglans door den detector zendt, kan gemakkelijk in groote hoeveelheid worden verkregen door ontleding van verdund zuur tusschen electroden van molybdeenglans. Deze bruine verkleuring moet worden toegeschreven aan de colloïdale sulfiden $MoS_2$ en $MoS_3$.

## § 2. *Andere detectoren.*

Een tweede combinatie, waarbij ontledingsverschijnselen konden worden waargenomen, is die van pyriet en platina; deze verschijnselen zijn het duidelijkst wanneer de aanrakingsplaats zoodanig is dat de sterkste unipolaire geleiding optreedt. Hierbij moet de stroom weer van het kristal naar de platinaspits gaan, wat bij dit kristal de richting van den zwaksten stroom is, in tegenstelling met het molybdeenglanscontact, iets wat ook terstond in het oog springt bij het beschouwen der gelijkstroomkarakteristieken (zie later). Hier bestaan de ontledingsproducten uit een zwarte en een kleurlooze vloeistof, uit welke laatste zich kleurlooze kristallen plegen af te scheiden. De ontledingsverschijnselen zijn veel zwakker dan bij den molybdeenglansdetector. De aangelegde spanning mag ook niet meer dan 5 volt bedragen, omdat dan de unipolaire geleiding en tevens de electrische ontleding geheel verdwijnt. Dit verdwijnen van de unipolaire geleiding is reeds door Flowers bij een loodglanscontact gevonden.

Verder werden nog loodglans-, zinkiet-, koperkies-, koperglans-, borniet-, en carborundumdetectoren onderzocht. Bij deze werden geen ontledingsverschijnselen geconstateerd. Slechts bij loodglans-detectoren was soms op de aanrakingsplaats een donker vlekje te zien. Werd hier door bevochtiging ontleding opgewekt, dan hield dit toch, door verdampen van de aangebrachte vloeistof, na eenige oogenblikken op. Echter bleek bij alle kristallen door deze bewerking de unipolaire geleiding telkens aanmerkelijk te zijn verbeterd. Hierbij was de richting van den grootsten weerstand steeds dezelfde als bij een nieuw contact.

## § 3. *Proeven in vacuo.*

Het vermoeden lag eenigszins voor de hand, dat de unipolaire geleiding het gevolg is van ontleding in een geadhereerd vochthuidje, waarbij de aanvankelijk nog onzichtbare ontledingsproducten, indien zij hygroscopisch zijn, vochtdeeltjes uit de lucht tot zich kunnen trekken, zoodat de ontledingsvloeistoffen zichtbaar worden. Dit laatste zou dan bij pyriet en molybdeenglans het geval zijn.

Een onderzoek in vacuo en in een atmosfeer van waterstof leerde, dat de unipolaire geleiding van den molybdeenglansdetector bleef bestaan, maar dat de ontleding nu niet zichtbaar werd. Deze unipolaire geleiding kan echter in dit geval nog wel aan een geadsorbeerd laagje worden toegeschreven, daar dit laagje zeer moeilijk, en stellig niet door evacueeren alléén kan worden verwijderd.

Ook onder een laagje paraffineolie bleef de unipolaire geleiding bestaan, terwijl ook nu de ontleding niet kon worden waargenomen.

Uit deze proeven mag evenwel niet de gevolgtrekking worden gemaakt, dat de ontleding slechts een nevenverschijnsel is, hetwelk niet in oorzakelijk verband met de unipolaire geleiding staat. Dit blijkt echter eerst duidelijk wanneer men van de beschouwde kristaldetectoren de gelijkstroomkarakteristieken nagaat, die het verband tusschen de aangelegde spanning en den daarbij door het contact gaanden stroom, grafisch voorstellen.

§ 4. *Het opnemen der gelijkstroomkarakteristieken.*

Doordat de sterkte van den stroom, die door het contact gaat, niet slechts een functie is van de aangelegde spanning, maar ook afhangt van den tijd gedurende welken de stroom reeds is doorgegaan, zal de gelijkstroomkarakteristiek met den tijd blijken te veranderen. Men zal daarom moeten trachten de gelijkstroomkarakteristiek te bepalen door een voldoend aantal waarnemingen, alle gedaan binnen een zeer kort tijdsverloop. Omdat spiegelgalvano-

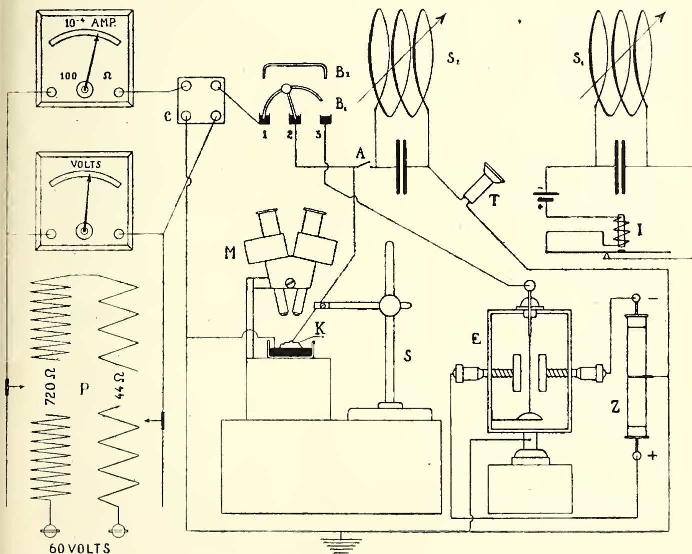



Fig. 1.

meters in het algemeen te traag zijn, werden „Präzisionsinstrumente" van SIEMENS en HALSKE gebruikt, die oogenblikkelijk de juiste stroomsterkte aanwijzen en als wijzerinstrumenten ook zeer snel konden worden afgelezen. De schakeling is in fig. 1 gegeven. Het kristal $K$ dreef gewoonlijk op kwik, dat tevens de eene electrode vormde. Door middel van het binoculair microscoop $M$ kon de contactplaats worden waargenomen.

Ook is in deze figuur aangegeven hoe, door den beugel $B_1$ om te wippen, de detector in verbinding kon worden gebracht met de snaar van den Wulfschen electrometer $E$. Om daarna te weten door welk potentiaalverschil de waargenomen snaaruitwijking was teweeggebracht, werd de electrometer verbonden met den potentiometer $P$, waarvoor de beugel $B_1$ door den beugel $B_2$ vervangen werd, die de bakjes 1 en 3 verbond. Nadat de electrometer weer denzelfden uitslag had verkregen, werd het potentiaalverschil op den voltmeter afgelezen.

Ook was het mogelijk het contact als detector te beproeven. Daartoe werden in het systeem $S_1$ electrische trillingen opgewekt en geïnduceerd in het systeem $S_2$. Door den beugel $B$ te verwijderen en de verbinding bij $A$ aan te brengen werd het contact met een telefoon $T$ in het systeem $S_2$ opgenomen. Naar de sterkte van het geluid in de telefoon werd de werking als detector beoordeeld.

## § 5. *Gelijkstroomkarakteristieken van electrolytische detectoren.*

De gelijkstroomkarakteristiek van den electrolytischen detector wijst duidelijk aan dat de afwijkingen van de wet van OHM bij dezen detector door een, tengevolge van electrolyse optredende, polarisatiespanning zal moeten worden verklaard [1]. De karakteristiek (kromme $a$ in fig. 2) kan n.l. worden voorgesteld door de formule $I = \frac{E-e}{R}$, waarin $I$ de stroomsterkte, $E$ de aangelegde spanning en $R$ een constante weerstand beduiden, terwijl $e$ de opgewekte polarisatiespanning is.

Deze polarisatiespanning neemt toe met de aangelegde spanning en nadert tot een maximum van ongeveer 3 volt op een wijze, zooals door de kromme $b$ wordt aangegeven. Zoodra de polarisatiespanning dit maximum heeft bereikt, gaat de karakteristiek in een rechte lijn over, welke de horizontale as snijdt in een punt dat juist de maximale waarde der polarisatiespanning aanwijst. Deze

[1] Armagnat, Journal de Physique, V, pag. 748, 1916.

uit de karakteristiek afgelezen maximale waarde der polarisatiespanning wordt ook gevonden door directe meting met den electro-

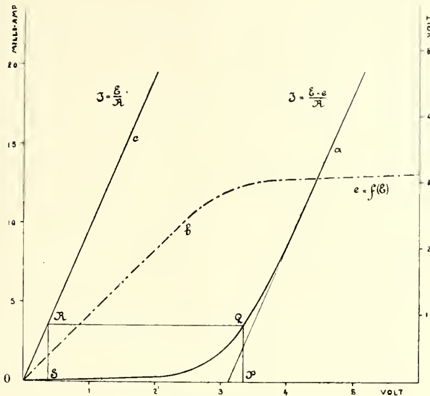



Fig. 2.

meter van WULF. Wanneer de polarisatiespanning niet optrad zou de karakteristiek blijkbaar door de rechte lijn $c$ worden voorgesteld, die evenwijdig aan het rechte gedeelte van de kromme $a$ door den oorsprong is getrokken. Wanneer de aangelegde spanning door het stuk $OP$ wordt voorgesteld, zal $RQ$ de daarbij optredende polarisatiespanning voorstellen, waarvan men het verloop uit de karakteristiek kan afleiden.

De zooeven genoemde grootheid $R$ zou men den „waren weerstand" van den detector kunnen noemen en $\frac{E}{I} = \frac{E}{E-e} R$ den „schijnbaren weerstand". De ware weerstand wordt dus voorgesteld door de tangens van den hoek dien het rechte gedeelte van de karakteristiek met de ordinaat-as maakt, terwijl het snijpunt van het verlengde van dit rechte gedeelte met de abscis-as het maximum van de polarisatiespanning aangeeft.

Wanneer men den stroom in de andere richting door den detector zendt, komt dezelfde kromme voor den dag [1]), die men in het derde kwadrant zou kunnen teekenen. De twee gedeelten leveren samen de volledige karakteristiek op, die bij dezen detector den oorsprong tot symmetriepunt heeft. Door een constante hulpspanning aan te

[1]) De platinaspits moet hierbij niet al te klein worden genomen.

leggen kan dit symmetriepunt buiten den oorsprong worden gebracht. Eenzelfde potentiaalverschil zal dan een verschillende stroomsterkte geven al naar gelang dit potentiaalverschil in de eene of in de andere richting wordt aangelegd, m. a. w. de electrolytische detector *met hulpspanning* geleidt unipolair.

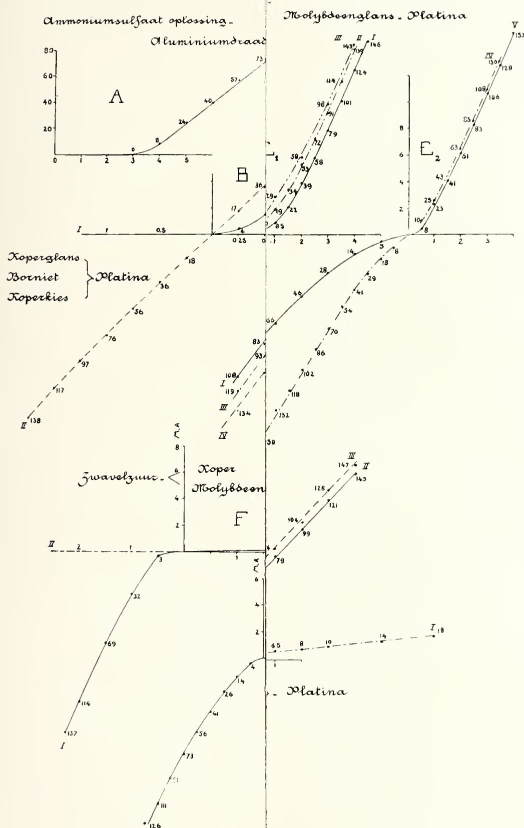
Wanneer men de platinaspits vervangt door een dun koper- of molybdeendraadje, ontstaat een detector die ook zonder hulpspanning unipolair geleidt en een onsymmetrische karakteristiek vertoont. Deze heeft dan de gedaante van de kromme *F* I (zie fig. 3 op de uitslaande plaat). De ware weerstand [1]) is in beide richtingen dezelfde zooals blijkt uit het evenwijdig zijn van de twee lineaire gedeelten, maar de maximale waarde der polarisatiespanning is verschillend en bedraagt wanneer de stroom van het zwavelzuur op de molybdeenspits overgaat ongeveer 2,2 Volt en in de tegenovergestelde richting ongeveer 0,75 Volt. Deze zooveel kleinere polarisatiespanning treedt volgens Armagnat steeds op, als de anode uit een in de vloeistof oplosbaar metaal bestaat.

Een eigenaardig verschijnsel, dat door Armagnat niet wordt meegedeeld, zien we optreden, wanneer de molybdeen- of koperelectrode tot een halve mM. of minder wordt verkleind. Terwijl de karakteristiek *F* II in het eerste kwadrant weinig is veranderd, — alleen de hellingshoek van het rechte gedeelte is verminderd, dus de ware weerstand is grooter geworden — loopt deze kromme in het derde kwadrant daarentegen geheel vlak. Eerst wanneer de aangelegde spanning een bedrag van ongeveer 20 Volt overschrijdt, neemt men plotseling een sterken stroom waar. De groote schijnbare weerstand herstelt zich terstond, wanneer de aangelegde spanning weer wordt verminderd. De bijzondere ontledingsverschijnselen, die bij een zeer kleine electrode tengevolge van de groote stroomdichtheid plegen op te treden, veroorzaken blijkbaar de hier zoo sterk uitgesproken unipolariteit.

De colloïdale zuurstofverbinding $Mo_5O_{14}$, die daarbij wordt gevormd, wijst op een mogelijk verband tusschen deze verschijnselen en die welke bij den aluminiumgelijkrichter optreden. Inderdaad blijkt de karakteristiek *A* van een dergelijken gelijkrichter, verkregen door in een oplossing van ammoniumsulfaat tegenover een groote platinaelectrode een aluminiumdraad van 1mM. dikte en 1 cM. lengte te

[1]) Opm. Aangezien op de coördinaatassen direct de uitslagen van den voltmeter en den milliampèremeter zijn afgezet, zijn de ware weerstanden afgeleid uit de karakteristieken van fig. 3, door vermeerdering met den weerstand van den milliampèremeter, alle 100 Ohm te groot. Dit heeft echter geen invloed op de te maken gevolgtrekkingen.

M. J. HUIZINGA: „De uni



leggen kan dit symmetriepunt buiten den oorsprong worden gebracht. Eenzelfde potentiaalverschil zal dan een verschillende stroomsterkte geven al naar gelang dit potentiaalverschil in de eene of in de andere richting wordt aangelegd, m. a. w. de electrolytische detector *met hulpspanning* geleidt unipolair.

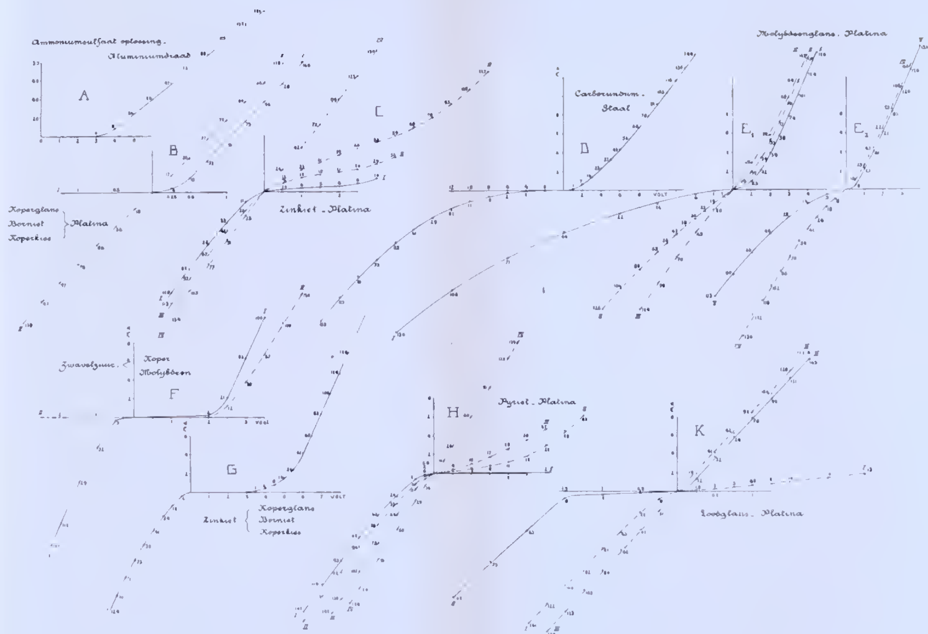
Wanneer men de platinaspits vervangt door een dun koper- of molybdeendraadje, ontstaat een detector die ook zonder hulpspanning unipolair geleidt en een onsymmetrische karakteristiek vertoont. Deze heeft dan de gedaante van de kromme *F*I (zie fig. 3 op de uitslaande plaat). De ware weerstand [1]) is in beide richtingen dezelfde zooals blijkt uit het evenwijdig zijn van de twee lineaire gedeelten, maar de maximale waarde der polarisatiespanning is verschillend en bedraagt wanneer de stroom van het zwavelzuur op de molybdeenspits overgaat ongeveer 2,2 Volt en in de tegenovergestelde richting ongeveer 0,75 Volt. Deze zooveel kleinere polarisatiespanning treedt volgens ARMAGNAT steeds op, als de anode uit een in de vloeistof oplosbaar metaal bestaat.

Een eigenaardig verschijnsel, dat door ARMAGNAT niet wordt meegedeeld, zien we optreden, wanneer de molybdeen- of koperelectrode tot een halve mM. of minder wordt verkleind. Terwijl de karakteristiek *F*II in het eerste kwadrant weinig is veranderd, — alleen de hellingshoek van het rechte gedeelte is verminderd, dus de ware weerstand is grooter geworden — loopt deze kromme in het derde kwadrant daarentegen geheel vlak. Eerst wanneer de aangelegde spanning een bedrag van ongeveer 20 Volt overschrijdt, neemt men plotseling een sterken stroom waar. De groote schijnbare weerstand herstelt zich terstond, wanneer de aangelegde spanning weer wordt verminderd. De bijzondere ontledingsverschijnselen, die bij een zeer kleine electrode tengevolge van de groote stroomdichtheid plegen op te treden, veroorzaken blijkbaar de hier zoo sterk uitgesproken unipolariteit.

De colloïdale zuurstofverbinding $Mo_5O_{14}$, die daarbij wordt gevormd, wijst op een mogelijk verband tusschen deze verschijnselen en die welke bij den aluminiumgelijkrichter optreden. Inderdaad blijkt de karakteristiek *A* van een dergelijken gelijkrichter, verkregen door in een oplossing van ammoniumsulfaat tegenover een groote platina-electrode een aluminiumdraad van 1mM. dikte en 1 cM. lengte te

---

1) Opm. Aangezien op de coördinaatassen direct de uitslagen van den voltmeter en den milliampèremeter zijn afgezet, zijn de ware weerstanden afgeleid uit de karakteristieken van fig. 3, door vermeerdering met den weerstand van den milliampèremeter, alle 100 Ohm te groot. Dit heeft echter geen invloed op de te maken gevolgtrekkingen.


Ammoniumsulfaat oplossing.
Aluminiumdraad
A
B
C
Zinkiet - Platina
Koperglans
Borniet
Koperkies
Platina
Carborundum -
Staal
D
Molybdeenglans - Platina
$E_1$
$E_2$
Zwavelzuur
Koper
Molybdeen
F
G
Zinkiet
Koperglans
Borniet
Koperkies
H
Pyriet - Platina
K
Loodglans - Platina
VOLT

plaatsen, in vorm zeer goed overeen te stemmen met de karakteristiek *F* II. Het gelijkrichtend vermogen wordt door SCHULZE en TAYLOR[1]) toegeschreven aan een dun zuurstofhuidje, dat door een colloïdale laag aluminiumhydroxyde wordt vastgehouden.

Ook heeft SCHULZE gevonden dat behalve aluminium zeer veel andere metalen zich *zoo* gedragen.

In het derde kwadrant verliep de karakteristiek *A* vlak tot ongeveer 25 volt. Gewoonlijk nam bij hoogere spanning de weerstand plotseling sterk af, waarbij zich een laag aluminiumhydroxyde van de spits losmaakte. De gelijkrichter herstelde zich weer zoodra de aangelegde spanning werd verminderd. Dat het vlak verloopende gedeelte in de karakteristiek van den aluminiumgelijkrichter ontstaat doordat een polarisatiespanning de aangelegde spanning tegenwerkt, is aangetoond door CLARENCE GREENE[2]).

Resumeerend kan men zeggen dat de karakteristieken van de beschouwde electrolytische detectoren de algemeene gedaante bezitten van de kromme *F* I met twee evenwijdige rechte gedeelten. Het kan zijn dat een tak niet tot ontwikkeling komt doordat de detector een hooge belasting niet kan verdragen. De oorsprong kan in het midden liggen zooals bij den electrolytischen detector met platina-electroden òf dichter bij de linkerbocht (*F* I) òf dichter bij de rechter- dan bij de linkerbocht (*F* II).

## § 6. *Gelijkstroomkarakteristieken van kristaldetectoren.*

**Molybdeenglans-platina.** Bij de beschouwing van de karakteristiek $E_1$ I van een als detector zeer gevoelig molybdeenglans-platina contact valt het rechte stuk van het in het eerste kwadrant verloopende gedeelte terstond op. Dit gedeelte is verkregen door den stroom van het kristal naar de spits te laten gaan en is opgenomen voordat de ontleding zichtbaar was geworden. De kromme kan blijkbaar weer worden voorgesteld door de formule $I = \frac{E-e}{R}$, waarin $R$ den constanten waren weerstand voorstelt en $e$ een aanvankelijk nog hypothetische tegenspanning. Dat de ware weerstand door de helling van het rechte gedeelte wordt voorgesteld, blijkt wanneer korte stroomstooten van toenemende sterkte door het contact worden gezonden. We vinden dan achtereenvolgens de karakteristieken $E_1$ II en $E_1$ III, die in het eerste zoowel als in het derde kwadrant

[1]) A. H. TAYLOR, Wiedemanns Annalen 30, p. 984, 998, 1016.

[2]) CLARENCE GREENE, Phys. Review 2d. Ser. Vol. III, 1914.

meer en meer naderen tot een rechte lijn door den oorsprong evenwijdig aan het rechte gedeelte van de kromme $I$ getrokken. Dit zal nog duidelijker blijken uit de karakteristieken van een aantal andere detectoren. Dat het verder geoorloofd is uit den vorm van de karakteristiek tot het bestaan van een tegenspanning met een maximum van 1.1 Volt te besluiten, ook al kan deze nog niet met den electrometer van WULF worden aangetoond, blijkt door den stroom gedurende enkele minuten van molybdeenglans naar platina te laten doorgaan. Wanneer de ontleding duidelijk is te zien, is de kromme $E_1$ III in de kromme $E_2$ IV overgegaan. Wordt daarna de contactdruk een weinig verminderd, dan komt de kromme $E_2$ V voor den dag, die de unipolaire geleiding weer zeer duidelijk vertoont. Wordt dit kristal, nadat het nog verder is ontleed, met den electrometer van WULF verbonden, dan kan een polarisatiespanning van 1.1 Volt worden aangetoond. Bij dezen volkomen continuen overgang van de karakteristiek $E_1$ I tot $E_2$ V blijft de ware weerstand onveranderd en dit bewijst dat de unipolaire geleiding van het contact zonder zichtbare ontleding toch aan een tegenspanning tengevolge van een nog onzichtbare electrolyse in een uiterst dun huidje moet worden toegeschreven.

Bij groote stroomsterkte gaat het rechte gedeelte weer over in een gebogen met den hollen kant naar de verticale as gewend. In het derde kwadrant is zelfs in het geheel geen recht stuk te verkrijgen. Dit moet worden toegeschreven aan de vermindering die de ware weerstand van al deze stoffen bij stijgende temperatuur ondergaat [1]). Bij molybdeenglans is het geleidingsvermogen bij een temperatuurstijging van 0 tot 200 graad reeds verdubbeld [2]). Dat de temperatuurstijging, door een stroom van 0.03 Ampère in de contactplaats teweeggebracht, reeds aanzienlijk is, blijkt uit het snelle verdampen van een op de contactplaats gebracht oliedruppeltje.

**Carborundum-staal.** Bij den zeer gevoeligen carborundum-staaldetector konden geen ontledingsverschijnselen worden waargenomen. Ook gelukte het niet, behalve door het aanleggen van zeer hooge spanningen, veranderingen in de karakteristiek $D$ te brengen. De bijzondere vorm van de kromme, vooral in het eerste kwadrant kan moeilijk anders dan door een tot een maximum van ongeveer 2,5 Volt naderende tegenspanning worden verklaard.

**Zinkiet-borniet.** De karakteristiek $G$ van een zinkiet-borniet-

---

[1]) A. E. FLOWERS, Phys. Revieuw 1st. Ser., Vol. XXIX, p. 445, 1909.

[2]) O. REICHENHEIM, Ueber die Elektrizitätsleitung einiger natürlich kristallisierten Oxyde und Sulfide und des Graphits. Dissertatie Freiburg 1906.

contact stemt nauwkeurig overeen met de kromme $F$I. Dezelfde karakteristiek bezitten de combinaties zinkiet-koperkies en zinkiet-koperglans. De rechte gedeelten snijden de as bij — 0.4 en + 5 Volt, en verplaatsen zich evenwijdig wanneer men stroomstooten door het contact stuurt. Dit komt ook voor den dag bij de karakteristieken die men verkrijgt door elk der componenten afzonderlijk met een platinaspits in aanraking te brengen.

**Zinkiet-platina.** De kromme $C$ ging tengevolge van het doorzenden van stroomstooten geleidelijk over in de rechte lijn IV. De helling van het rechte gedeelte der kromme I geeft derhalve den waren weerstand weer en hierdoor is tevens het bestaan van een tegenspanning van 0.4 Volt bewezen. Hieruit volgt dat ook in de andere richting een tegenspanning moet worden gevonden. Bij sommige karakteristieken trad dan ook in het eerste kwadrant een recht gedeelte op, dat de as bij ongeveer 3 Volt snijdt; o.a. bij de hier in tabelvorm volgende.

Van zinkiet naar platina

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2.0 | 2.25 | 2.5 | Volt |
| 1 | 3 | 4 | 5 | 6.5 | 7 | 8 | 8.5 | 9 | 9.5 | × 0.0001 Ampère |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.75 | 3.0 | 3.25 | 3.5 | 3.75 | 4.0 | 4.25 | 4.5 | 4.75 | Volt |
| 10 | 11 | 14 | 20 | 31 | 42 | 52 | 63 | 74 | × 0.0001 Ampère. |

Van platina naar zinkiet

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2.0 | Volt |
| 1.5 | 9 | 16.5 | 24 | 33 | 45 | 56 | 67 | × 0.0001 Ampère |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.25 | 2.5 | 2.75 | 3.0 | 3.25 | 3.5 | 3.75 | 4.0 | Volt |
| 77 | 86 | 98 | 108 | 118 | 129 | 140 | 150 | × 0.0001 Ampère. |

**Borniet-platina.** Deze combinatie vertoont den grootsten weerstand wanneer de stroom gaat van metaal naar kristal $B$I. Een zeer geringe overbelasting doet reeds de rechte lijn $B$II ontstaan. Dezelfde kromme geldt voor de combinaties koperglans-platina en koperkies-platina. Het rechte gedeelte wijst op een tegenspanning van 0.4 Volt. Opmerkelijk is het dat de stroomsterkte nu na het commuteeren gewoonlijk eerst na ongeveer 3 secunden en dan meestat schoksgewijs tot een zeer gering bedrag afneemt, een verschijnsel, dat ook bij andere kristalcontacten voorkomt, maar het sterkst bij electrolytische detectoren wordt waargenomen.

Wanneer men de krommen $B$I en $C$I vergelijkt, wordt het duidelijk waarom de zinkiet-borniet-detector zoo sterk unipolair geleidt. Men kan n.l. de kromme $G$ als een superpositie van de

krommen $CI$ en $BI$ opvatten, waarbij de laatste eerst 180° moet worden gedraaid.

**Zinkiet-molybdeenglans.** Om deze beschouwing te toetsen, kan men de kristallen zinkiet en molybdeenglans, welke in verbinding met platina een zoo sterk verschillende karakteristiek vertoonen, met elkaar in contact brengen. Dat dit contact bijzonder goed unipolair geleidt, blijkt uit de hier in tabelvorm volgende karakteristiek.

Van zinkiet naar molybdeenglans

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Volt. |
| 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 12 | 14 | 18 | 29 | 49 | 79 | × 0,0001 Ampère. |

Van molybdeenglans naar zinkiet

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | Volt. |
| 1 | 5.5 | 15 | 26 | 39 | 51 | 64 | 75 | 86 | 98 | 110 | 123 | × 0.0001 Amp. |

Ook volgt hieruit dat de unipolaire geleiding van het zinkiet-platina-contact aan dezelfde oorzaak moet worden toegeschreven als die van het molybdeenglans-platina-contact, derhalve aan electrolytische polarisatie.

**Loodglans-platina.** Een loodglans-detector gaf gewoonlijk een karakteristiek overeenkomende met de kromme $BI$. Soms stemde de karakteristiek meer met $CI$ overeen, doordat nu in de tegenovergestelde richting de weerstand het grootst was. Beide krommen veranderden snel met den tijd. De kromme $KI$ werd verkregen nadat eerst bij een zeer geringen contactdruk gedurende 15 minuten een stroom van 0.005 Amp. van loodglans naar platina door het contact was gegaan.

Het was niet mogelijk in het eerste kwadrant ook een bocht te bereiken, omdat bij te hooge belasting de kromme weer overging in de lijn III. Werd in plaats daarvan een stroom van 0.01 Amp. gedurende 15 minuten nu van platina naar loodglans gestuurd, dan bleek de karakteristiek $KII$ voor den dag te komen. De krommen I en II laten duidelijk zien dat de ware weerstand van het contact door de helling van de lijn III wordt voorgesteld en in alle drie gevallen dezelfde is. De kromme I wijst op een polarisatiespanning met een maximum van 0.25 Volt, terwijl het maximum in de andere richting niet voor den dag komt. De kromme II wijst twee maxima aan, van 1.4 Volt en van 0.1 Volt. Het bestaan van deze twee karakteristieken kan moeilijk aan iets anders worden toegeschreven dan aan veranderingen die door den stroomdoorgang in het contact zijn teweeggebracht en die slechts van electrolytischen aard kunnen zijn.

**Pyriet-platina.** De karakteristiek *H* van een pyriet-platina-contact vertoont na het voorgaande weinig nieuws meer. De electrolytische ontleding werd bij dit kristal onder het microscoop eerst waargenomen nadat op grond van de boven ontwikkelde beschouwingen de overtuiging was verkregen, dat de unipolaire geleiding op electrolytische polarisatie berust.

*Samenvatting.*

Behalve bij den molybdeenglans-detector werden ook bij den pyriet-detector electrolytische verschijnselen aangetoond; de hierbij optredende polarisatiespanning is de oorzaak van de verschillende sterkte van den stroom bij omkeeren van de stroomrichting.

De gelijkstroomkarakteristieken van deze detectoren werden vergeleken met die van andere kristaldetectoren en van den electrolytischen detector. Uit het geheel overeenkomstige verloop der karakteristieken en haren bijzonderen vorm, wordt besloten dat bij alle onderzochte kristaldetectoren, al zijn daarbij geen ontledingsproducten zichtbaar, de unipolaire geleiding toe te schrijven is aan electrolytische polarisatie in een op het kristaloppervlak geadhereerd vocht- en gashuidje.

De weerstand van de meeste der in de techniek der draadlooze telegrafie gebruikte detectoren is kleiner dan men gewoonlijk aanneemt, en bedraagt in den regel niet veel meer dan 100 Ohm.

---

**Natuurkunde.** — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van den Heer J. D. VAN DER WAALS Jr.: *„Over de theorie der vloeistofwrijving.”*

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ.

§ 1. *Inleiding.* Terwijl de theorie der gaswrijving het onderwerp heeft uitgemaakt van talrijke onderzoekingen, heeft de theorie der wrijving van vloeistoffen slechts weinig de aandacht getrokken. Toch is het duidelijk, dat de verklaring, die van de wrijving van gassen wordt gegeven, — nl. dat zij tot stand komt, doordat door moleculen, die van één gaslaag naar een andere diffundeeren, tevens een hoeveelheid van beweging van de eene laag naar de andere wordt getransporteerd, — niet tevens die van de vloeistofwrijving kan zijn. Immers de wrijving van gassen neemt bij hooger temperatuur toe. Bij vloeistoffen daarentegen wordt de viscositeit bij hooger temperatuur geringer. En een dergelijk gedrag is bij „wrijving door transport” niet te verklaren.

MAXWELL berekende, dat bij „wrijving door transport” de wrijvingscoëfficiënt $\eta$ evenredig aan $\sqrt{T}$ moest zijn in de onderstelling, dat de moleculen volkomen harde bollen zijn, die elkander niet aantrekken. Andere onderstellingen aangaande den aard der moleculen (afstooting omgekeerd evenredig met de $5^{de}$ macht van den afstand, MAXWELL, of elkaar aantrekkende harde bollen, SUTHERLAND en REINGANUM) leiden tot een nog sterkere toeneming van $\eta$ met $T$. Ook de thermische uitzetting der vloeistoffen kan het teeken van den temperatuurcoëfficiënt van $\eta$ niet verklaren. Bij gassen blijkt $\eta$ onafhankelijk van het volume te zijn. Bij vloeistoffen zal de uitzetting een toename van $\eta$ met $T$ in de hand werken en niet een afname. Dit is experimenteel aangetoond (behalve voor water, waar het omgekeerde het geval is) en het is ook gemakkelijk in te zien, dat dit bij wrijving door transport te verwachten is, althans bij niet associeerende of dissocieerende vloeistoffen. Immers de door MAXWELL afgeleide uitdrukking:

$$\eta = \tfrac{1}{3}\,\varrho l s = \tfrac{1}{3}\,\frac{ms}{\pi\sigma^2\sqrt{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarin $\varrho$ de dichtheid, $l$ de gemiddelde weglengte, $s$ de gemiddelde snelheid, $m$ de massa en $\sigma$ de middellijn van een molecuul voorstelt,

zal voor vloeistoffen, wanneer wij van andere bekende correcties afzien, gecorrigeerd moeten worden tot:

$$\eta = \tfrac{1}{3} \frac{ms}{\pi\sigma^2\sqrt{2}} \frac{v-b}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

welke grootheid met $v$ toeneemt.

Wij zullen dus bij vloeistoffen niet in hoofdzaak aan transport van hoeveelheid van beweging door de diffundeerende moleculen moeten denken, maar de wrijving moeten verklaren door krachten, die de moleculen op elkaar uitoefenen. Indien wij de moleculen op een willekeurig oogenblik plotseling hun beweging konden ontnemen en ze konden doen stilstaan in den stand, dien zij op dat oogenblik innamen, zouden wij tevens de wrijving door transport doen ophouden, zoodat wij in die stilstaande moleculen geen enkel middel meer bezaten om de wrijving te bestudeeren.

Anders is het bij „wrijving door moleculaire krachten". Indien wij althans de moleculaire krachten onafhankelijk van de snelheid denken, zouden hierbij de wrijvingskrachten ook na de immobilisatie der moleculen blijven bestaan. Zij zouden een gevolg zijn van de groepeering der moleculen in de ruimte. De vraag is nu: van welken aard zijn de moleculaire krachten en hoedanig is de groepeering der moleculen, die aanleiding geeft tot het ontstaan van den spanningstensor, zooals deze optreedt bij de vloeistofwrijving. Op deze vraag zouden de volgende drie antwoorden gegeven kunnen worden:

I. *Wrijving door botsingskrachten of door versprong van hoeveelheid van beweging.* Wij zouden kunnen aannemen, dat in de krachten, die de moleculen bij botsing op elkaar uitoefenen, de verklaring der wrijving moet gezocht worden. Denken wij het eenvoudige geval van een vloeistof, waarin de stroomsnelheid slechts in een enkele richting valt, die tot $x$-richting van een cartesiaansch coördinatenstelsel is gekozen, terwijl die snelheid ($u$) een lineaire functie is van $z$, dus

$$u = az, \text{ (met } a > 0), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dan zullen de lagen met grootere $z$ zich bij de gebruikelijke oriëntatie van het assenstelsel in de ruimte ten opzichte van de ondergelegen lagen naar rechts bewegen. Een gevolg zal zijn, dat de lijn, die de middelpunten van twee botsende moleculen verbindt, en die ik de centraallijn zal noemen, in meer gevallen in het tweede quadrant van het $xz$-vlak zal te vinden zijn, dan in het eerste. Draait men het coördinatenstelsel 45 °/₀, zoodat de $+x$-as zich naar de $+z$-as beweegt en noemt men de nieuwe assen $x'$ en $z'$, dan zal dus de druk, die de moleculen op elkaar uitoefenen in de $z'$-richting

grooter zijn dan in de $x'$-richting. Zooals bekend is, komt dit overeen met de waarde, die de spanningstensor in dit geval moet hebben.

In plaats echter van de berekening der bij botsing optredende krachten kan men de wrijving door deze oorzaak ook berekenen met behulp van de hoeveelheid van beweging, die bij een botsing momentaan van het centrum van een der botsende moleculen naar dat van het andere wordt overgedragen. Deze berekeningswijze schijnt eenvoudiger en zal in § 2 worden uitgevoerd.

II. *Wrijving bij dubbelpunten. Slieren-vorming.* Wij zouden ook kunnen aannemen, dat de moleculen electrische of magnetische dubbelpunten waren. Wanneer deze geheel willekeurig ten opzichte van elkaar georiënteerd waren, zouden zij elkander even vaak afstooten als aantrekken, zoodat de gemiddelde kracht nul zou zijn. Door de koppels, die zij op elkander uitoefenen, zullen zij zich echter zoo draaien, dat aantrekking overweegt. Nemen wij nu aan, dat moleculen, die elkaar naderen, nog weinig georiënteerd zijn, terwijl dit met moleculen die langs elkaar zijn gegaan en zich weer van elkaar verwijderen in hooger mate het geval is, dan zullen de moleculen, wier centraallijn in de $x$-richting ligt, gemiddeld meer georiënteerd zijn dan die, waarbij zij in de $z'$-richting ligt, zoodat een trekspanning in de $x'$-richting zal resulteeren grooter dan in de $z'$-richting, wat weder rekenschap kan geven van den spanningstensor.

Wanneer wij meer dan twee moleculen beschouwen, wier centra op dezelfde lijn in de $x'$-richting liggen, dan zullen de koppels, die zij op elkaar uitoefenen, elkaar versterken, waardoor een soort slierenvorming kan ontstaan, die de wrijving nog meer in de hand werkt.

Het juiste bedrag van deze oriëntatie der molecuul-assen is lastig te berekenen en zal verschillend uitvallen naarmate men de rotaties der moleculen beheerscht denkt door de klassieke mechanica of door de wetten der quantentheorie. Bovendien is er in de experimenteele gegevens geen aanleiding om aan te nemen, dat dit geval zich werkelijk voordoet. Ik zal daarom van een poging tot het berekenen van de wrijving volgens deze onderstelling afzien, ofschoon zij mogelijk een beslissende rol speelt bij de wrijving van uiterst taaie vloeistoffen, die zich bij wrijving als dubbelbrekend voordoen, alsook in den glasachtigen toestand.

III. *Wrijving door groepvorming.* Ten slotte kunnen wij aannemen, dat de moleculen zich door hun onderlinge attractie tot groepen vereenigen. Deze groepen zullen in rustende vloeistoffen gemiddeld bolsymmetrie bezitten. Bevindt een vloeistof zich echter in een beweging waarbij $u = az$, dan zullen die bolvormige groepen tot

ellipsoides worden afgeschoven. Deze gedaanteverandering zal nu weer aanleiding geven tot een grootere trekspanning in de $x'$-richting. Deze oorzaak van wrijving zal zich waarschijnlijk hoofdzakelijk in de nabijheid van het kritisch punt doen gevoelen. In § 4 en volgende zal ik een poging doen het bedrag der wrijving te berekenen, die aan deze oorzaak moet worden toegeschreven.

§ 2. *Wrijving door botsingskrachten.* Voor een strenge berekening van de wrijving door deze oorzaak zou het noodig zijn de juiste verdeeling der snelheden te kennen. Ik zal mij hier echter met een benaderde berekeningswijze tevreden stellen ongeveer van denzelfden aard als de berekeningswijze van de „wrijving door transport" bij gassen door MAXWELL in zijn verhandelingen in het Phil. Mag. in 1860. Ik zal n.l. aannemen, dat de snelheidsverdeeling der moleculen, wier middelpunt in een bepaalde laag $z = z_1$ ligt, gevonden wordt door de stroomsnelheid der vloeistof in die laag samen te stellen met een warmtebeweging, waarvoor de ongewijzigde MAXWELL'sche snelheidsverdeeling gedacht wordt te gelden.

Waarschijnlijk zal de fout, die wij bij deze onderstelling maken, bij vloeistoffen kleiner zijn dan bij gassen. Immers de vrije weglengte is hier zéér klein en de onderstelling wijkt weinig af van de onderstelling van MAXWELL, dat de moleculen de stroomsnelheid hebben van de laag, waarin zij het laatst gebotst hebben. Zelfs als men de correctie van JEANS in aanmerking neemt voor de persistentie der snelheden, zal men ertoe komen de moleculen een snelheid toe te kennen overeenkomende met de stroomsnelheid van een laag, die slechts een kleine fractie van $\sigma$ verwijderd is van de laag, waarin hun middelpunt ligt. Van deze kleine fractie zal ik dus afzien.

Vatten wij nu een bepaalde horizontale laag in het oog, waarvoor wij $z = 0$ kiezen, dan heeft versprong van hoeveelheid van beweging door deze laag plaats bij alle botsingen, waarbij de middelpunten der botsende moleculen aan verschillende zijde dezer laag liggen. Bij elke botsing heeft een versprong van boven naar beneden plaats en een in omgekeerde richting. Die twee hoeveelheden zijn gelijk en tegengesteld van teeken. Wij zullen dus ook het dubbele bedrag van de overdracht van boven naar beneden in aanmerking kunnen nemen. Wij zullen nu eerst de botsingen beschouwen, waarbij het middelpunt van molecuul I tusschen de vlakken $z = z_1$ en $z = z_1 + dz_1$ ligt ($0 > z_1 > - \sigma \cos \gamma$) terwijl de centraallijn [1]) een hoek tusschen $\gamma$ en $\gamma + d\gamma$ met de $z$-as zal maken en in een vlak zal liggen, dat

[1]) Geteld in de richting van molecuul I naar molecuul II.

een hoek tusschen $\beta$ en $\beta + d\beta$ met het $xz$-vlak maakt. Verder zullen de snelheids-componenten van molecuul I liggen tusschen $u_1$ en $u_1 + du_1$, $v_1$ en $v_1 + dv_1$ en $w_1$ en $w_1 + dw_1$ terwijl die van het molecuul II liggen tusschen $u_2$ en $u_2 + du_2$ enz. De kans, dat dergelijke snelheids-componenten voorkomen, wordt voor de beide moleculen respectievelijk voorgesteld door

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left\{(u_1-az_1)^2+v_1^2+w_1^2\right\}} d\frac{u_1}{\alpha} d\frac{v_1}{\alpha} d\frac{w_1}{\alpha}$$

en

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left\{(u_2-az_2)^2+v_2^2+w_2^2\right\}} d\frac{u_2}{\alpha} d\frac{v_2}{\alpha} d\frac{w_2}{\alpha}$$

waarin $z_2 = z_1 + \sigma \cos \gamma$.

Het aantal der bedoelde botsingen per seconde en per oppervlakte-eenheid van de laag is dus:

$$\frac{n^2}{\pi^3} e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left\{(u_1-az_1)^2+v_1^2+w_1^2+(u_2-az_1-a\sigma\cos\gamma)^2+v_2^2+w_2^2\right\}} \mathfrak{v}_r \cos\mu\, \sigma^2 \sin\gamma\, d\gamma\, d\beta\, dz \quad . \quad (3)$$

waarin $n$ het aantal moleculen per $cM^2$. $\mathfrak{v}_r$ de relatieve snelheid van molecuul II ten opzichte van molecuul I en $\mu$ de hoek tusschen de richting van $\mathfrak{v}_r$ en de centraallijn aanduidt, zoodat:

$$\mathfrak{v}_r \cos\mu = (u_2 - u_1)\sin\gamma\cos\beta + (v_2 - v_1)\sin\gamma\sin\beta + (w_2 - w_1)\cos\gamma$$

Bij elk van deze botsingen is de $x$-component der hoeveelheid van beweging, die van boven naar beneden verspringt:

$$m\, \mathfrak{v}_r \cos\mu \sin\gamma\cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Opdat werkelijk overdracht van hoeveelheid van beweging door het gekozen vlak plaats vindt, moet:

$$z_2 > 0 \text{ of } \gamma < Bg\cos\frac{-z_1}{\sigma}$$

$\eta$ wordt dus gevonden door (3) met (4) te vermenigvuldigen en vervolgens te integreeren naar:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | tusschen | $0$ | en | $Bg\cos\frac{-z_1}{\sigma}$ |
| $\beta$ | ,, | $0$ | ,, | $2\pi$ |
| $u_1 \ldots . w_2$ | ,, | $-\infty$ | ,, | $+\infty$ |
| $z_1$ | ,, | $-\sigma$ | ,, | $0$ |

Wij moeten dan de uitdrukking nog met 2 vermenigvuldigen voor de overdracht van beneden naar boven. Wij moeten echter nog op iets anders letten. Bij de boven genomen grenzen zijn botsingen in

aanmerking genomen, die in werkelijkheid onmogelijk zijn. Slechts die combinaties van waarden van de onafhankelijk veranderlijken kunnen voorkomen, waarvoor $\mu$ stomp is en dus $\cos\mu < 0$. Eenvoudiger is het de voorwaarde in te voeren, dat $\mathfrak{v}_r \cos\mu < 0$. Deze voorwaarde kan op de wijze van DIRICHLET worden ingevoerd door te vermenigvuldigen met $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq\varphi} \frac{\sin p\varphi}{\varphi}\, d\varphi$.

Welke integraal 1 is voor $-p < q < p$
en 0 voor $q < -p$ en voor $q > +p$.

Stelt men nu $p = s$ en $q = \mathfrak{v}_r \cos\mu + s$ en laat men $s$ onbepaald aangroeien, dan blijkt de integraal 1 te worden voor $\mathfrak{v}_r \cos\mu < 0$ en 0 voor $\mathfrak{v}_r \cos\mu > 0$.

Zoo vinden wij ten slotte voor de kracht, die de vloeistof boven het vlak $z = 0$ per oppervlakte-eenheid op die er beneden uitoefent.

$$\left.\begin{array}{l} \eta a = -\dfrac{2n^2\sigma^2 m}{\pi^4}\displaystyle\int \{(u_2 - u_1)\sin\gamma\cos\beta + (v_2 - v_1)\sin\gamma\sin\beta + (w_2 - w_1)\cos\gamma\}^2 \times \\ \times\, e^{-\frac{1}{\alpha^2}\{(u_1 - az_1)^2 + v_1^2 + w_1^2 + (u_2 - az_1 - a\sigma\cos\gamma)^2 + v_2^2 + w_2^2\}} \times \\ \times\, e^{+i\varphi\{(u_2 - u_1)\sin\gamma\cos\beta + (v_2 - v_1)\sin\gamma\sin\beta + (w_2 - w_1)\cos\gamma + s\}} \times \dfrac{\sin s\varphi}{\varphi} \times \\ \times\, \sin^2\gamma\cos\beta\, d\varphi\, d\gamma\, d\beta\, d\dfrac{u_1}{\alpha} \ldots d\dfrac{w_2}{\alpha}\, dz_1 \end{array}\right\} (5a)\,[1]$$

Daar $az_1$ en $az_2$ over het algemeen zéér klein zullen zijn vergeleken met $u_1$ en $u_2$, zullen wij voor den eersten exponentieelen factor onder het integraal-teeken mogen schrijven:

$$\left\{1 + \frac{1}{\alpha_2} 2a(u_1 z_1 + u_2 z_1 + u_2 \sigma\cos\gamma)\right\} e^{-\frac{1}{\alpha^2}(u_1^2 + \ldots + w_2^2)}$$

Substitueeren wij dit in de integraal, dan zal de term 1 tusschen de accoladen in (6) na integratie 0 opleveren: het is de waarde der wrijvingskracht voor $a = 0$. De integralen met $\frac{2a}{\alpha^2} z_1 u_1$ en $\frac{2a}{\alpha^2} z_1 u_2$ zullen gelijk maar van tegengesteld teeken worden, zoodat zij wegvallen en de integraal met $\frac{2a}{\alpha^2} u_2 \sigma\cos\gamma$ alleen overblijft. Deelen wij

[1]) Het minteeken is hiervoor geschreven omdat $\mathfrak{v}_r \cos\mu$ negatief is terwijl het aantal botsingen uit den aard der zaak positief is en het teeken van uitdrukking (3) dus eigenlijk omgekeerd moet worden.

nu door $a$ en stellen wij nog $\frac{z_1}{\sigma} = z'_1$ en $\frac{u_1}{a} = u'_1 \ldots\ldots \frac{w_2}{a} = w'_2$ $a\varphi = \varphi$ en $\frac{s}{a} = s'$ en laten wij vervolgens de accenten weer weg, dan krijgen wij:

$$\left.\begin{aligned} \eta = & \frac{-4n^2\sigma^4 ma}{\pi^4} \int \{(u_2-u_1)\sin\gamma\cos\beta + (v_2-v_1)\sin\gamma\sin\beta + (w_2-w_1)\cos\gamma\}^2 \times u_2 \times \\ & \times e^{-(u_1^2+\ldots+w_2^2)+i\varphi\{(u_2-u_1)\sin\gamma\cos\beta+(v_2-v_1)\sin\gamma\sin\beta+(w_2-w_1)\cos\gamma+s\}} \times \\ & \times \frac{\sin s\varphi}{\varphi} \sin^2\gamma\cos\gamma\cos\beta\, d\gamma\, d\beta\, d\varphi\, du_1 \ldots dw_2\, dz_1 \end{aligned}\right\} (5b)$$

Substitueeren wij hierin:

$$\left.\begin{aligned} & u_1 + \tfrac{1}{2}\iota\varphi\sin\gamma\cos\beta = \xi_1 && u_2 - \tfrac{1}{2}\iota\varphi\sin\gamma\cos\beta = \xi_2 \\ & v_1 + \tfrac{1}{2}\iota\varphi\sin\gamma\sin\beta = \eta_1 && v_2 - \tfrac{1}{2}\iota\varphi\sin\gamma\sin\beta = \eta_2 \\ & w_1 + \tfrac{1}{2}\iota\varphi\cos\gamma = \zeta_1 && w_2 - \tfrac{1}{2}\iota\varphi\cos\gamma = \zeta_2 \end{aligned}\right\} (6)$$

dan komt:

$$\left.\begin{aligned} \eta = & \frac{-4n^2\sigma^4 ma}{\pi^4} \int \{(\xi_2-\xi_1)\sin\gamma\cos\beta + (\eta_2-\eta_1)\sin\gamma\sin\beta + (\zeta_2-\zeta_1)\cos\gamma + \iota\varphi\}^2 \times \\ & \times (\xi_2 + \tfrac{1}{2}\iota\varphi\sin\gamma\cos\beta) \times e^{-(\xi_1^2\ldots\zeta_2^2)-{}^1\!/_2\varphi^2+\iota\varphi s} \times \frac{\sin s\varphi}{\varphi} \times \\ & \times \sin^2\gamma\cos\gamma\cos\beta\, d\varphi\, d\gamma\, d\beta\, d\xi_1 \ldots d\zeta_2\, dz_1 \end{aligned}\right\} (5c)$$

Bij integratie naar $\xi_1 \ldots \zeta_2$ vallen termen, die onevene machten van $\xi_1 \ldots \zeta_2$ bevatten weg, zoodat alleen overblijven de termen met·

$+\{[(\xi_2^2 + \xi_1^2)\sin^2\gamma\cos^2\beta + (\eta_2^2 + \eta_1^2)\sin^2\gamma\sin^2\beta + (\zeta_2^2 + \zeta_1^2)\cos^2\gamma]\tfrac{1}{2}\iota\varphi\sin\gamma\cos\beta +$
$+ 2\,\xi_2^2\,\iota\varphi\sin\gamma\cos\beta - \tfrac{1}{2}\,\iota\varphi^3\sin\gamma\cos\beta\}$.

Deze termen veranderen niet wanneer men $\xi_1^2, \eta_1^2, \eta_2^2, \zeta_1^2$ en $\zeta_2^2$ door $\xi_2^2$ vervangt en dus voor de som der overblijvende termen schrijft $+ (3\xi_2^2\,\iota\varphi - \tfrac{1}{2}\,\iota\varphi^3)\sin\gamma\cos\beta$. Na uitvoering van de integraties vinden wij dan:

$$\begin{aligned} \eta = -\frac{2}{\pi} n^2\sigma^4\, m\, a\, i \int (3-\varphi^2) \times e^{-{}^1\!/_2\varphi^2+\varphi\iota s} \times \sin s\varphi \times \\ \times \sin^3\gamma\cos\gamma\cos^2\beta\, d\varphi\, d\gamma\, d\beta\, dz_1 \quad \ldots\ldots\ldots (5d) \end{aligned}$$

Vervangen wij nu $e^{\iota\varphi s}$ door $\cos\varphi s + \iota\sin\varphi s$ en voeren wij de integratie naar $\varphi$ uit, daarbij bedenkende, dat wij de waarde der integraal voor $lim.\, s = \infty$ zoeken. Dan valt de term met $\sin s\varphi\cos s\varphi$ weg, terwijl men in den term met $\sin^2 s\varphi$ deze uitdrukking door haar middelwaarde $\tfrac{1}{2}$ mag vervangen. Zoo vinden wij:

$$-\iota\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2+\iota\varphi s} \times \sin s\,\varphi \times (3-\varphi^2)\,d\varphi = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\beta\,d\beta = \pi$$

$$\int_0^{Bg\cos(-z_1)} \sin^3\gamma\cos\gamma\,d\gamma = \tfrac{1}{4}\left[\sin^4\gamma\right]_0^{Bg\cos(-z_1)} = \tfrac{1}{4}(1-z_1^2)^2$$

$$\int_{-1}^{0} (1-z_1^2)^2\,dz_1 = \tfrac{8}{15}$$

$$\eta = \frac{4\sqrt{2\pi}}{15}\,n^2\,\sigma^4\,ma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5e)$$

Bij het berekenen van het aantal botsingen hebben wij echter tot nu toe afgezien van den invloed van de onderlinge attractie der moleculen en van hun afmeting in de richting der snelheid. Voeren wij daarvoor de gebruikelijke correcties in, dan vinden wij:

$$\eta = \frac{4\sqrt{2\pi}}{15}\,n^2\,\sigma^4\,ma\,\frac{v}{v-b}\,e^{-\frac{\varepsilon}{RT}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

waarin $\varepsilon$ voorstelt het verschil tusschen het bedrag aan potentieele energie, dat de moleculen in de vloeistof gemiddeld bezitten en het bedrag, dat zij bezitten op het oogenblik van een botsing.

Door G. JÄGER [1]) en door M. BRILLOUIN [2]) waren reeds uitdrukkingen voor de vloeistofwrijving afgeleid; JÄGER denkt daarbij uitsluitend aan „wrijving door botsingskrachten", terwijl BRILLOUIN behalve deze nog de wrijving door transport in aanmerking neemt. De berekeningswijze verschilt eenigszins van de boven gevolgde. De uitkomsten waartoe zij komen zijn in eenigszins gewijzigde notatie:

JÄGER $$\eta = \frac{\sigma\varrho s}{6\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)}$$

BRILLOUIN $$\eta = \tfrac{1}{3}\varrho s\left\{\alpha D + \beta\,\frac{\sigma}{2(D-\sigma)}\right\}$$

Hierin stelt $\varrho$ de dichtheid, $s$ de gemiddelde snelheid der moleculen en $D$ den gemiddelden afstand van een paar naastbijzijnde moleculen

[1]) G. JÄGER, Wiener Sitzungsber. CII, p. 253, Anno 1893.

[2]) M. BRILLOUIN, Leçons sur la Viscosité des Liquides et des Gaz. Paris. GAUTHIER-VILLARS 1907.

voor. $\alpha$ en $\beta$ zijn twee onbekende constanten, die niet veel van 1 zullen verschillen en die zijn ingevoerd, omdat bij de berekening allerlei benaderingen zijn ingevoerd, waardoor de getallencoëfficiënten niet geheel zeker zijn. De eerste term van de formule van BRILLOUIN heeft betrekking op transport, de tweede op botsingskrachten. Naar het mij voorkomt had BRILLOUIN ook den eersten term moeten corrigeeren voor de „dikte" der moleculen. In zijn gedachtengang had dit kunnen gebeuren door vermenigvuldiging met een factor $\frac{D-\sigma}{D}$. Dat hij dit niet deed ontneemt m. i. aan zijn toetsing der experimenteele gegevens veel van haar waarde.

§ 3. *Toetsing der formules voor vloeistoffen niet te dicht bij het kritisch punt.* Noemen wij den „wrijvings-coëfficiënt door transport" $\eta_1$, die door botsingskrachten $\eta_2$ en die door groepvorming $\eta_3$. Bij vloeistoffen niet te dicht bij het kritisch punt zien wij van $\eta_3$ af. Verder hebben wij:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = c\,\frac{b^2}{(v-b)^2}$$

waarin $c$ een getallen-coëfficiënt van matige grootte is. Deze grootheid zullen wij wel als groot vergeleken met 1 mogen beschouwen, zoodat wij ook $\eta_1$ zullen verwaarloozen.

Doen wij dit, dan merken wij allereerst op, dat $\eta$ volgens de formule bij constant volume met $T$ moet toenemen evenredig aan $\sqrt{T}$. Er zijn slechts weinig stoffen, waarvoor de experimenteele gegevens voorhanden zijn noodig om te toetsen of het teeken van $\frac{\partial \eta}{\partial T_v}$ inderdaad positief is. Uit den aard der zaak is $\frac{\partial \eta}{\partial T p}$ steeds gemeten en niet $\frac{\partial \eta}{\partial T_v}$. Ether en Benzol zijn de eenige stoffen, waarvoor ik opgaven van $\frac{\partial \eta}{\partial p_T}$ heb gevonden [1]), zoodat $\frac{\partial \eta}{\partial T_v}$ te vinden is volgens de formule:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_v} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_p} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p_T}\frac{\partial p}{\partial T_v} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_p} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p_T}\,\frac{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T_p}}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p_T}}.$$

[1]) Behalve voor water, dat zich ook hierin wel anomaal zal gedragen en voor $CO_2$ in de nabijheid van het kritisch punt, welke waarnemingen later zullen worden besproken.

Men vindt:

| | voor ether | voor benzol |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_p} =$ | $-$ 0,01075 [1]) | $-$ 0,01853 [1]) |
| $\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial p_T} =$ | 0,00073 [2]) | 0,00093 [2]) |
| $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T_p} =$ | 0,001585 [3]) | 0,0011763 [4]) |
| $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p_T} =$ | $-$ 0,000139 [5]) | $-$ 0,0000783 [6]) |

Dit levert voor ether

$$\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_v} = -0{,}01075 + 0{,}0088 = -0{,}00195$$

en voor benzol

$$\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_v} = -0{,}01853 + 0{,}01462 = -0{,}00391$$

Theoretisch zou men volgens vergelijking (5) vinden:

$$\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_v} = \frac{1}{2\,T} = +0{,}00183.$$

Er bestaat dus zelfs geen overeenstemming in het teeken van $\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_v}$. Bedenkt men echter dat de gevonden waarde het verschil is van twee getallen die ieder ongeveer vijf maal grooter zijn dan het gezochte bedrag, terwijl zij zéér onnauwkeurig bekend zijn, dan is het niet uitgesloten, dat $\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_v}$ in werkelijkheid negatief is. Zelfs in

[1]) Deze waarden, evenals de beneden opgegeven waarden van $\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_p}$ voor andere stoffen zijn gevonden door differentiatie van de empirische formules van de gedaante: $\eta = \frac{a}{(b+t)^c}$, waarin THORPE en RODGER, Phil. Trans. Royal Soc. of London **185** p. 397, A. 1894 hun waarnemingen samenvatten.

[2]) Volgens WARBURG en SACHS. Ann. d. Phys. u Chem. **22** p. 521. A. 1884. De druk is uitgedrukt in K.G. per cm$^2$.

[3]) Volgens AMAGAT 1893, geëxtrapoleerd voor 0° en 1 atm. uit de waarden opgegeven in het Recueil de constantes physiques.

[4]) Volgens KOPP. 1847. Ontleend aan het „Recueil enz.".

[5]) Volgens SUCHODSKI 1910, geëxtrapoleerd voor 0° en 1 atm. uit de waarden opgegeven in het „Recueil enz.".

[6]) Volgens RÖNTGEN 1891, geëxtrapoleerd voor 0° en 1 atm. uit de waarden opgegeven in het „Recueil enz.".

de waarde van $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p_T}$ is een fout van 4 °/₀ volstrekt niet uitgesloten, terwijl de fout in de bepaling van $\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p_T}$ ongetwijfeld vele malen grooter dan die van $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p_T}$ zal zijn. Aan den anderen kant is het natuurlijk ook mogelijk, dat, zelf indien formule (5) geldig is, de waarde van $\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial \eta}{\partial T_v}$ negatief moet uitvallen, tengevolge van den factor $e^{-\frac{\varepsilon}{RT}}$, of doordat $\sigma$, en dus ook $b$ van de temperatuur afhangen. De experimenteele gegevens zijn niet voldoende nauwkeurig om deze vraag te beslissen.

Bevredigender resultaten levert een andere toetsing, die op meer uitgebreide schaal is toe te passen. Deze bestaat daarin, dat wij de experimenteele waarden van $\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_p}$ [1]) met de uit vergelijking (5) volgende waarden vergelijken.

Daartoe schrijven wij:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_p} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial T_v} + \frac{\partial \eta}{d v_T}\frac{\partial v}{\partial T_p}\right)$$

en hierin stellen wij:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_v} = \frac{1}{2T} \qquad \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial v_T} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v-b} = \frac{-b}{v(v-b)} = -\frac{b\left(p+\frac{a}{v^2}\right)}{v\,.\,RT.}$$

Wij zullen $p$ tegenover $\frac{a}{v^2}$ verwaarloozen en ruwweg aannemen: $RT_k = \frac{8}{27}\frac{a}{b}$ en $p_k = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}$, dan wordt:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial v_T} = -\frac{1}{RTv^3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\frac{R^3\,T_k^3}{p^2_k}.$$

$V$ is het volume per gram-molecuul dus $v = m\frac{1}{\varrho}$, zoodat wij ten slotte vinden om te toetsen:

$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial T_p}\right)_{exp} = \frac{1}{2T} - \frac{3^3 R^2}{8^3 T}\frac{\varrho^2 T_k^3}{m^2 p_k^2}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T_p}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De waarden van $\varrho$, $p_k$, $T_k$ en $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T_p}$ ontleenende aan het „Recueil enz." vinden wij:

[1]) Zie noot 1 op pag. 753.

| | $\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T_p}\right)_{exp}$ | $\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T_p}\right)_{theor.}$ | $\sigma \times 10^8$ | $\sigma' \times 10^8$ |
|---|---|---|---|---|
| Pentaan | 0.01019 | 0.01269 | 5.486 | 4.863 |
| Isopentaan | 1081 | 1171 | 5.774 | 4.838 |
| Hexaan | 1123 | 1354 | 6.716 | 5.166 |
| Heptaan | 1214 | 1353 | 7.779 | 5.456 |
| Octaan | 1394 | 1574 | 9.808 | 5.714 |
| Chloroform | 1149 | 1066 | 6.515 | 4.317 |
| Ether | 1075 | 1463 | 6.578 | 4.731 |
| Benzol | 1853 | 1382 | 9.770 | 4.559 |
| Toluol | 1462 | 1524 | 8.451 | 4.867 |
| Orthoxylol | 1700 | 1385 | 10.871 | 5.170 |
| Metaxylol | 1418 | 1478 | 7.973 | 5.223 |
| Paraxylol [1]) | 1472 | 1414 | 6.716 | 5.187 |
| Azijnzuur [1]) | 1826 | 2607 | 4.713 | 4.382 |
| Methyl alcohol | 1634 | 1988 | 4.527 | 3.749 |
| Ethyl „ | 2086 | 1250 | 10.273 | 4.046 |
| Propyl „ | 2887 | 0970 | 36.103 | 4.421 |

De overéénstemming is over het algemeen zoo bevredigend als met het oog op de vele verwaarloozingen verwacht kon worden. Meestal is de experimenteele waarde iets kleiner, dan de theoretische, bij ether meer dan bij de andere stoffen, terwijl benzol en orthoxylol in tegengestelden zin afwijken. Bij azijnzuur en bij de alcoholen is de overeenstemming veel slechter dan bij de normale stoffen.

Tot hiertoe toetsten wij de temperatuur-coëfficiënten van $\eta$. Wij kunnen vergelijking (5) ook direct toetsen en wel door er bijvoorbeeld $\sigma$ uit te berekenen en de zoo verkregen waarden met de op andere wijze berekende waarden van $\sigma$ te vergelijken. Laten wij den factor $e^{\frac{\varepsilon}{RT}}$ weer weg en stellen wij $\frac{2}{3}\pi\sigma^3 N = b = \frac{RT_k}{8p_k}$

[1]) Bij deze stoffen zijn de waarden voor $\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T_p}$ ook voor 0° C. uit de empirische formule van Rodger en Thorpe berekend ofschoon zij bij die temperatuur vast zijn.

($N$ = aantal moleculen per gram-molecuul), terwijl wij $v-b$ weer door $\frac{RT}{p+\frac{a}{v^2}}$ vervangen en $p$ tegen $\frac{a}{v^2}$ verwaarloozen, dan vinden wij:

$$\sigma = \frac{640}{27}\left(\frac{\pi T}{R^5}\right)^{1/2}\frac{m^{\frac{5}{2}}p_k^{2}}{\varrho^2 T_k^{3}}\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De zoo berekende waarden voor $\sigma$ zijn in de tabel op pag. 755 opgenomen. Daarmee zijn vergeleken de waarden berekend uit de kritische grootheden:

$$\sigma' = \left(\frac{3RT_k}{16\pi N p_k}\right)^{1/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

met $N = 6{,}08 \times 10^{-23}$ (SOMMERFELD).

Deze zijn door $\sigma'$ voorgesteld en in de laatste kolom der tabel opgenomen. Het blijkt dat vergelijking (8) waarden geeft die wat orde van grootte aangaat geheel met die van vergelijking (9) overeenstemmen. Het verdient opgemerkt te worden, dat de waarden voor $\sigma'$ onderling weinig verschillen, terwijl die voor $\sigma$ onderling veel grooter verschillen vertoonen. De alcoholen wijken weder sterk af.

**Plantkunde.** — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer C. SPRUIT P.Pzn.: *„Over den invloed van electrolyten op de bewegelijkheid van Chlamydomonas variabilis Dangeard."* (Voorloopige mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer VAN ITERSON).

Bij de reacties op uitwendige prikkels, die eencellige bewegelijke organismen uit kunnen voeren, kan men waarnemen, dat de objecten niet altijd even prompt reageeren. Men spreekt van „stemming" en zou hier te maken hebben met een of meer van die onberekenbare factoren, welke het werken met levende organismen zoo lastig maken.

Voor *Chlamydomonas variabilis Dangeard* is het mij gebleken, dat het, behalve van den aard van de opgeloste stof, van de concentratie ervan afhangt of dit eencellig, bewegelijk, groen wier meer of minder levendig reageert op het licht, de zwaartekracht en op chemotactica. Door de bewegelijkheid van het wier in oplossingen van eenige zouten systematisch na te gaan, werd getracht een inzicht te verkrijgen van de wijze, waarop de electrolyten bij dit verschijnsel werkzaam waren. Hoewel het wenschelijk ware geweest, dat de invloed van talrijke electrolyten ware nagegaan, is het toch reeds uit de tot nu toe verzamelde gegevens duidelijk geworden, dat de werking der electrolyten op de bewegelijkheid van *Chlamydomonas* in vele opzichten overeenkomt met den invloed van electrolyten op het oplossen of neerslaan van colloïden.

Gebruik werd gemaakt van een cultuurmethode, aangegeven door JACOBSEN, om *Chlamydomonas*-soorten in groote massa ter beschikking te hebben [1]).

Nadat gedurende een paar maanden door overenting voortdurend culturen verkregen waren, werden de proeven uitgevoerd. Van elke cultuur, die gebruikt was, werd een gedeelte met formaline gefixeerd. Bij de determinatie bleek, dat steeds bijna uitsluitend individuen van *Chlamydomonas variabilis Dangeard* in de culturen voorkwamen.

*Chlamydomonas variabilis* is onder gunstige omstandigheden gevoelig voor het licht, de zwaartekracht en eenige chemotactica. In sommige omstandigheden reageert het wier op contact door zich aan vaste voorwerpen vast te hechten.

---

[1]) H. C. JACOBSEN. Zeitschr. f. Bot. Bd. II 1910.

In het experiment reageert *Chlamydomonas* gewoonlijk negatief op het licht, soms wordt een positieve reactie waargenomen. Dit laatste was vaak het geval, wanneer het wier in de cultuur vloeistof bleef.

Onder invloed van de zwaartekracht werd een duidelijke en snel verloopende positieve reactie waargenomen (positieve geotaxis), terwijl in de literatuur wordt aangegeven, dat *Chlamydomonas pulvisculus* negatief geotactisch reageert.

Zeer verdunde zuren en phosfaten bleken positieve chemotactica te zijn voor *Chlamydomonas*. Het wier reageerde negatief geotactisch op sterkere zuuroplossingen en op basen.

Al deze reacties werden duidelijk waargenomen bij een verblijf van het wier in gedistilleerd water. Toevoeging van kleine hoeveelheden zuur en base veroorzaakte, dat het reactievermogen verminderde. Boven een bepaalde concentratie bleef de reactie uit. Microscopisch viel waar te nemen, dat de bewegelijkheid in die gevallen zeer verminderd was. Ook door toevoeging van zouten kon de bewegelijkheid en het vermogen om te reageeren verminderd worden. De concentraties waren voor zouten grooter dan voor zuur en base. Toch waren ze nog gering.

Bij toename van het electrolytgehalte (hetzij dan door toevoeging van zuur, base, zouten of combinaties daarvan) verminderde de gevoeligheid voor het licht, de zwaartekracht en voor chemotactica ongeveer in dezelfde mate.

Aan de hand van de aangeduide reacties werd de invloed van electrolyten op de bewegelijkheid van het wier nagegaan.

Het was zeer gemakkelijk de individuen van *Chlamydomonas* te scheiden van de cultuur-vloeistof. Daarvoor werd gebruik gemaakt van het feit, dat het wier in die culturen, welke door haar dichtheid geschikt waren, om er de proeven mee te verrichten, in een zóódanigen toestand verkeerde, dat het zich zeer gemakkelijk op vaste voorwerpen afzette. Een glazen buisje met een diameter van ongeveer 0,5 cM. en dat van onderen wat puntig dicht gesmolten was, werd met de cultuur-vloeistof gevuld. Het buisje werd verticaal opgesteld en onder den invloed geplaatst van eenzijdig diffuus daglicht. Na een vijftal minuten was aan één zijde van het buisje een groene streep, gevormd door de wieren, zichtbaar. In den aangegeven toestand is de bewegelijkheid nog zoo groot, dat zij onder invloed van het licht naar één zijde van het buisje gezwommen waren. Daar waren ze met den glazen wand in aanraking gekomen. Tengevolge van het contact hadden zij zich op het glas afgezet. Zij waren daar zoo stevig vastgehecht, dat het mogelijk was met behulp

van een pipet de cultuurvloeistof weg te zuigen, terwijl de wieren aan den wand bleven kleven. Nu werd in het buisje een bepaalde hoeveelheid gedistilleerd water gebracht. Met dit water werden de wieren opgeschud. Ze waren daardoor in het water verspreid. Opnieuw werd het buisje verticaal opgesteld en blootgesteld aan eenzijdig diffuus daglicht. Onder invloed van het gedistilleerde water was bij de wieren van de neiging om zich vast te hechten niets meer waar te nemen. Wel vormden zij onder invloed van het licht een dichte groene streep aan de ééne zijde van het buisje, maar onder invloed van de zwaartekracht bewogen de wieren, die de streep vormden, zich zeer snel naar den bodem, zoodat na vijf minuten onder in het buisje een duidelijke ophooping was ontstaan.

Met behulp van een pipet kon nu het water bijna volkomen worden weggenomen. Na deze voorbereiding der wieren werd de oplossing, waarvan de invloed moest worden nagegaan, in het buisje gebracht.

Uit het meegedeelde op blz. 758, alinea 5 kan worden afgeleid, dat het (practisch) niets ter zake deed, of de reactie op het licht, de zwaartekracht of op chemotactica gebruikt werd, om de bewegelijkheid van *Chlamydomonas* te beoordeelen. Er werd gezocht naar een reactie, die gemakkelijk macroscopisch te volgen was. Het meest geschikt bleek de reactie op de zwaartekracht. Het was namelijk gemakkelijk uit te maken of het wier zich duidelijk naar den bodem bewoog, dan wel, of de bewegelijkheid zoo gering was, dat er van een beweging naar beneden geen sprake was. In het eerste geval ontstond na korten tijd een duidelijke ophooping onder in het verticaal opgestelde buisje; in het andere geval werd geen duidelijke ophooping waargenomen. De uitkomst van de proef werd steeds na t i e n  m i n u t e n vastgesteld.

Al naar mate de wieren op de zwaartekracht reageerden of niet, was het mogelijk vast te stellen, of de bewegelijkheid in een bepaalde oplossing tamelijk groot of zeer klein was. In alle oplossingen, waar het wier op de zwaartekracht reageerde, was de bewegelijkheid niet even groot. Evenmin in alle oplossingen, waar geen reactie was waar te nemen. We konden echter de grensconcentraties bepalen, waar de reactie op de zwaartekracht nog plaats had en waar zij niet meer waar te nemen was. Maakten we een serie oplossingen, die alle bestonden uit gedistilleerd water, waarin steeds toenemende hoeveelheden van een zout waren opgelost, dan was het mogelijk die concentratie van het zout te bepalen, waarin nog juist een reactie op de zwaartekracht werd waargenomen en die concentratie, waarbij juist geen reactie meer plaats vond. De concentraties die gelegen waren tusschen deze beide grensconcentraties kunnen we overgangs-

concentraties noemen. De concentratie, die de gemiddelde was van de beide grensconcentraties, kunnen we beschouwen als de concentratie, waar althans theoretisch de overgang plaats had van een bewegelijkheidstoestand, waarbij de reactie op de zwaartekracht plaats had en een bewegelijkheidstoestand, waarbij de reactie niet meer uitgevoerd werd. Deze concentratie noemen we de *critische overgangsconcentratie* of de *critische concentratie*.

Voor oplossingen, waar de zoutconcentratie constant was, terwijl het H'-ionengehalte regelmatig toenam, wordt op overeenkomstige wijze voor de H'-ionen van grensconcentraties en van de critische concentratie gesproken.

De waarden voor de grensconcentraties werden zeer veel zekerder door elke proef zesvoudig te nemen. Als grensconcentraties werden nu aangezien de concentratie, waarbij nog juist in alle zes de buisjes een duidelijke ophooping ontstond, en de concentratie, waarbij in de zes buisjes juist geen ophooping meer ontstond. Concentraties, waarbij in een deel van de zes buisjes een positieve reactie plaats greep, werden beschouwd als overgangsconcentraties en verder buiten beschouwing gelaten.

Om een goed beeld te krijgen van den invloed van een zout dient gelet te worden op de H'-ionenconcentratie van de oplossing. De oplossingen, die voor het onderzoek van den invloed van een zout gebruikt werden, veranderden dan ook niet alleen regelmatig, wat betreft de concentratie van het zout, maar eveneens werd de zuurgraad der oplossingen regelmatig veranderd.

De waterstof-ionen zijn de oorzaak van den invloed, die kleine hoeveelheden zuur uitoefenen op de bewegelijkheid van *Chlamydomonas*. De invloed van kleine hoeveelheden base wordt veroorzaakt door de hydroxyl-ionen.

Het product van de H'-ionen en van de OH'-ionen is in waterige oplossingen bij constante temperatuur constant. Daardoor kan men de sterkte van een alcalische oplossing door de H'-ionenconcentratie aangeven.

Er werd nu als volgt te werk gegaan. Eerst werd de critische concentratie bepaald voor oplossingen van een bepaald zout in gedistilleerd water. Daarna werd hetzelfde herhaald voor oplossingen van dat zout, die 0,00005 normaal zuur bevatten, daarna voor oplossingen, die 0,00010 normaal zuur bevatten enz. Tenslotte werden aan de oplossingen van het zout kleine hoeveelheden base toegevoegd, om op dezelfde wijze de grensconcentraties en de critische concentratie in reeksen van oplossingen te bepalen, die in plaats van zwak zuur, zwak alcalisch waren.

Aangezien de invloed der electrolyten veroorzaakt wordt door de ionen, diende de zekerheid te bestaan, dat op de aangegeven wijze werkelijk een regelmatige verandering van de ionenconcentratie verkregen werd.

Voor zoover het de ionen van zouten betrof, behoefde daaromtrent geen ongerustheid te bestaan.

Voor de waterstofionenconcentratie was het minder vanzelfsprekend. De waterstof-ionenconcentratie van bijv. 0.00005 normaal zwavelzuur is practisch niet steeds even groot. Het was mogelijk door toevoeging van kleine hoeveelheden zuur of base regelmatig toe- of afnemende H'-ionenconcentraties te verkrijgen, wanneer de volgende voorschriften werden opgevolgd. De oplossingen van een zout werden zuur of alcalisch gemaakt door toevoeging van het zuur of de base, dat het anion of die het kation met het zout gemeen had (een sulfaat werd dus zuur gemaakt met zwavelzuur, een zout van kalium werd alcalisch gemaakt met kaliumhydroxyde). Alle zure oplossingen van een zout werden bereid met dezelfde zuuroplossing. Evenzoo alle alcalische met dezelfde baseoplossing. Steeds werd versch gedistilleerd water gebruikt.

Al werd op deze wijze een regelmatige verandering van de H'-ionenconcentratie verkregen, het absolute bedrag ervan was niet bekend. Ook was het niet goed mogelijk de H'-ionenconcentratie en dus den zuurgraad van oplossingen zuur gemaakt met zoutzuur of met zwavelzuur onderling te vergelijken.

Voor de oplossingen van natriumacetaat bij verschillende H'-ionenconcentratie werd het absolute bedrag der H'-ionen electrometrisch bepaald. Deze oplossingen bevatten natriumacetaat en azijnzuur. De oplossingen werden weer in reeksen gebruikt. In elke reeks veranderde de concentratie van het natriumacetaat regelmatig. Door te letten op de verhouding van de concentratie van het acetaat en het vrije azijnzuur, kon verkregen worden, dat in elke reeks de H'-ionenconcentratie ongeveer constant was, terwijl voor de verschillende reeksen het H'-ionengehalte regelmatig veranderde. Van de oplossingen, die de grensconcentraties voor het natriumacetaat bevatten, werd nu electrometrisch de H'-ionenconcentratie bepaald.

Mengsels van natriumacetaat en azijnzuur bezitten een ook practisch zeer bepaalde, vooruit te berekenen en bovendien zeer goed electrometrisch te bepalen waterstofionenconcentratie. Zij vormen „bufferoplossingen".

De proeven werden bij kamertemperatuur verricht. De literatuur gaf aan, dat, voor zoover de invloed van de temperatuur op de chemotactische verschijnselen onderzocht is, deze weinig beteekent. Evenmin

werd voor eenige verschijnselen uit de colloïdchemie een groote invloed van de temperatuur opgegeven bijv. op de stabiliteit van suspensoïden.

Voor een reeks oplossingen van koolzuur in leidingwater werden de grensconcentraties bepaald bij 25° C. en bij omstreeks 0° C. Voor beide temperaturen werd dezelfde uitkomst verkregen. Toch werd altijd aanteekening gehouden van de temperatuur.

Steeds werd bij diffuus daglicht gewerkt. Een poging om de proeven in het donker te nemen mislukte, doordat hierbij zeer ongeregelde uitkomsten verkregen werden.

De gevonden grensconcentraties en de daaruit berekende critische concentraties werden voor ieder der onderzochte zouten in een graphische voorstelling vereenigd.

Op de abscis-as van een tweeassig-rechthoekig coördinatenstelsel werd de concentratie van het zout afgezet, op de ordinaat-as werd, gerekend van uit den oorsprong naar de eene zijde de concentratie van het zuur en naar den anderen kant de concentratie van de base afgezet. Voor de mengsels van natriumacetaat met azijnzuur werd de zuurgraad aangegeven door de $H^{\cdot}$-ionenconcentratie op de ordinaat-as af te teekenen.

De grensconcentratie, waarbij nog juist de reactie op de zwaartekracht optrad, werd met • aangegeven, de grensconcentratie, waar geen reactie zichtbaar werd, werd met o aangeduid.

De plaatsen, waar de critische overgangs-concentratie door berekening gevonden werd, werden verbonden. Zoo ontstond er een kromme lijn, die als de grens beschouwd kon worden tusschen het gebied, dat alle concentraties van zout en base en van zout en zuur bevatte, waarbij de reactie op de zwaartekracht plaats greep en het gebied van de concentraties, waarin geen duidelijke reactie plaats vond. De figuren 1, 2, 3 en 4 geven de krommen voor $K_2SO_4$, natriumacetaat, $KNO_3$, en voor KCl, althans voor zoover zij bepaald werden.

Om te bewijzen, dat de invloed van zuur en base werd veroorzaakt door de $H^{\cdot}$-ionenconcentratie van de oplossing, werd een serie oplossingen gemaakt, die alle 0,01 normaal natriumacetaat bevatten, maar verschillende hoeveelheden vrij azijnzuur of vrij natriumhydroxyde. We kregen aldus een reeks oplossingen, waarin de concentratie van het acetaat constant was, terwijl de $H^{\cdot}$-ionenconcentratie geleidelijk veranderde. De concentratie van andere bestanddeelen was in deze oplossingen te gering, dan dat deze een invloed van beteekenis konden hebben.

Het bleek nu, dat de reactie op de zwaartekracht niet of slecht uitgevoerd werd in de meest zure oplossingen en in de meest alca-

lische oplossingen van de reeks. Van de oplossingen met de grensconcentraties werd electrometrisch de H'-ionenconcentratie gemeten. Het bleek, dat de grens in de zure oplossingen tusschen $[H^{\cdot}] = 10^{-5.9}$ en $[H^{\cdot}] = 10^{-5.5}$ lag (de H'-ionenconcentraties werden uitgedrukt in gramionen per liter). Voor de alcalische oplossingen lag de grens tusschen $[H^{\cdot}] = 10^{-10.7}$ en $[H^{\cdot}] = 10^{-11.2}$. We mogen aannemen, dat de invloed van zuur en base althans in dit geval grootendeels aan het H'-ionengehalte (en het OH'-ionengehalte) kon worden toegeschreven.

Dezelfde proef werd herhaald met een reeks oplossingen, die inplaats van acetaat en azijnzuur, malaat en appelzuur bevatten, (deze oplossingen bevatten steeds 0,01 grammolecule per liter aan natriummalaat). Voor zure oplossingen werd hier de grens gevonden tusschen $[H^{\cdot}] = 10^{-5.1}$ en $[H^{\cdot}] = 10^{-4.9}$. Voor alcalische oplossingen tusschen $[H^{\cdot}] = 10^{-10.6}$ en $[H^{\cdot}] = 10^{-11.1}$. Deze uitkomsten bevestigden de opvatting omtrent den invloed der H'-ionen. De verschuiving van de grenswaarden in de zure malaat-oplossing en ten opzichte van die in zure acetaat-oplossingen deed echter zien, dat zelfs kleine zoutconcentraties mede van invloed waren.

Opdat genoeg waarnemingen gedaan konden worden om een overzicht te krijgen van het gedrag van het wier in oplossingen van één zout, was het vaak noodig een nieuwe cultuur te gebruiken. In dat geval werden steeds de bepalingen, die het laatst met de oude cultuur waren uitgevoerd, met de nieuwe herhaald. Vaak werden dan niet precies dezelfde grensconcentraties gevonden. In den regel waren de verschillen zoo gering, dat ze verwaarloosd konden worden. Bij de proeven met KCl werd echter ééns bij het gebruik van een nieuwe cultuur een groote verschuiving van de grensconcentraties waargenomen. Figuur 3 geeft aan, hoe bij oplossingen die naast KCl 0.00065 normaal KOH bevatten, de nieuwe cultuur een gewijzigd gedrag vertoonde. De kromme bestaat daardoor uit twee stukken, die niet aaneensluiten. Het is waarschijnlijk, dat het nieuwe stuk inderdaad een voortzetting is van het oude, wanneer we het nieuwe stuk zoowel in horizontalen als in verticalen zin verschuiven. De stippellijnen zullen dan wellicht de gedeelten van de beide stukken verbinden, die met elkaar overeenkomen. Bij de kromme voor natriumacetaat worden gevallen aangegeven, waar bij het gebruik van nieuwe culturen minder belangrijke sprongen geconstateerd werden. De gedeelten I, II en III werden elk met individuen uit een andere cultuur verkregen.

De oorzaak van het verschillend gedrag der culturen zal waarschijnlijk gevonden moeten worden in het feit, dat de voedingsop-

lossing voor de culturen bij het gebruik ervan niet dezelfde samenstelling had. De plasmacolloïden vormen waarschijnlijk verbindingen met zuur en base en adsorbeeren allerlei ionen. Was de voedingsoplossing niet van dezelfde samenstelling dan behoefde het gedrag der plasmacolloïden (en deze waren het waarschijnlijk, die door de electrolytoplossingen beïnvloed werden) niet hetzelfde te zijn. Dat de vloeistof uit de culturen niet steeds dezelfde samenstelling had was vrij zeker.

De behandeling van het wier, voordat het voor de proef gebruikt werd (zie blz. 3), was van dien aard, dat slechts de cultuurvloeistof geheel werd weggenomen. Dat aan de organismen zelf door de behandeling stoffen onttrokken werden, is niet waarschijnlijk. Wel moet dit het geval geweest zijn, wanneer het wasschen in gedistilleerd water langer dan een half uur duurde. In dat geval werd de gevoeligheid ten opzichte van electrolytoplossingen zeer verhoogd.

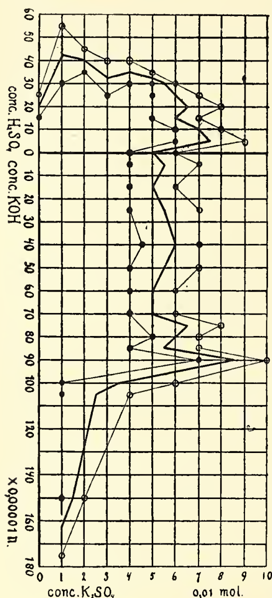


Fig. 1.

Alleen de kromme voor kaliumsulfaat is geheel af[1]). Het verloop van deze kromme is in de meest zure oplossingen (vanaf 0.00015 n. $H_2SO_4$) geheel anders, dan in de meest alcalische oplossingen (vanaf 0.00100 n. KOH). In het laatste geval kunnen we het verloop begrijpen, wanneer we veronderstellen, dat de invloed van het zout en van de OH'-ionen ongeveer additief is. Voor het gedrag van kaliumsulfaat samen met H˙-ionen (zuur) kan van additiviteit geen sprake zijn. Vervolgen we de kromme in de zure oplossingen vanaf de ordinaat-as dan zien wij, dat de lijn zich aanvankelijk hooger in het zure gebied begeeft, d. w. z. dat kleine hoeveelheden zout veroorzaakten, dat er een groote H˙-ionenconcentratie verdragen kon worden. Nadat de concentratie van het sulfaat 0.02 normaal is geworden, gaat de kromme weer terug om verderop

[1]) Bij de het meest zure oplossingen werd de critische concentratie bepaald naar het gehalte aan zuur.

opnieuw een bocht te maken (tot 0.00015 n. $H_2SO_4$ 0.12 n. $K_2SO_4$), die we ontstaan kunnen denken, doordat in dit gedeelte de H˙-ionen den invloed van het zout eenigszins tegenwerkten.

Het verloop van de kromme voor natriumacetaat (fig. 2) is in de meest zure oplossingen (ongeveer van $[H^{\cdot}] = 10^{-5.2}$ tot $[H^{\cdot}] = 10^{-6.4}$)

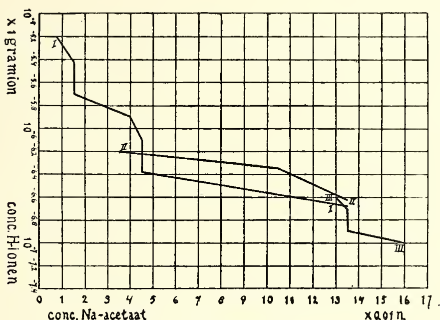



Fig. 2.

van denzelfden aard als dat van de kromme voor $K_2SO_4$ in de meest zure oplossingen. Het was niet mogelijk de H˙-ionenconcentratie aan te geven voor de plaats, waar de kromme de ordinaat-as bereikt. Voor zoover de kromme in dit gedeelte is aangegeven, zien we eveneens twee bochten; de eerste wordt veroorzaakt, doordat kleine hoeveelheden acetaat den invloed der H˙-ionen tegenwerkten, terwijl weer de tweede bocht veroorzaakt wordt, doordat de H˙-ionen den invloed van het zout verminderden.

Dat de invloed van base en van zout ten naastenbij additief was, terwijl zuur en zout elkanders uitwerking belemmerden, is een belangrijk verschijnsel.

Hetzelfde verschijnsel werd waargenomen door HARDY [1]) bij het uitvlokken en het oplossen van globulinen in zure en alcalische oplossingen van zouten. De globulinen vormen colloïdale oplossingen, die, wat hun gedrag tegenover zuren en basen betreft, tot de emulsoïden gerekend moeten worden. Het zijn namelijk colloïden, die positief geladen zijn in zure oplossing en negatief in alcalische oplossing doordat het amphotere lichamen zijn, d.w.z. stoffen, die zich als zuur en als base kunnen gedragen.

1) W. B. HARDY, Journ. of Physiol., Vol. XXXIII, 1905—06.

In nauw verband met het gedrag der globulinen in zure en alcalische zoutoplossingen staat waarschijnlijk, dat de zuurconcentratie, waarbij de globulinen in oplossing gingen, zeer afhankelijk was van den aard van het in de oplossing aanwezige zout, terwijl de alcaliconcentratie daardoor niet of veel minder beïnvloed werd. Ook dit werd door HARDY aangetoond.

Een overeenkomstige eigenaardigheid kwam ook voor den dag in onze proeven over de bewegelijkheid van *Clamydomonas*. We vonden namelijk, dat de zuurconcentratie in zure malaatoplossingen verschoven was ten opzichte van die in zure acetaatoplossingen, terwijl de alcaliconcentratie in malaatoplossingen niet verschoven was ten opzichte van die in acetaatoplossingen (zie blz. 763).

Het gedrag van *Chlamydomonas* vertoonde dus, wat haar bewegelijkheid betrof ten opzichte van zuur, base, zure zoutoplossingen en alcalische zoutoplossingen zeer groote overeenkomst met het gedrag van emulsoïde oplossingen van globulinen ten opzichte van dezelfde agentia.

We mogen daarom de veronderstelling maken, dat de bewegelijkheid van *Chlamydomonas* onder invloed van zure en alcalische zoutoplossingen berust op een colloïd-chemische verandering van de cel, zeer waarschijnlijk het protoplasma. Onverwacht is deze hypothese niet. Steeds wordt het protoplasma als een colloïdale massa beschouwd. Volgens onze waarnemingen zouden de plasma-colloïden eenige eigenschappen van de emulsoïden vertoonen.

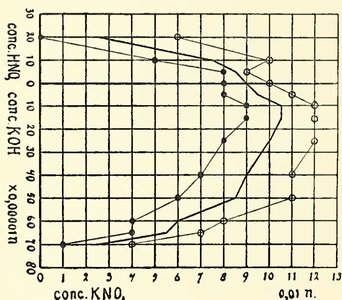



Fig. 3.

Nadat we de overeenkomst hebben waargenomen tusschen de werking van zure zoowel als van alcalische oplossingen op de bewegelijkheid van *Chlamydomonas* en de werking ervan op de emulsoïde globulinen, zullen we nu verder trachten uit te maken, of de invloed van zouten [1]) op de bewegelijkheid van het wier overeenkomst vertoonde met de werking ervan op emulsoïden dan wel met die op de suspensoïden. We moeten daarvoor het stuk van

[1]) Er wordt verondersteld, dat in de nu te bespreken gedeelten van de krommen de invloed van het zout meer op den voorgrond kwam, terwijl in de gedeelten, die reeds besproken zijn de invloed van zuur en base meer op den voorgrond trad.

de kromme voor $K_2SO_4$ tusschen 0.00015 n. $H_2SO_4$ en 0.00100 n. KOH (fig. 1) benevens de krommen voor KCl (fig. 4) en voor $KNO_3$ (fig. 3), voor zoover die zijn aangegeven, bekijken.

Deze gedeelten van de krommen loopen nog al uiteen, wat haar vorm betreft. Voor $KNO_3$ is het verloop het eenvoudigst. Voor $K_2SO_4$ is het 't meest grillig. In één opzicht komen ze overeen, namelijk dat ze ten opzichte van een horizontale lijn, die voor $KNO_3$ bij ongeveer 0.00035 n. KOH (fig. 3), voor KCl misschien bij 0,00045 n. KOH (fig. 4) en voor $K_2SO_4$ bij 0.0040 n. KOH (fig. 1) ligt, ongeveer symmetrisch zijn, al is de as van symmetrie voor $KNO_3$ en voor

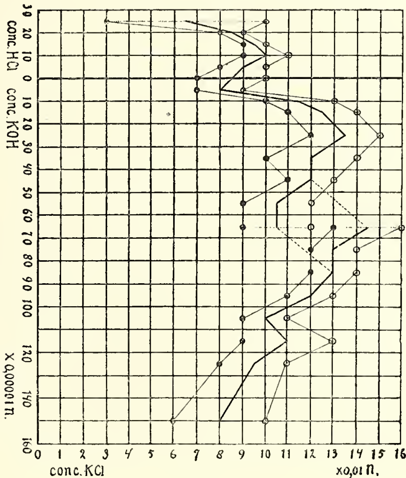



Fig. 4.

KCl niet horizontaal. Deze symmetrie is te opvallend vooral bij $KNO_3$ (fig. 3) en bij $K_2SO_4$ (fig. 1) dan dat zij over het hoofd gezien zou mogen worden. Zij is voor mij een aanwijzing, dat de grilligheid van de krommen in dit gedeelte niet veroorzaakt werd door onnauwkeurigheden in de waarneming, trouwens de zesvoudigheid der experimenten is daar eveneens een waarborg voor.

De symmetrie werd waarschijnlijk veroorzaakt, doordat de zouten werkzaam waren met hunne kationen en hunne anionen. De rol die anionen en kationen speelden, toen de plasmacolloïden positief waren, werd waarschijnlijk omgekeerd toen die colloïden negatief geladen waren.

Het ingewikkeld verloop van de krommen bestaat in de aanwezigheid van toppen, bij $K_2SO_4$ (fig. 1) zijn er duidelijk 5 te onderscheiden, een bij 0,00040 n. KOH, naar beide zijden volgen er nu nog twee, bij 0,00075 n. KOH en bij 0,00005 n. KOH telkens een lage top, bij 0,00090 n. KOH en bij 0,00005 n. $H_2SO_4$ telkens een hooge top. Bij KCl (fig. 4) zijn er misschien ook vijf. Bezien we de kromme voor $KNO_3$ dan lijkt het aanvankelijk of er maar één groot maximum is, dat ongeveer bij 0,00030 n. KOH ligt. Letten we echter op het verloop van de lijnen, die de grensconcentraties verbinden, dan blijkt toch wel, dat er eigenlijk vijf toppen zijn, namelijk, bij 0,00010 n. $HNO_3$, bij 0,00010 n. KOH, bij 0,00030 n. KOH, bij 0,00050 n. KOH en bij 0,00065 n. KOH. Zij zijn weer symmetrisch gerangschikt ter weerszijden van een middelste.

In de colloïdchemische literatuur heb ik niets gevonden, dat een onmiddellijke vergelijking met ons geval toelaat. Misschien wordt dit veroorzaakt, doordat het gedrag van colloïden ten opzichte van zoutoplossingen bij verschillende $H^{\cdot}$-ionenconcentratie meestal niet systematisch onderzocht werd; in die gevallen, waar dit wel gedaan werd, waren de toegevoegde hoeveelheden zuur en base veel grooter.

Toch is het voorkomen van deze toppen niet in strijd met de opvattingen over het gedrag van amphotere colloïden. De eiwitten bijvoorbeeld zouden zich met één en meer moleculen zuur of base kunnen verbinden. Zoo zouden verbindingen ontstaan, die zich zeer verschillend kunnen gedragen tegenover zouten. Nu is men het over de bestaansvoorwaarden van deze verschillende eiwit-zuur- en eiwitbaseverbindingen niet eens. T. B. ROBERTSON [1]) meent intusschen bewezen te hebben, dat de stabiliteit ervan uitsluitend bepaald wordt door de $H^{\cdot}$-ionenconcentratie van de oplossing. Is deze meening juist dan zou de aanwezigheid van de toppen in onze krommen misschien te verklaren zijn.

De concentraties, waarin de zouten werkten, waren gering. Het hoogste bedrag werd gevonden voor $Ca(NO_3)_2$ n.l. 0,40 normaal. Zeer kleine bedragen werden gevonden voor phosfaat. Voor binaire electrolyten waren de concentraties 0,10—0,20 normaal. De grootste tegenstelling vormden meerwaardige kationen en meerwaardige anionen (calciumzout-phosfaat).

Ook uit de figuren 1, 3 en 4 is iets waar te nemen over het verschillend gedrag van éénwaardige en meerwaardige ionen. De kromme voor kaliumsulfaat (fig. 1) is tusschen 0,00015 n. $H_2SO_4$ en 0,00100 n. KOH verticaal gericht. Hier hebben we een tweewaardig

[1]) T. B. ROBERTSON, Die Physikalische Chemie der Proteïne. Dresden 1912.

anion naast een éénwaardig kation; de krommen voor KCl (fig. 4) en $KNO_3$ (fig. 3) zijn van boven naar onder scheef naar links gericht. Hier vinden we een éénwaardig kation naast een éénwaardig anion. Proeven, die ik met $Ca(NO_3)_2$ nam, toonden duidelijk aan, dat de kromme, die daarvoor samengesteld zou kunnen worden nog veel schever gericht zou zijn, maar in dezelfde richting als die voor KCl en $KNO_3$. In dit geval staat een tweewaardig kation naast een éénwaardig anion. Houdt de richting verband met de waardigheid der ionen van het zout dan is de gevonden opeenvolging $K_2SO_4$—KCl en $KNO_3$—$Ca(NO_3)_2$ verklaarbaar.

Ook is het opvallend, dat de kromme voor $K_2SO_4$ (fig. 1) zoover in het alcalische gebied reikt, terwijl de kromme, die voor $Ca(NO_3)_2$ samengesteld had kunnen worden, [1]) voornamelijk in het zure gebied zou zijn komen te liggen.

Zoowel de invloed van de kleine zoutconcentraties als de invloed van de waardigheid der ionen wijzen op een mogelijke overeenkomst tusschen de processen, die zich bij de bewegelijkheidsverandering van *Chlamydomonas* afspelen en het proces, dat zich afspeelt bij de uitvlokking van suspensoïden.

De invloed der zouten op den toestand van emulsoïden, geeft vaak aanleiding tot een rangschikking der ionen in bepaalde reeksen. Voor de anionen is het de reeks van HOFMEISTER. Men zegt, dat bij een proces, dat zich afspeelt overeenkomstig deze ionenreeksen de invloed der zouten lyotroop is.

Het was dus zaak te zien, of de invloed der zouten op de bewegelijkheid van *Chlamydomonas* er een volgens de lyotrope reeksen was. Alleen voor de anionen werd dit onderzocht. Voor wieren uit éénzelfde cultuur werd de volgende reeks gevonden:



$$KJ < KNO_3 < KCl < KBr, KCNS.$$

Dit was allerminst de anionenvolgorde, wanneer de invloed der zouten lyotroop geweest was; dan is ze namelijk:



$$KCl < KNO_3 < KBr < KJ < KCNS.$$

Te veel waarde mogen we aan deze uitkomst niet hechten. De ionenreeksen krijgen de omgekeerde volgorde, wanneer het milieu van alcalisch zuur wordt, terwijl in neutrale oplossingen overgangen tusschen de alcalische en de zure reeksen gevonden worden.

De waarnemingen werden voor *Chlamydomonas* bij 0,00015 n. KOH uitgevoerd, waar we dus veel kans hadden een van de overgangsreeksen te vinden. We waren echter genoodzaakt in zeer

[1]) De concentraties der oplossingen veranderen telkens met 0,05 n.; daardoor waren de uitkomsten niet nauwkeurig genoeg om er een figuur uit samen te stellen.

zwak alcalische oplossingen te werken, omdat we bij een anderen zuurgraad voor de verschillende zouten concentraties zouden vergelijken, die blijkens de krommen eigenlijk niet te vergelijken waren. We zouden dan een maximum bij het eene zout vergeleken hebben met een minimum voor een ander zout. Feitelijk zou men eerst dan een goede vergelijking krijgen, wanneer men de concentraties van een bepaald maximum (bijvoorbeeld het middelste) voor elk der zouten vergeleek.

In ieder geval kunnen we met eenige waarschijnlijkheid zeggen, dat de werking der zouten op *Chlamydomonas* aanleiding zou kunnen geven tot een vergelijking met de suspensoïden en niet met de emulsoïden.

Ook in dit opzicht bestaat een overeenkomst tusschen de verschijnselen, aan *Chlamydomonas* bestudeerd. en processen, die optreden bij de colloïdale globulinen. Ook zij werden in de experimenten van Hardy door kleine hoeveelheden zout uitgevlokt; eveneens speelde de waardigheid der ionen er een groote rol bij.

Men kan de globulinen tot de emulsoïden rekenen dank zij het gedrag dat ze ten opzichte van base en zuur vertoonen. Door het gedrag ten opzichte van zouten moet men dan zeggen, dat het emulsoïden zijn, die eenige suspensoïde eigenschappen bezitten.

We zouden uit onze proeven kunnen besluiten, dat het vermogen van *Chlamydomonas variabilis* om te reageeren op de zwaartekracht, (op het licht en op chemotactica) op zoodanige wijze door electrolyten beïnvloed wordt, dat veel overeenkomst met de werking der electrolyten bij het uitvlokken en oplossen van colloïden bestaat. Om deze reden is de hypothese mogelijk, dat we bij *Chlamydomonas* te doen hebben met een inwerking der electrolyten op de colloïden uit het protoplasma. Deze colloïden zouden zich dan zoodanig ten opzichte van zuur, base en zout gedragen, dat een vergelijking met het gedrag der globulinen (zooals Hardy die gebruikte) het meest voor de hand ligt. De plasmacolloïden zouden zijn emulsoïde stoffen. met eenige suspensoïde eigenschappen.

*Delft*, November 1918.

*Laboratorium voor Technische Botanie.*

---

**Geologie.** — De Heer Molengraaff biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. Brouwer: *„Over Rifpantsers.”*

(Mede aangeboden door den Heer Sluiter).

Een opwaartsche beweging van het land ten opzichte van den zeespiegel kan in tropische gebieden dikwijls met behulp der aanwezigheid van opgeheven strandriffen worden vastgesteld. In het oostelijk gedeelte van den Indischen archipel, waar een rijzing der eilandenreeksen sinds plio-plistoceenen tijd op groote schaal heeft plaats gehad, komen opgeheven strandriffen, die dikwijls samenhangende rifpantsers vormen, dan ook op verreweg het grootste deel der eilanden en soms tot hoogten van bijna 1300 M. b. z. voor.

Het karakter der jongste bodembewegingen in de boogvormige eilandenreeksen van den zuidoostelijken archipel, die de rijzing der eilandenreeksen tengevolge hadden [1]), is reeds in een vorige mededeeling [2]) behandeld, waarnaar hier kortheidshalve wordt verwezen. De jongste bergvorming wordt beschouwd als een herleving van de intensieve jong-tertiaire bewegingen, waarbij de kenmerken der eilandenreeksen er op wijzen, dat, evenals bij de tertiaire, ook bij de jongste bergvorming wederom bewegingen in de richting van het voorland plaats vinden, terwijl aan de oppervlakte veelal breukvorming wordt waargenomen. De rijzing der eilandenreeksen heeft niet overal gelijktijdig en niet overal even krachtig plaats gehad, terwijl ook met de algemeene rijzing sinds het plio-plistoceen perioden van tijdelijke daling kunnen hebben afgewisseld. In het volgende zal worden nagegaan in hoeverre een verband bestaat tusschen den zeer uiteenloopenden vorm der thans door ons waargenomen rifpantsers en het karakter der bodembewegingen. Hierbij zal het bewegingsbeeld der geantiklinalen gedurende lange tijdsruimten op den voorgrond worden gesteld.

---

[1]) G. A. F. Molengraaff. De jongste bodembewegingen op het eiland Timor en hunne beteekenis voor de geologische geschiedenis van den O.-I. Archipel. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 29 Juni 1912, blz. 128.

[2]) H. A. Brouwer. Over de bergvormende bewegingen in het gebied der boogvormige eilandenreeksen van het oostelijk gedeelte van den O.-I. Archipel. Versl. Kon. Akad. v. Wet. XXV. blz. 768.

### *De riffen op het tijdstip hunner vorming.*

Er zijn tal van oorzaken, die de vorming van riffen langs gedeelten der kustlijn kunnen beletten. We noemen b.v. het ontbreken van een vasten ondergrond, de onzuiverheid van het water en vulkanische erupties. Indien zich echter riffen vormen, dan is de vorm der levende riffen in hooge mate afhankelijk van het stadium, waarin het ontwikkelingsproces der bergvorming op dat oogenblik verkeert. Een constant blijvend zeeniveau wordt bij deze en ook bij volgende uiteenzettingen aangenomen, omdat onze gevolgtrekkingen, ook bij een bewegend zeeniveau, in hoofdzaak geldend zullen blijven. Indien de kustlijn geruimen tijd constant blijft of slechts min of meer horizontale verplaatsingen ondergaat, dan zullen zich uitgestrekte horizontale en dikke riffen kunnen vormen, bij min of meer vertikale bewegingen zal het rif vooral in dikte kunnen toenemen als deze beweging in positieven zin geschiedt, terwijl bij negatieve bewegingen het rif spoedig boven zee zal zijn verheven, als het nog slechts een geringe dikte en een geringe uitgestrektheid heeft bereikt.

Al deze verschijnselen zullen zich gelijktijdig op, niet in elkanders nabijheid gelegen punten van een geantiklinaal kunnen voordoen, zoodat reeds tijdens de vorming van het materiaal, dat tot de samenstelling der rifpantsers bijdraagt, belangrijke verschillen in vorm kunnen voorkomen.

### *De ontwikkeling tot rifpantsers.*

Nadat het rif is afgestorven en boven zee is verheven, zijn de vormveranderingen, die door het karakter der bergvorming en den groei der koralen gezamenlijk werden veroorzaakt, afgesloten. Tijdens de voortdurende bergvorming bewegen de rifkalken zich volgens ruimtekrommen van wisselende gedaante, waarvan de vorm wordt beheerscht door het karakter der bergvorming. Bij deze bewegingen kunnen wederom vertikale of horizontale en dalende bewegingen met elkander afwisselen en ieder voor zich gedurende korteren of langeren tijd op den voorgrond treden. De vorm der ruimtekrommen wordt beheerscht door de evolutie van den geantiklinaal op den rug waarvan de rifkalken zich vormden. Het door ons waargenomen rifpantser is het eindproduct dezer gedurende langen tijd voortdurende en zich steeds wijzigende bewegingen. De op een bepaald tijdstip op zeeniveau gevormde riffen, die oorspronkelijk alle in hetzelfde horizontale vlak waren gelegen, bevinden zich in een verder ontwikkelingsstadium der bergvorming in een vlak van

onregelmatige gedaante. De oudste gedeelten van het rifpantser hebben het langst deze samengestelde vormveranderingen ondergaan.

De vorm der rifpantsers wordt behalve door het karakter der bergvorming ook sterk door den invloed der erosie beheerscht.

*Invloed der erosie.*

In rijzende landgebieden, waar de erosie krachtig werkt, behoeft het niet te verwonderen, wanneer van de reeds langen tijd boven zee verheven gedeelten van een rifpantser slechts enkele resten zijn gespaard, terwijl de jongere gedeelten nog als een doorloopend pantser ontwikkeld kunnen zijn. Dit geval kan zich voordoen, is echter niet de regel. Er zijn nl. andere factoren dan de tijdsduur, die den invloed der erosie op het rifpantser beheerschen, we noemen het karakter van den ondergrond, waarop de riffen werden afgezet en het weerstandsvermogen der riffen zelve. Indien de ondergrond uit zachte gesteenten bestaat, die tijdens de diepe insnijding der dalen tot aardstortingen aanleiding geven, zooals bv. een groot deel der mesozoische afzettingen op tal van eilanden van den oostelijken Indischen archipel, dan zal ook het daarop rustende opgeheven rif spoedig verbrokkelen en verdwijnen.

Indien het rif slechts als een dunne korst den ondergrond bedekt, dan zal het des te spoediger verdwijnen, dikke riffen zullen echter geruimen tijd weerstand kunnen bieden en somtijds ook een overigens zachten ondergrond langen tijd als een beschermend dak voor verdwijnen kunnen behoeden.

We hebben reeds hierboven vermeld, dat dikke riffen zich zullen vormen op plaatsen, waar de kustlijn geruimen tijd constant is gebleven of slechts min of meer horizontale of dalende bewegingen heeft ondergaan. Als zoodanig maken ze later deel uit van het rifpantser, terwijl op die plaatsen, waar sterke negatieve bewegingen gedurende langen tijd de kustlijn hebben gekenmerkt, slechts een dun rif kan zijn gevormd, dat later als een dunne dekkende laag in het rifpantser zal voorkomen, welke spoedig door erosie zal kunnen verdwijnen. Want bij dergelijke sterke negatieve bewegingen werkt juist de erosie ook dikwijls zeer krachtig, zoodat beide factoren dan samenwerken om de sporen dezer bewegingen snel uit het rifpantser te doen verdwijnen. Bij negatieve bewegingen van korten duur zal deze leemte slechts door een terrasvormigen bouw tot uiting komen.

We nemen dan ook dikwijls waar, dat op groote hoogten boven

zee het rifpantser volledig is ontwikkeld, terwijl het lager tot aan de kusten niet aanwezig is of nog slechts in geisoleerde stukken is bewaard gebleven, terwijl aan de kusten zelve levende koralen welig groeien. We denken hier bv. aan verschillende door ons waargenomen plaatsen langs de noordkust van het eiland Rotti, langs de kusten van Sermata, Groot-Obi, Ceram en Timor. Het is hier somtijds duidelijk zichtbaar, dat de lager gelegen rifkalken, indien ze nog ten deele zijn gespaard, grootendeels door erosie zijn verdwenen, wanneer ze bv. nog slechts op de ruggen tusschen de dalen die naar de kusten afwateren, zijn gespaard. Langs de noordkust van het eiland Timor eindigt de rifkalkbank van het Talau bekken bij Balibo op een hoogte van ± 610 M.[1]) en tusschen Balibo en de noordkust werd geen spoor van rifkalk aangetroffen. Hier kan zeer goed de rifkalk door erosie zijn verdwenen, waarbij dan de bovengenoemde verhoudingen van een snelle erosie aanwezig moeten zijn geweest, terwijl de hoog gelegen dikke rifkalkbank, hoewel ze langeren tijd aan de erodeerende krachten was blootgesteld als zoodanig is blijven bestaan. Indien op hooger niveau door een dergelijke weerstandbiedende rifkalkbank een rifpantser wederom geheel ontbreekt, dan kan niet worden uitgemaakt of ook hier de erosie haar invloed heeft doen gelden of dat dit gebied reeds van het begin der bergvormende bewegingen als een eiland uit zee heeft omhoog gestoken.

De invloed der erosie op den vorm van het rifpantser kan dus slechts worden beoordeeld voor het gebied beneden de hoogst opgeheven riffen, die door de erosie zijn gespaard.

*Invloed der breuken.*

De invloed der breuken op den vorm der rifpantsers zal er zich in het algemeen toe beperken, dat de oorspronkelijk samenhangende gedeelten in schollen worden verdeeld, die op verschillend niveau en ook in verschillenden stand kunnen worden gebracht. Daar breukbewegingen bij de jongste bergvorming in den oostelijken archipel een groote rol hebben gespeeld, mag men verwachten dat de vorm der rifpantsers hierdoor is beinvloed. Door VERBEEK[2]) wordt bv. een breuk aangenomen over het schiereiland Hoeamoeal in Zuid-West-Ceram, waar de koraalkalkterrassen ten Zuiden van Loehoe tot 350 M. b.z. voorkomen, terwijl de kalk verder noordelijk nauwelijks 100 M.

---

[1]) G. A. F. MOLENGRAAFF, loc. cit., blz. 128.

[2]) R. D. M. VERBEEK. Molukken Verslag. Jaarb. v. h. Mijnwezen. Wet. Ged. 1908, blz. 550.

hoogte bereikt. In het verlengde dezer verschuiving liggen aan de zuidkust van Ceram de plaatsen Hatoesoea (oostzijde der Piroe baai) Paulohi en Tehoro, welke tijdens de aard- en zeebeving van 30 September 1899 het sterkst werden getroffen en ook de steile zuidoostkust van Boeroe.

Als breukbewegingen in de nabijheid der kusten plaats vinden, dan zullen hierdoor op korten afstand dalende naast rijzende bewegingen kunnen plaats hebben en zal de factor van den groei der levende koralen langer dan normaal zijn invloed op den vorm van het zich ontwikkelende rifpantser kunnen doen gelden.

*De helling der geantiklinaalassen.*

Bij de bespreking van de ontwikkeling der rifpantsers hebben we reeds vermeld, dat elk punt van een gevormd rif zich volgens ruimtekrommen van wisselende gedaante zal bewegen. De horizontale componente der bewegingssnelheid op een bepaald tijdstip kan worden ontbonden volgens twee onderling loodrechte richtingen, waarvan de eene met de geantiklinaalas samenvalt.

De vertikale componente beheerscht de rijzing der eilandenreeksen. Door de verschillende grootte en richting der bewegingssnelheid op verschillende punten ontstaan de vormveranderingen van het oppervlak der geantiklinalen, waarvan we in de eerste plaats die volgens de geantiklinaalas zullen beschouwen.

Door de veranderingen, die deze as gedurende een bepaalden tijdsduur ondergaat kan de helling op sommige plaatsen worden versterkt, op andere worden verzwakt. Indien we ons voorstellen, dat de top der geantiklinaal op dezelfde plaats blijft, dan zullen bij vergrooting der helling de verschillende punten der as aan weerszijden bewegingen uitvoeren, die volgens een horizontale richting in de richting van den top en volgens een vertikale dalende richting kunnen worden ontbonden. Ook bij een geringe rijzing van den top zullen op lager niveau langs de as nog dalende bewegingen naast horizontale kunnen plaats hebben. Het zal in dit geval in een bepaald stadium der evolutie van de geantiklinaalas van den stand van het zeeniveau afhangen of een in dit stadium gevormd rif op- of neerwaarts zal worden bewogen. Steeds zal het rif in horizontale richting worden verplaatst, breukbewegingen blijven hier buiten beschouwing. Omgekeerd zullen tijdens een daling van den top der geantiklinaal bij bepaalde standen van het zeeniveau de dwarskusten kunnen rijzen.

In het algemeen zal bij de vormverandering van het beschouwde deel der geantiklinaalas de top niet op zijn plaats blijven, maar zal

hij behalve in vertikale ook in horizontale richting worden verplaatst en bovendien zal de helling aan weerszijden van den top niet op dezelfde wijze toe- of afnemen. Bij deze onregelmatige bewegingen zullen de dwarskusten aan weerszijden zich niet gelijkwaardig behoeven te gedragen en in het algemeen kan worden gezegd, dat bij een genoegzamen afstand van den top der geantiklinaalas tot de kustlijnen, d.w.z. bij de grootere eilanden, de vertikale ontbondene der bewegingssnelheid op de toppen niet gelijk gericht behoeft te zijn met die op de snijpunten van de geantiklinaalas met het zeeoppervlak. Deze vertikale ontbondene is bij de vormverandering der geantiklinaalas voor verschillende punten langs de as van verschillende grootte.

De hellende geantiklinaalassen in het tegenwoordige stadium der bergvorming zijn b.v. duidelijk in de door straten van elkander gescheiden eilanden der Timor eilandenreeks en uit het bovenstaande mag worden afgeleid, in de eerste plaats dat de bewegingssnelheid, welke we in den jongsten tijd aan de dwarskusten der grootere eilanden waarnemen, niet van dezelfde grootte is, maar ook niet gelijk gericht behoeft te zijn met de bewegingssnelheid der toppen. Dit geldt ook voor de vroegere stadia van het bergvormend proces en in de tweede plaats blijkt dus, dat de hoogte waartoe een rif is opgeheven geenszins alleen afhankelijk is van den tijd, die sinds zijn vorming is verloopen, maar van de evolutie der geantiklinaalas, waardoor riffen van denzelfden ouderdom tot verschillende hoogten kunnen zijn opgeheven [1]) en de hoogst opgeheven riffen soms niet de oudste zullen zijn.

*Asymmetrische rifpantsers.*

Bij een asymmetrische ontwikkeling der geantiklinaalas aan weerszijden der hoogste punten zullen asymmetrische rifpantsers worden gevormd. Het zijn de wisselende grootte en richting van de horizontale ontbondene der bewegingssnelheid, welke deze asymmetrie doen ontstaan.

Meer in het bijzonder zullen we deze ontwikkeling beschouwen in een vlak loodrecht op de geantiklinaalas, zooals deze b.v. heeft plaats gehad op het eiland Rotti en op het eiland Jamdena der Tenimber groep. De rifpantsers stijgen hier vanaf de noordwestkusten zeer geleidelijk tot de hoofdwaterscheidingen der eilanden, om vandaar snel naar de zuidoostkusten te dalen. Door erosie zijn gedeelten der rifpantsers verdwenen.

---

[1]) Zooals b.v. op Timor. Vgl. G. A. F. Molengraaff, loc. cit., blz. 132 en J. Wanner, Geologie van West-Timor. Geol. Rundschau IV, 1913, blz. 139.

Het verband dezer asymmetrische rifpantsers met bodembewegingen van bepaald karakter mag worden afgeleid uit het samengaan van den asymmetischen bouw met sterke buitenwaartsche ombuigingen der eilandenreeks, waartoe de genoemde eilanden behooren [1]).

Het eiland Jamdena ligt ongeveer tegenover een verdieping in het voorland (Sahoel bank en Arafoera Zee), de geantiklinaal ondervond hier minder weerstand en kon gemakkelijker dan elders in de richting van het voorland worden bewogen. De horizontale ontbondene der bewegingssnelheid loodrecht op de geantiklinaalas zal hierbij belangrijk grooter kunnen zijn dan de vertikale, de opheffing boven zee zal in verband daarmede geringer zijn, terwijl de ongelijke grootte van horizontale ontbondenen voor verschillende punten de asymmetrische vormen tijdens de ontwikkeling kan versterken of ook plaatselijk kan verzwakken. Overigens geldt uiteraard voor de bewegingen langs de lengtekusten en ook voor den onderlingen ouderdom van, tot verschillende hoogten opgeheven, riffen hetzelfde als reeds bij de ontwikkeling der geantiklinaalassen voor de dwarskusten is medegedeeld. De asymmetrische rifpantsers, tijdens wier ontwikkeling de horizontale bewegingen een groote rol hebben gespeeld, zullen zich gedurende een bepaalden tijdsduur in het algemeen tot geringere hoogte boven zee ontwikkelen dan de symmetrische, een gelijke grootte der bergvormende krachten vooropgesteld. Men vergelijke in dit opzicht de tot bijna 1300 M. hoogte opgeheven riffen van het eiland Timor en de resp. tot ± 470 en ± 150 M. hoogte opgeheven riffen van de eilanden Rotti en Jamdena, welke zeer goed van ongeveer gelijken geologischen ouderdom kunnen zijn.

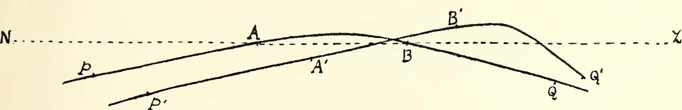



Fig. 1.

Dalende lengtekusten kunnen voorkomen bij rijzende eilanden. Nemen we b.v. een der mogelijke gevallen bij de ontwikkeling van een asymmetrisch rifpantser, zooals dit in fig. 1 is voorgesteld. De punten $P$,$A$ en $Q$ zullen in een verder ontwikkelingsstadium b.v. gekomen zijn in $P_1$,$A_1$ en $Q_1$. Het zeeniveau is door de lijn $NZ$ aangegeven. Het gedeelte $AB$ van den geantiklinaal stak in het begin-

[1]) H. A. Brouwer, loc. cit., blz. 770—772.

stadium als eiland boven zee omhoog en kan met een doorloopend rifpantser bedekt zijn geweest.

Tijdens de ontwikkeling tot het tweede door ons beschouwde stadium zal het eiland in omvang toenemen en hooger boven zee worden verheven. Aan de noordkust worden echter tijdens deze ontwikkeling dalende bewegingen waargenomen, aan de zuidkust sterke stijgende bewegingen.

Het oorspronkelijk oudste rifpantser *AB* zal vervormd zijn en ten deele onder zee zijn verdwenen, terwijl de hoogst opgeheven riffen in het tweede stadium geenszins de oudste zijn, zoodat oudere riffen in lager niveau dan jongere zullen voorkomen. We wijzen in verband met de bovenvermelde daling langs den, het zwakst hellenden vleugel van den zich asymmetrisch ontwikkelenden geantiklinaal, op de verdronken rivierdalen, welke door ons tot ver landin werden waargenomen langs de noordwestkust van het door een asymmetrisch rifpantser gekenmerkte eiland Jamdena der Tenimber groep. De daling kan hier ook slechts schijnbaar zijn, in verband met een post-glaciale rijzing van het zeeoppervlak [1, 2]).

In tegenstelling met het eiland Timor worden de eilanden Rotti en Jamdena, ook in hun centrale deelen, thans grootendeels door een samenhangend rifpantser bedekt. We schrijven dit toe aan den invloed der erosie, in verband met het overheerschen der horizontale bewegingen in een richting loodrecht op de geantiklinaalas. Op laatstgenoemde eilanden werden hierdoor langs de lengtekusten meer resistente rifpantsers gevormd, die bovendien minder hoog boven zee werden verheven, zoodat om een dubbele reden het rifpantser minder sterk werd aangetast, terwijl het langs de snel gerezen lengtekusten van Midden-Timor eveneens om een dubbele reden geheel of grootendeels door erosie is verdwenen.

Men vindt aan het voorkomen van asymmetrische rifpantsers dikwijls de uitdrukking verbonden, dat de eene kust meer dan de tegenoverliggende is opgeheven. Bij een dergelijke verklaring komen echter de horizontale componente der bewegingssnelheid en de voortdurende vervorming der geantiklinaal niet voldoende tot haar recht, terwijl deze bij de ontwikkeling der rifpantsers dikwijls een groote rol hebben gespeeld. In het in fig. 1 voorgestelde geval ligt het, oorspronkelijk aan de zuidkust gevormde rif in een volgend stadium op de noordelijke helling van het hoogere eiland, zoodat dan

[1]) R. A. Daly. The glacial-contral theory of coral reefs. Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences. Vol. 51. N⁰. 4, blz. 157. 1915.

[2]) G. A. F. Molengraaff. Het probleem der Koraaleilanden en de isostasie. Versl. Kon. Akad. v. Wet. XXV, 1916, blz. 215.

moeilijk van een sterkere opheffing der zuidkust kan worden gesproken. Men kan zich zelfs voorstellen, dat ook $B_1$ nog noordelijk van de kustlijn van het nieuwe eiland is gelegen, zoodat dan het oorspronkelijke eiland geheel door zee wordt bedekt, terwijl een nieuw eiland verder zuidelijk is verrezen.

*Rifvormingen der Sermata eilandengroep.*

We hebben boven uiteengezet, dat de riffen, die op een bepaald tijdstip in de ontwikkelingsgeschiedenis der bergvorming langs de kusten van een geantiklinaal zijn gevormd tijdens de verdere ontwikkeling zeer verschillende bewegingen kunnen uitvoeren. De snelheid en de richting der beweging kunnen reeds op betrekkelijk geringen afstand belangrijk verschillen. Dit wordt duidelijk geïllustreerd door de bewegingen der riffen gedurende het ontwikkelingstijdperk der geantiklinaal, waarin slechts haar hoogste toppen als een groep van kleinere eilanden boven zee uitsteken. Meer in het bijzonder beschouwen we de bewegingen der eilanden Loeang, Moa, Kisser en Letti.

Naar mijne waarnemingen op Loeang wordt dit, geheel uit permische gesteenten opgebouwde, eiland met twee kleine eilandjes nabij de zuidoostpunt geheel door een zeer breed rif omgeven, dat zich ver in de richting van Sermata en ook ver westwaarts uitstrekt. Groene eilandjes ver van de noordkust en onbegroeide droogvallende gedeelten ver van de zuidkust geven de grenzen in noordelijke en zuidelijke richting aan, daarbuiten wordt de zee snel dieper. Bij laag water loopt dit rif ten deele droog. Zoowel Loeang als de beide kleine eilandjes dicht ten Zuidoosten ervan rijzen steil uit dit breede rif omhoog en er werd geen spoor van opgeheven rifkalk waargenomen, zoodat bewijzen van een periode van belangrijke rijzing ontbreken. Het eiland Loeang en de twee nabijgelegen eilandjes maken geheel den indruk van oorspronkelijk te hebben samengehangen, terwijl ze door een positieve beweging van elkander werden gescheiden en door deze beweging kan ook de vorming van het, plaatselijk door begroeide eilandjes begrensde, breede rif rondom de eilanden worden verklaard. Bij een post-glaciale rijzing van het zeeoppervlak is de daling van het land slechts schijnbaar.

Beschouwen we thans het eiland Moa, meer in het bijzonder de oostelijke helft er van. Het grootste deel van het eiland bestaat uit een laag, zeer breed koraalkalkplateau, dat zich niet meer dan 10 à 20 M. boven zee verheft en waaruit in het oostelijk deel het, geheel uit peridotieten bestaande, Kerbau gebergte steil oprijst [1].

[1] H. A. Brouwer. Geologie van een gedeelte van het eiland Moa. Jaarb. v. h. Mijnwezen Verhandel. 1916. I, blz. 39.

Ook op het Kerbau gebergte troffen wij geen sporen van opgeheven rifkalk aan en indien we het oostelijk deel van Moa over een geringe hoogte gedaald denken, dan zou dit gebied een soortgelijk aspect vertoonen als thans het eiland Loeang. De beide bergen, de Gg. Kerbau en de Bt. Merah zouden als twee afzonderlijke eilanden steil uit zee omhoog rijzen en geheel door een breed rif zijn omgeven.

We meenen te mogen aannemen, dat ook het laatstgenoemde gebied een soortgelijk stadium heeft doorloopen, als dat waarin thans het eiland Loeang verkeert en dat het na een dalings- of een lange stationnaire periode, of na een schijnbare post-glaciale daling volgens Daly, door een opheffing boven zee is verheven. Door deze opheffing werd ook het oostelijk met het westelijk deel van Moa tot één eiland vereenigd, in het westelijk deel komen hooger opgeheven rifkalken voor, zoodat deze beide, thans vereenigde eilanden of eilandengroepen blijkbaar aan sterk verschillende bodembewegingen onderworpen zijn geweest.

Wederom anders gedroeg zich het, door zijn zonderlingen vorm gekenmerkte, eiland Kisser. Het min of meer ronde eiland wordt geheel door een muur van, in verscheidene (meestal 5) terrassen opgeheven rifkalk omgeven, die slechts door enkele nauwe kloven, waardoorheen riviertjes naar zee stroomen, wordt doorbroken. Wij leerden dit eiland slechts vanuit zee kennen, volgens Verbeek [1]) bereikt de opgeheven rifkalk in het westelijk deel van het eiland nabij Leweroe' een hoogte van 147 M., terwijl in het binnenland, dat in hoofdzaak uit amphibolietheuvels is opgebouwd, toppen tot ± 240 M. voorkomen. De terrasvormige bouw der rifkalken wijst op een rijzing van het eiland, die herhaalde malen door een periode van stilstand of — in verband met de groote dikten der rifkalken (tot 80 M.) — van daling werd onderbroken waardoor een rifpantser werd gevormd, dat aan de erosie krachtig weerstand heeft kunnen bieden.

Het eiland Letti vertoont thans een geheel ander aspect als het eiland Kisser, maar waarschijnlijk is ook dit eiland gedurende de opheffingsperiode telkens door een min of meer gesloten ring van strandriffen omgeven geweest, waarvan op grootere hoogten slechts hier en daar enkele resten zijn overgebleven op 115, 129 en 134 M. b.z. [2]). Hier zijn door erosie de hooggelegen rifkalken bijna geheel verdwenen, hetgeen — in verband met hetgeen door ons, omtrent

---

[1]) R. D. M. Verbeek, loc. cit., blz. 432.

[2]) G. A. F. Molengraaff en H. A. Brouwer. De geologie van het eiland Letti. Jaarb. Mijnw. 1914. Verhand. I, blz. 82.

den invloed der erosie is medegedeeld — met langdurige en niet onderbroken negatieve bewegingen in verband kan worden gebracht.

We zouden deze voorbeelden nog met talrijke afwijkende rifvormingen van naburige eilanden kunnen aanvullen, maar uit het bovenstaande blijkt reeds voldoende, dat de evolutie van den geantiklinaal tijdens de bergvormende bewegingen reeds op betrekkelijk geringen afstand zeer ongelijkmatige bewegingen tengevolge heeft gehad.

*Kantelende eilanden.*

We denken hierbij b.v. aan het eiland Misool ten Noorden van Ceram. Levende koralen groeien welig, zoowel aan de zuid- als aan de noordkust, doch opgeheven rifkalken komen slechts voor in het vlakke noordelijk gedeelte van het eiland, terwijl ze langs de steilere zuidkust tot voorbij de waterscheiding geheel ontbreken. Van een kanteling van het eiland als zoodanig mag worden gesproken, indien we aannemen, dat de zuidkust langs een breuklijn is afgezonken, terwijl de noordkust gelijktijdig is gerezen. Dit is speciaal voor het eiland Misool zeer goed mogelijk, omdat in den archipel langs de zuidkust door WANNER [1]) tal van breuken zijn geconstateerd, die het diepe zeebekken, tusschen Misool en Nieuw-Guinea eenerzijds en Ceram anderzijds, aan de noordzijde begrenzen.

Dergelijke rifvormingen kunnen echter ook zeer goed op andere wijze ontstaan, waarbij niet meer van kanteling mag worden gesproken, omdat de beweging niet door het eiland als zoodanig wordt uitgevoerd, maar in het begin- en in het eindstadium verschillende gedeelten van een evolueerenden geantiklinaal zich als eiland aan ons vertoonen. We hebben slechts in fig. 1 de geantiklinaal in $P^1 B^1 Q^1$ als beginstadium te nemen en in $PBQ$ als eindstadium. In het eindstadium is de geantiklinaal dan dieper onder zee verzonken, maar aan de noordkust zal een opgeheven rifpantser worden waargenomen. Ook bij rijzende geantiklinalen zal een soortgelijke verdeeling der opgeheven rifkalken ontstaan, b.v. op de wijze, zooals in fig. 2 is voorgesteld. In het eindstadium $P^1 A^1 B^1$ zullen slechts

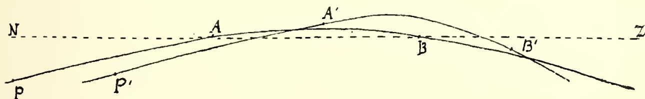



Fig. 2.

[1]) J. WANNER. Beiträge zur geologischen Kenntniss der Insel Misol, Tijdschr. Kon. Ned. Aardrijksk. Gen. 1910, blz. 498.

opgeheven riffen voorkomen aan de noordzijde van het nieuwe eiland, nl. tusschen $A^1$ en de noordkust. Het eiland is dan niet eenvoudig gekanteld, maar geeft het op een bepaald tijdstip boven zee uitstekende gedeelte aan van een zich ontwikkelenden, in een rijzend stadium verkeerenden, geantiklinaal.

Uit het bovenstaande, waarbij het bewegingsbeeld der, zich gedurende lange tijdsruimten ontwikkelende, geantiklinalen op den voorgrond is gesteld, kan o.a. het volgende worden afgeleid:

1. De tijdens negatieve bewegingen gevormde deelen van een rifpantser zullen om een dubbele reden wederom snel door erosie verdwijnen en belangrijke leemten in de ontwikkeling van een rifpantser kunnen dus wijzen op langdurige en niet onderbroken negatieve bewegingen.

2. Bij geantiklinalen, die over groote oppervlakten boven zee zijn verheven, kan — ook bij constant blijvend zeeoppervlak — uit waarnemingen langs de kusten niet omtrent de bewegingen der hoogste punten worden geoordeeld.

3. De ontwikkeling van den geantiklinaal brengt riffen van denzelfden ouderdom op verschillende, soms op zeer verschillende hoogten.

4. De hoogste deelen van een rifpantser behoeven niet het oudst te zijn, ook als breukbewegingen buiten beschouwing blijven.

5. Op den top van een evolueerenden geantiklinaal kan een eiland verdwijnen, zonder dat een eiland verdwijnt.

6. Eilanden kunnen kantelen en schijnbaar kantelen.

---

**Anatomie.** — De Heer Boeke biedt eene mededeeling aan van den Heer A. B. Droogleever Fortuyn: *„Over Vertebratenzenuwen met den bouw van Evertebratenzenuwen."*

(Mede aangeboden door den Heer van Bemmelen).

Het is bekend genoeg, dat de reukcellen uit het neusslijmvlies der gewervelde dieren zintuigzenuwcellen zijn, d.w.z. zintuigcellen, die niet door zenuwvezels omsponnen worden, maar wier cellichaam zich rechtstreeks in een uitlooper voortzet, die alle kenmerken van een zenuwvezel heeft. Deze zenuwvezels, de fila olfactoria, stellen den nervus olfactorius samen. De nervus olfactorius vertoont zoodoende een bouw, die van dien van alle andere zenuwen der Vertebraten afwijkt. Dat dit zoo is kan reeds blijken uit het feit, dat zintuigzenuwcellen bij gewervelde dieren buiten het neusslijmvlies slechts in de retina als staafjes- en kegeltjescellen worden aangetroffen en misschien ook in het pineaalorgaan. Alle zenuwen der Vertebraten met uitzondering van den nervus olfactorius zijn dus vrij van zenuwuitloopers van zintuigzenuwcellen. Daarentegen bevat de groote meerderheid der zenuwen der Evertebraten wel degelijk uitloopers van zintuigzenuwcellen, die hier steeds in allerlei zintuigen over het geheele lichaam zijn verspreid. Verscheidene malen bestaan bij ongewervelde dieren zenuwen zelfs uitsluitend uit bundels zenuwuitloopers van zintuigzenuwcellen, evenals bij den nervus olfactorius der Vertebraten het geval is. Vandaar mijn conclusie, dat wij in den reukzenuw der gewervelde dieren een Evertebratenzenuw hebben te zien, een zenuw zoo gebouwd als bij Evertebraten herhaaldelijk, bij Vertebraten nergens anders voorkomt.

Een opvallend verschilpunt tusschen de zenuwen der gewervelde en ongewervelde dieren is verder dit, dat gangliecellen bij de Evertebraten meestal langs het heele verloop van den zenuw afzonderlijk of in groepen, ganglien, verspreid liggen, terwijl deze in de Vertebratenzenuwen of geheel ontbreken, of in zeer weinige ganglien, (spinaalganglien, hersenzenuwganglien) liggen opgehoopt. Wanneer wij nu lezen (zie bijv. het samenvattend overzicht van Prof. van Wijhe in deze Verslagen, Deel XXVI, 1918), dat ook bij den nervus terminalis der Vertebraten gangliecellen langs het geheele verloop van den zenuw liggen verspreid, dan is dit reden om ook

aan den nervus terminalis het karakter van een Evertebratenzenuw toe te kennen. Maar het is dan, zooals men zal inzien, toch een zenuw van weer een ander type dan de nervus olfactorius.

In aansluiting aan het bovenstaande mag ik er misschien even op wijzen, dat Amphioxus, die wat het zenuwstelsel betreft in den regel met de Vertebraten vergeleken wordt, echte Evertebratenzenuwen tot sensibele zenuwen heeft. De meeste of alle zenuwen bevatten immers uitloopers van zintuigzenuwcellen, daar deze cellen over het geheele lichaam verspreid liggen en bovendien liggen langs de meeste sensibele zenuwen verstrooide gangliecellen. Spinale ganglien ontbreken dan ook.

*Leiden, Anatomisch Kabinet.*

---

**Anatomie**. — De Heer Boeke biedt eene mededeeling aan van den Heer A. A. Hueber over: „*Musculus transversus orbitae*".

(Mede aangeboden door den Heer v. Bemmelen).

Deze, reeds door Bochdalek [1]) beschreven, spiervarieteit werd aan het lijk van eene 33-jarige vrouw gevonden. De hier gevonden varieteit wijkt in menig opzicht van Bochdalek's vondst af; daarom is het misschien niet ongewenscht, dit geval te publiceeren. De spiervarieteit was in beide oogkassen aanwezig; rechter- en linker-musc. transversus vertoonden eenige punten van verschil.

In de *linkerorbita* verloopt de musc. transversus over 't algemeen dwars over den aequator van den oogbol en is zoowel aan den binnensten als aan den buitensten oogkaswand bevestigd.

De spier ontspringt met een 7 m.M. breede, platte en dunne pees van het voorste deel van de lamina papyracea ossis ethmoïdalis, ongeveer 2 m.M. achter de trochlea. De peesvezels gaan spoedig over in spiervezels; de spier wordt nu, naar lateraal gaande, smaller en tegelijkertijd ronder, en gaat dan als een 2 m.M. breed spiertje onder den musc. obliquus sup. door, deze laatsten rechthoekig kruisend. Op een afstand van ongeveer 1 c.M. van den medialen orbitaalwand, verbreedt de spier zich en plat zich tegelijkertijd af. Deze verbreeding komt hierdoor tot stand, dat spiervezels, komende van den medialen rand van den musc. levator palpebrae sup. naar mediaal ombuigen en in den musc. transversus overgaan. De musc. transversus begeeft zich verder naar lateraal en vormt dan een kruising met de vezels van den musc. levator palpebrae, die zeer eigenaardig is. De vezels van den musc. transversus doorboren die van den musc. levator palpebrae, maar op deze wijze, dat de musc. levator voor het grootste deel over den musc. transversus heenloopt; slechts een spierbundeltje van ongeveer 3 m.M. breedte loopt onder den musc. transversus door. Beide deelen van den musc. levator, door den musc. transversus van elkaar gescheiden, vereenigen zich in hun verloop naar voren weer met elkaar. Op de kruisingsplaats is de musc. transversus ongeveer 4 m.M., de musc. levator ongeveer 10 m.M. breed.

---

[1]) Bochdalek, Beitrag zu den anomalen Muskeln in der Augenhöhle. Vierteljahrschrift für die Praktische Heilkunde. Prag. 1868. Bd. IV.

Lateraal van de kruisingsplaats gaat de musc. transversus over in een dunne, platte pees, welke onder de gland. lacrimalis naar den lateralen orbitaalwand gaat, en zich onder den onderrand van de traanklier aan den lateralen orbitaalwand vasthecht.

De musc. levator palpebrae splitst zich na de kruising op de gewone wijze in een bovenste en een onderste blad. Het bovenste blad gaat spoedig in de peesuitbreiding over, die zich aan de huid van het bovenste ooglid, mediaal aan de tarsus sup. en aan de kapsel van TENON en lateraal aan het voorste deel van den lateralen orbitaalwand vasthecht. De verhoudingen van het onderste blad wijken eenigszins van het normale af. Na de afsplitsing van het bovenste blad gaat het onderste blad in een sterk ontwikkeld blad van glad spierweefsel over: de musc. tarsalis sup. De laterale, vrije rand van het onderste blad is ongeveer 3 m.M. lang en vergroeit dan met de kapsel van TENON. Het onderste blad gaat nu op de normale wijze naar voren en zet zich aan den bovenrand van de tarsus sup. vast; het mediale deel van het blad heeft dezelfde aanhechtingspunten als het bovenste, want aan deze zijde hangen beide bladen met elkaar samen. Het laterale deel echter vertoont een grootere uitbreiding dan normaal.

Volgens VIRCHOW [1]) moeten beide laterale randen van het bovenste en onderste blad elkaar dekken; in ons preparaat is dat niet het geval, want we zien, dat het laterale deel van het onderste blad zich meer naar achter uitbreidt. Dit deel van het onderste blad nu verbindt zich met de laterale uitbreiding van den musc. transversus en beide deelen vormen zoo een pezig blad, dat zich onder de traanklier naar den lateralen orbitaalwand begeeft en zich hieraan als een 20 m.M. breede, platte pees vasthecht. Dit peesblad is, zooals wij hiervoor reeds van het onderste blad van den musc. levator palpebrae opgemerkt hebben, met de kapsel van TENON vergroeid. Het orbitale deel van de traanklier bevindt zich voor het grootste deel op het door den musc. transversus en den musc. levator palpebrae gevormde peesblad; een klein deel ervan overschrijdt naar voren den lateralen rand van het bovenste blad van den musc. levator. Het conjunctivale deel der traanklier bevindt zich tusschen de beide bladen van den musc. levator palpebrae.

In de *rechter orbita* [2]) vertoont de musc. transversus over 't alge-

---

[1]) H. VIRCHOW, Über Tenon'schen Raum und Tenon'sche Kapsel. Abhandl. der Kön. Preuss. Akad. der Wissenschaften. 1902.

[2]) In de rechter orbita is de musc. levator palpebrae doorgesneden, om het verloop van den musc. transversus duidelijker te doen zien.

meen hetzelfde beeld als in de linker, echter is de spier hier sterker ontwikkeld als links.

De krachtige, pezige oorsprong, eveneens van het voorste deel van de lamina papyracea ossis ethmoïdalis, is ongeveer 8 m.M. breed en bevindt zich tegen en iets onder de trochlea. Nadat de 3 à 4 m.M. lange, platte pees in de spiervezels overgegaan is, wordt ook hier de spier smaller en heeft deze gedurende zijn verloop onder den musc. obliquus sup. een breedte van 3 m.M. en een dikte van 1 m.M. Op een afstand van 7 m.M. van den medialen orbitaalwand verbreedt de spier zich weer, zooals aan de linkerzijde, omdat vezels, komende van den medialen rand van den musc. levator palpebrae, naar mediaal ombuigen en in den musc. transversus overgaan. De spier kruist dan den musc. levator palpebrae loodrecht en verloopt hier nagenoeg geheel onder den musc. levator. Slechts twee smalle spierbundeltjes van den musc. levator, ieder ongeveer 1 m.M. breed, loopen dóór resp. onder den musc. transversus, en vereenigen zich, naar voren gaande, weer met de hoofdmassa van den musc. levator. Zie fig. 1, 2, 3. Op de kruisingsplaats is de musc. transversus 6 m.M., de musc. levator 14 m.M. breed. De musc. transversus begeeft zich dan verder naar den lateralen orbitaalwand, loopt onder de gland. lacrinalis door en hecht zich op dezelfde wijze als links aan den lateralen orbitaalwand vast.

De verbinding van den musc. transversus met het onderste blad van den musc. levator palpebrae stemt geheel met die van de linkerzijde overeen. De musc. tarsalis sup. is hier nog sterker ontwikkeld

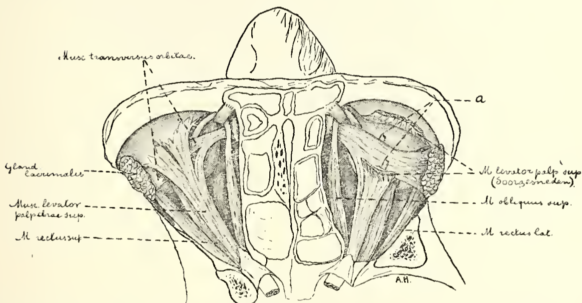



Fig. 1.

dan de linker, vooral aan den lateralen kant. De vrije rand van het onderste blad van den musc. levator palpebrae is hier ± 5 m.M.

lang; het onderste blad verbindt zich dan met de laterale uitbreiding van den musc. transversus en beide vormen zooals aan de linkerzijde

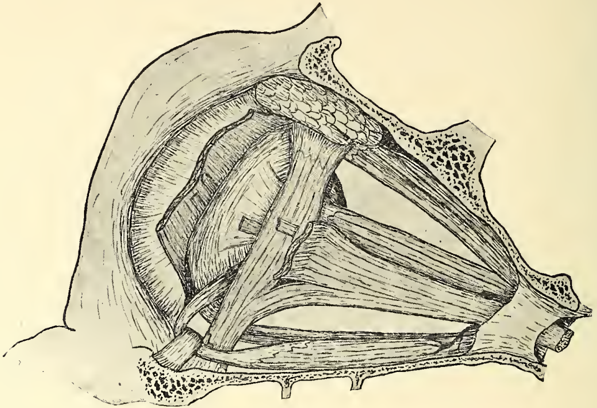


Fig. 2.

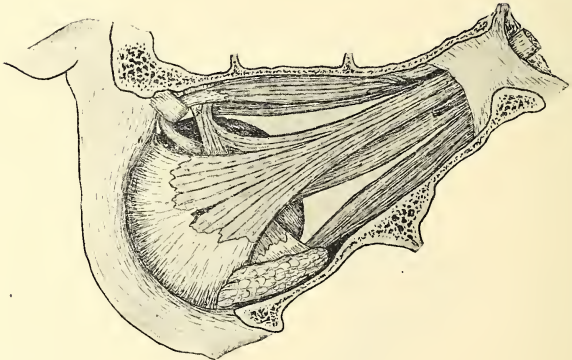


Fig. 3.

een peesblad, dat zich met een breedte van 18 m.M. aan den lateralen orbitaalwand vasthecht. Het peesblad is ook hier met de kapsel van Tenon verbonden. De traanklier verhoudt zich als aan de linkerzijde.

De voornaamste punten van onderscheid tusschen rechter en linker

musc. transversus zijn dus, dat de rechter musc. transversus krachtiger ontwikkeld is dan de linker en de rechter musc. transversus meer onder de musc. levator palpebrae doorloopt dan de linker.

Vergelijken wij nu het door ons beschreven geval met de vondst van Bochdalek, dan moeten we belangrijke punten van verschil vaststellen.

Bochdalek vond den musc. transversus vereenigd met den reeds door Albinus [1]) beschreven musc. gracillimus, die in nauw verband stond met den musc. transversus. Deze musc. gracillimus ontbreekt hier geheel; het door ons beschreven geval is dus het eerste, waar de musc. transversus ongecompliceerd met andere abnormale spieren voorkomt.

Bochdalek wijst er verder op, dat er tusschen den door hem gevonden musc. transversus en den musc. levator palpebrae een innige samenhang bestond en wel op deze wijze, dat de meeste vezels van beide spieren onscheidbaar met elkaar versmolten, andere deels naar voren en deels naar achteren zich aan den medialen rand van den musc. levator palpebrae met dezen versmeltend, ombogen en een belangrijk deel van den musc. transversus, den musc. levator palpebrae doorborend, zich naar den lateralen orbitaalwand begaven.

Vergelijkt men onze beschrijving daarmede, dan blijkt, dat hier van een innigen samenhang tusschen musc. transversus en musc. levator palpebrae geen sprake kan zijn. Op de eerste plaats ontbreekt hier een ombuigen van vezels van den musc. transversus naar voren. Ten tweede kan ook een onscheidbare verbinding tusschen de vezels van den musc. transversus en den musc. levator niet vastgesteld worden. En ten derde kan men hier ook eigenlijk niet spreken van een doorboren van den musc. levator palpebrae door den musc. transversus, omdat de musc. transversus bijna geheel onder den musc. levator doorloopt en slechts eenige dunne spierbundeltjes van den musc. levator onder den musc. transversus verloopen en dat nog slechts voor een deel.

De voornaamste punten van overeenkomst zijn de samenhang met het onderste blad van de musc. levator palpebrae en met de kapsel van Tenon, en de verhouding ten opzichte van de traanklier.

Wat de innervatie van den musc. transversus betreft, daarvan kan tot onzen spijt niets meegedeeld worden. Toen de spier gevonden werd, was aan beide zijden de bovenste vetlaag met de daarin verloopende zenuwen reeds weggeprepareerd. Bochdalek deelt slechts

[1]) B. S. Albinus, Historia Musculorum Hominis. Lugd. Bat. 1734, pag. 176.

van zijn linker musc. transversus een innervatie mede door zwakke takjes der nn. frontalis en lacrimalis.

De functie van den musc. transversus orbitae is, als vanzelve sprekend, moeilijk vast te stellen. BOCHDALEK vatte den musc. transversus op als een samengestelde musc. transversus internus en externus. Werkten beide deelen samen van de beide vasthechtingspunten (inwendigen en uitwendigen orbitaalwand) uit, dan zouden zij den musc. levator palpebrae in zijn rechte ligging houden en daardoor zijn hefwerking ondersteunen. Elk deel op zich zelf zou den musc. levator palpebrae min of meer naar zijn kant kunnen trekken en zoo het mediale deel van het ooglid op- en binnenwaarts resp. het laterale deel van het ooglid op- en buitenwaarts trekken. De verbinding met de kapsel van TENON zou een werking daarop en dientengevolge een vergemakkelijking van de hefwerking van den musc. levator palpebrae mogelijk maken. Ten slotte zou door de aanspanning van den geheelen musc. transversus, de breede, laterale peesuitbreiding de traanklier meer tegen de bovenste oogkaswand aan kunnen drukken en deze meer samenpersen.

MACALISTER[1]) was van meening, dat de musc. transversus een verplaatste, diepe strook van het pars palpebralis van den musc. orbicularis oculi kon zijn. De samenhang van den musc. transversus met den musc. levator palpebrae is naar mijne meening echter te groot, dan dat ik MACALISTER's meening zou kunnen onderschrijven. Ook zou dan een verloop van de vezels buiten den musc. levator palpebrae voor de hand liggen. Zooals wij echter hiervoor zagen, verloopt in ons geval, en ook in het geval van BOCHDALEK, geen enkele spiervezel van den musc. transversus buiten den musc. levator palpebrae; in ons geval verloopen de transversus-vezels hoofdzakelijk onder den musc. levator. MACALISTER deelt dan ook mede, dat hij diepe strooken van den musc. orbicularis oculi ongeveer op dezelfde plaats heeft zien verloopen, waar wij den musc. transversus vonden, en dat deze vezels zich steeds buiten den musc. levator palpebrae bevonden.

[1]) A. MACALISTER, A descriptive catalogue of muscular anomalies in human anatomy.
Transactions of the Royal Irish Academy Vol. XXV Sc. Dublin 1872.

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan van Dr. K. W. RUTGERS getiteld: *„Ontaardingen in lineaire stelsels van vlakke kubische krommen."*

(Mede aangeboden door den Heer CARDINAAL).

1. Het aantal krommen met twee dubbelpunten, voorkomende in een net van vlakke krommen, wordt gegeven door de formule:

$$\tfrac{1}{2}\left[(D+\sigma+4p-1)^2-3D-\sigma-78p+3\right],$$ [1])

waarin $D$ het aantal vrije snijpunten van twee elementen van het net, $\sigma$ het aantal basispunten, $p$ het geslacht der krommen voorstelt.

Voor een net van vlakke kubische krommen is dit dus het aantal ontaardingen in een kegelsnede en een rechte; in een net zonder basispunten geeft de formule een aantal van 21; elk enkelvoudig basispunt vermindert het door de formule gegeven getal met één.

Zijn er enkelvoudige basispunten, dan kan de vraag gesteld worden, bij hoeveel ontaardingen de rechte door twee, door één of door geen der basispunten gaat. Nemen we een der basispunten tot hoekpunt ($x_2=0$, $x_3=0$) van een coordinaten-driehoek en stellen we de voorwaarde, dat de rechte $x_3=mx_2$ deel moet zijn van een kubische kromme van het net, dan blijkt gemakkelijk, dat 6 waarden voor $m$ worden gevonden, dat dus in 't algemeen door een enkelvoudig basispunt 6 rechten, deelen van ontaardingen, gaan. Hieruit volgt dan de oplossing der gestelde opgave.

Een andere oplossing wordt aldus verkregen. Het net wordt bepaald door een kromme $\bar{c}_3$ en een bundel, waartoe $\bar{c}_3$ niet behoort. Is $D$ het aantal vrije snijpunten van twee krommen van het net, dan moet $\bar{c}_3$ door $9-D$ basispunten $A_i$ van den bundel gaan. De laatste snijdt op $\bar{c}_3$ een involutie $\gamma$ van de orde $D$ in. Nu blijkt het volgende:

*a.* Het aantal ontaardingen in een rechte $A_iA_k$ en bijbehoorende kegelsnede bedraagt $\frac{1}{2}(9-D)(8-D)$.

*b.* Een rechte door een der basispunten kan met een kegelsnede door de $8-D$ overige een ontaarding vormen. Het stelsel kegel-

[1]) CAPORALI, *„Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane"*, *Collectanea mathematica in memoriam Chelini*, p. 182. In de plaats van $D$ staat daar de letter $N$.

sneden door $8-D$ punten snijdt op $c_3$ een algebraische puntenreeks $g_{D-2}^{D-3}$ (orde $= D-2$, dimensie $= D-3$) in. Zoo dikwijls een groep van deze in een groep van $\gamma$ is bevat, heeft ontaarding in het net plaats. Het aantal malen, dat dit gebeurt, wordt gevonden door de formule

$$z = nv\binom{m-1}{r} - \tfrac{1}{2}\, d\binom{m-2}{r-1}\ [1],$$

waarin $n$ de orde, $r$ de dimensie van $g$, $m$ de orde, $v$ de index van $\gamma$, $d$ het aantal dubbelpunten (hier $d = 2D$ [2]) voorstelt.

Hier wordt dus gevonden $z = D-2$ m.a.w. door elk basispunt gaan $D-2$ rechten, deelen van ontaardingen. Totaal $(9-D)(D-2)$.

*c*. Een rechte door geen der basispunten wordt aangevuld door een kegelsnede door $9-D$ basispunten. Het door deze punten bepaalde stelsel van kegelsneden snijdt $\overline{c}_3$ in een $g_{D-3}^{D-4}$. Met behulp van dezelfde formules volgt $z = \frac{1}{2}(D-2)(D-3)$, wat het aantal ontaardingen voorstelt, waarbij het rechte bestanddeel door geen der basispunten gaat.

Het totale aantal ontaardingen is dus [3])

$$\tfrac{1}{2}(9-D)(8-D) + (9-D)(D-2) + \tfrac{1}{2}(D-2)(D-3) = 21.$$

2. Uit het voorgaande volgt, dat bij een net van kubische krommen met 6 basispunten $A_1, \ldots, A_6$ door elk basispunt één rechte gaat, die door een kegelsnede door de 5 overige tot een ontaarding wordt aangevuld. Het is bekend, dat deze 6 rechten door eenzelfde punt $P$ gaan, wanneer $A_1, \ldots, A_6$ op een kegelsnede $c_2$ liggen. Bovendien zijn dan de ontaardingen $PA_i + c_2$ bevat in eenzelfden bundel van het net. Deze eigenschap bezitten alle netten gekozen uit den complex (drievoudig oneindig lineair stelsel) van kubische krommen, door $A_1, \ldots, A_6$ bepaald, dus ook het net met de basispunten $P, A_1, \ldots, A_6$. De aanwezigheid van de fundamentaalkromme $c_2$ doet deze eigenschap ontstaan.

We willen nu onderzoeken of deze bijzonderheid ook kan voorkomen bij netten, waarbij *geen fundamentaalkegelsnede* aanwezig is.

---

[1]) R. Torelli, „*Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica*", Atti del Reale Istituto Veneto, t. $67^2$, p. 1323, (1908).

[2]) C. Segre, „*Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*"; Annali di Matematica, Ser. II, t. XXII, p. 41.

[3]) Dat het aantal ontaardingen, onafhankelijk van het aantal enkelvoudige basispunten, 21 bedraagt, volgt ook uit de beschouwingen voorkomende in de mededeeling, „*Over netten van algebraische vlakke krommen*" (Jan de Vries, Versl. K. A. v. Wet. XXIII, 709).

Zijn $A_1, \ldots A_p$ de basispunten van een complex $S_3$ en kiezen we een punt $P$ zoodanig, dat het net van krommen uit $S_3$ door $P$ bepaald, de bovengenoemde bijzonderheid vertoont, dan ziet men gemakkelijk, dat van de 9 basispunten van den bundel, die de ontaardingen bevat, er telkens twee (behalve het punt $P$) op de rechten $PA_1, \ldots, PA_p$ moeten liggen.

Bij willekeurige ligging van $A_1, \ldots, A_p$ is dus $p$ hoogstens gelijk 4; bij $p = 5$ moet $P$ gelegen zijn op een der verbindingsrechten $A_iA_k$. Zijn voor $p = 4$ $A_1, \ldots, A_4$ de basispunten van $S_3$, $B_1, \ldots, B_4$ de overige basispunten van den bundel, gelegen op de rechten $PA_i$, dan moet een rechte $PA_k$ aangevuld worden door een kegelsnede door $A_jA_lA_m\ B_jB_lB_m\ (j,l,m \pm k)$; de poolrechten van $P$ t.o.v. deze vier kegelsneden vallen samen in een rechte $l$ en alle niet ontaarde kubische krommen van den bundel worden door $PA_1, \ldots PA_4$ nog in punten gesneden, die harmonisch liggen t.o.v. $P$ en $l$, m. a. w. *alle kubische krommen van den bundel hebben $P$ tot buigpunt en hebben een gemeenschappelijke harmonische poollijn $l$* [1]).

3. Het geval $p = 5$ zullen we nu nader onderzoeken. Daarvoor zullen we uitgaan van het stelsel $S_3$ met 6 basispunten $P, A_1, \ldots, A_5$, terwijl $P, A_1$ en $A_2$ op eenzelfde rechte liggen. In $S_3$ zullen nu netten zonder verdere basispunten kunnen voorkomen zoodanig, dat de ontaardingen gevormd door $PA_3$, $PA_4$ en $PA_5$ met aanvullende kegelsneden tot één bundel behooren. De ligging der overige basispunten $B_3$, $B_4$, $B_5$ op de rechten $PA_3$, $PA_4$, $PA_5$ kan bepaald worden.

Door het stelsel $S_3$ toch wordt een kubisch oppervlak $\Phi$ met een dubbelpunt $O$ afgebeeld; hierbij beantwoorden $PA_3$, $PA_4$ en $PA_5$ aan 3 rechten $p_3, p_4, p_5$ van $\Phi$, welke niet door $O$ gaan; een net uit $S_3$ zonder verdere basispunten komt overeen met de vlakke doorsneden van $\Phi_3$ met vlakken van een schoof, waarvan de top $Q$ niet op $\Phi_3$ is gelegen; de bundel, waartoe de ontaardingen $PA_3$, $PA_4$, $PA_5$ behooren, is de afbeelding van de doorsneden met een vlakkenbundel in $(Q)$, welke ook de vlakken $(Qp_3)$, $(Qp_4)$ en $(Qp_5)$ moet bevatten. De as van dezen vlakkenbundel moet dus $p_3, p_4, p_5$ snijden m. a. w. $Q$ ligt op het kwadratische regelvlak $R_2$, dat $p_3, p_4, p_5$ tot richtlijnen heeft. Beschrijvende rechten van $R_2$ zijn o.a. de rechte $p$ van $\Phi_3$, afgebeeld door het punt $P$ in het vlak, en de

---

[1]) S. Kantor, „*Ueber gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung*" Sitz. ber. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. LXXIX (1879). Zie ook H. J. van Veen, „*Eigenschappen van bundels van vlakke kubische krommen bij algemeene en bij bijzondere ligging der basispunten*", Nieuw Archief voor Wiskunde, 2e reeks, dl. XII, 1918, bl. 279.

rechte $q$, overeenkomende met de kegelsnede $\bar{c}_2$ door $A_1, \ldots, A_5$.

Projecteeren we alle beschrijvenden van $R_2$ uit $O$, dan ontstaat een vlakkenbundel, die de richtlijn door $O$ tot as heeft; alle krommen van doorsnede van $\Phi_3$ met de vlakken van dezen bundel, gaan dus door eenzelfde punt $S'$ van $\Phi_3$. Deze doorsneden beantwoorden in $S_3$ aan kegelsneden door $A_3, A_4, A_5$ en het met $S'$ overeenkomende punt $S$, dat op $\bar{c}_2$ ligt, omdat $S'$ een punt van $q$ is.

De punten $B_3, B_4, B_5$ zijn dus de snijpunten van de rechten $PA_3$, $PA_4$, $PA_5$ met een kegelsnede van den bundel door $S, A_3, A_4, A_5$.

Om het punt $S$ te bepalen, merken we op, dat de richtlijnen van $R_2$ op de beschrijvenden $p$ en $q$ projectieve puntenreeksen insnijden; drie paren van overeenkomstige punten zijn de snijpunten van $p$ en $q$ met $p_3, p_4, p_5$. De richtlijn door $O$, en daarmee het punt $S'$, wordt dus gevonden door het met $O$ overeenkomende punt van $q$ te zoeken.

In de afbeelding van $\Phi_3$ zijn dus de richtingen om $P$ projectief verwant met de punten van $\bar{c}_2$ en wel zoodanig, dat met de richtingen $PA_3, PA_4, PA_5$ overeenkomen de twee snijpunten $B'_3, B'_4, B'_5$ van deze rechten met $\bar{c}_2$. Projecteeren we deze laatste punten uit $A_5$, dan ontstaan om $P$ en $A_5$ twee perspectieve stralenbundels, waarvan de perspectiviteitsas gevonden wordt als de verbindingsrechte van $B'_3$ en $B'_4$. Snijdt deze $A_1A_2$ in $S''$, dan is het tweede snijpunt van $A_5S''$ met $\bar{c}_2$ het gevraagde punt $S$.

Elk punt $P$ van $A_1A_2$ bepaalt uit het viervoudig oneindige lineair stelsel $S_4$ door $A_1, \ldots, A_5$ een $S_3$, waarin het punt $S$ eenwaardig is geconstrueerd; bij elk punt $P$ van $A_1A_2$ behoort dus één punt $S$, of ook één punt $S''$.

Zoeken we thans het aantal punten $P$, dat bij één punt $S$ of $S''$ behoort. Bij verandering van $P$ beschrijven $B'_3$ en $B'_4$ op $\bar{c}_2$ een involutie; de omhullende van $B'_3\,B'_4$ is een kegelsnede $k_2$, die $\bar{c}_2$ in de punten $A_1$ en $A_2$ raakt[1]). Uit $S''$ zijn hieraan twee raaklijnen te trekken, die twee puntenparen op $\bar{c}_2$, dus 2 punten $P_1$ en $P_2$ op $A_1A_2$ bepalen. De overeenkomst tusschen $P$ en $S$ is dus een (2,1) verwantschap.

Nu is uit § 2 bekend, dat de krommen van den bundel, die de ontaardingen $PA_3, PA_4, PA_5$ bevat, alle een buigpunt in $P$ bezitten en tevens een gemeenschappelijke harmonische poollijn voor de pool $P$ hebben. De harmonische poollijnen van alle mogelijke dusdanige bundels uit $S_3$ moeten gaan door het 4$^{de}$ harmonische punt $P'$ bij $P$ ten t. o. v. $A_1$ en $A_2$; zoo moeten ook de poolrechten van $P$

[1]) R. Sturm, „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften" 3ter Band, S. 138.

t. o. v. elk der kegelsneden van den bundel $(S, A_3, A_4, A_5)$ door $P'$ gaan; $P$ en $P'$ zijn de dubbelpunten der involutie door dezen bundel op $A_1A_2$ ingesneden. Ook de ontaardingen in dezen bundel zoo als het rechtenpaar $A_3A_4 + SA_5$ snijden op $a_{12}$ een puntenpaar van deze involutie in m. a. w. ook deze punten liggen harmonisch t. o. v. $P$ en $P'$. Het punt $S''$, snijpunt van $A_1A_2$ en $A_5S$, kan dus gevonden worden door het 4[de] harmonische punt te zoeken bij $P_3, (A_1A_2, A_3A_4)$en $P'$. Het blijkt bij deze constructie gemakkelijk, dat, wanneer we door $P'$ een $S_3$ hadden bepaald uit $S_4$, hetzelfde punt $S''$, dus hetzelfde punt $S$ gevonden was.

*De beide punten $P_1$ en $P_2$, behoorende bij eenzelfde punt $S$ van $\bar{c}_2$ liggen dus steeds harmonisch t. o. v. $A_1$ en $A_2$.*

*Elke kegelsnede van den bundel $(A_3, A_4, A_5, S)$ bepaalt op de rechten $P_1A_3$, $P_1A_4$, $P_1A_5$ drie punten en eveneens op de rechten $P_2A_3$, $P_2A_4$, $P_2A_5$ drie punten, die telkens met $A_1, \ldots, A_5$, $P$ negen basispunten vormen van een bundel, waarin resp. voorkomen de ontaardingen $P_1A_3$, $P_1A_4$, $P_1A_5$, resp. $P_2A_3$, $P_2A_4$, $P_2A_5$, met aanvullende kegelsneden en waarbij alle niet ontaarde krommen een buigpunt in $P_1$ resp. $P_2$ bezitten.*

4. Uit een complex $S_3^5$ met 5 basispunten $A_1, \ldots, A_5$ wordt door een punt $P$ van $A_1A_2$ een net $S_2$ bepaald, dat bevat is in den complex $S_3^6$ met basispunten $A_1, \ldots, A_5, P$. Zal in $S_2$ een bundel aanwezig zijn met bovengenoemde eigenschappen, dan zullen de ontbrekende drie basispunten $B_3, B_4, B_5$ op $PA_3, PA_4, PA_5$ moeten worden ingesneden door een kegelsnede van den bundel $(S, A_3, A_4, A_5)$ waarbij $S$ het bij $S_3^6$ behoorende punt van de kegelsnede $\bar{c}_2$ door $A_1, \ldots, A_5$ is.

Door $S_3^5$ wordt een biquadratisch oppervlak $\Phi_4$ met een dubbelkegelsnede afgebeeld[1]), waarbij de kubische krommen beantwoorden aan vlakke doorsneden van $\Phi_4$. De rechte $A_1A_2$ is de afbeelding van een der 16 rechten van het oppervlak; de vlakke doorsneden door deze rechte $p_{12}$ beantwoorden aan kegelsneden door $A_3, A_4, A_5$ en een 4[de] vast punt $Q$. Dit bewijst dus, dat de kegelsnede door $S, A_3, A_4, A_5$ tevens door $Q$ moet gaan en we hebben de kegelsnede, die de punten $B_3, B_4, B_5$ op $PA_3, PA_4$ en $PA_5$ insnijdt, te zoeken onder de kegelsneden van den bundel met $Q, A_3, A_4, A_5$ tot basispunten. Een kegelsnede $k_2$ van dezen bundel snijdt $\bar{c}_2$ in een punt $S$, waaraan twee punten $P$ op $A_1A_2$ beantwoorden. Elke kromme

[1]) Zie o. a. STURM, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, 4ter Band, S. 309.

van den bundel, die nu ontstaat, moet tot $S_3^5$ behooren, dus ook de ontaarding $PA_3$ met de kegelsnede door $A_1, A_2, A_4, B_4, A_5, B_5$ moet een kromme daarvan zijn.

Nu behoort bij elke kegelsnede door $A_1, A_2, A_4, A_5$ één bepaalde rechte door $A_3$, die op $A_1A_2$ een punt $P'$ bepaalt. Tusschen de punten $P$ en $P'$ van $A_1A_2$ bestaat nu een verwantschap (2,1) met 3 coincidenties waaruit dus volgt:

*Op elke verbindingsrechte van twee der vijf basispunten $A_1, \ldots, A_5$ van $S_3^5$ liggen drie punten $P$, zoodanig dat de rechten, die $P$ met de drie overige basispunten verbinden, deelen van tot eenzelfden bundel behoorende ontaardingen zijn.*

5. Langs geheel anderen weg kunnen we tot hetzelfde resultaat komen, waarbij dan tevens de samenhang tusschen de punten $P$ aan het licht komt. Daarvoor zullen we eerst een hulpstelling bewijzen.

We gaan uit van een net van kubische krommen met basispunten $P, A_1, \ldots, A_4$, en veronderstellen, dat de ontaardingen gevormd door $PA_1, \ldots, PA_4$ met aanvullende kegelsneden tot eenzelfden bundel behooren. We weten, dat door het punt $P$ nog twee rechten zullen gaan, die met twee kegelsneden door $A_1, \ldots, A_4$ eveneens ontaardingen in het net vormen.

Nemen we $PA_1A_2$ tot coördinaten driehoek en stellen we

$$PA_3 \equiv p_2 x_2 + p_3 x_3 \equiv (px) = 0, \quad PA_4 \equiv q_2 x_2 + q_3 x_3 \equiv (qx) = 0,$$

$$A_3A_4 \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \equiv (ax) = 0, \; B_3B_4 \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_2 \equiv (bx) = 0 .$$

De kegelsneden door $A_1, B_1, A_3, B_3, A_4, B_4$ en door $A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$ behooren beide tot den bundel $(px)\,(qx) + \lambda\,(ax)\,(bx) = 0$.

Voor de eerste kegelsnede is $\lambda$ zoo te kiezen, dat ze door $A_1$, voor de tweede, dat ze door $A_2$ gaat. Dus $\lambda$ resp. gelijk aan $-p_2q_2 : a_2b_2$ en $-p_3q_3 : a_3b_3$. De eerste kegelsnede wordt door $x_2 = 0$, de laatste door $x_3 = 0$ tot een ontaarding aangevuld.

De rechte $(ax) = 0$ behoort bij een kegelsnede door $P, A_1, A_2$ heeft dus de vergelijking $c_1x_1x_2 + c_2x_1x_3 + c_3x_2x_3 = 0$. Door deze drie krommen wordt het net

$$\lambda_1 x_1 \{a_2b_2\,(px)\,(qx) - p_2q_2(ax)\,(bx)\} + \lambda_2 x_2 \{a_3b_3\,(px)\,(qx) - p_2q_3\,(ax)\,(bx)\}\, \lambda_3\,(ax) +$$
$$+ (c_1x_1x_2 + c_2x_1x_3 + c_3x_2x_3) = 0$$

bepaald.

Door $x_3 = rx_2$ te nemen en de voorwaarde te stellen, dat deze rechten deelen van ontaardingen in het net zijn, vinden we door eliminatie van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en deeling door $p_2 + p_3r$ en $q_2 + q_3r$ de vergelijking

$$\begin{vmatrix} b_1 & , & c_1 + c_2 r \\ a_1(b_2+b_3 r) + b_1 (a_2 + a_3 r) & , & a_1 c_3 r + (c_1 + c_2 r)(a_2 + a_3 r) \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking bepaalt dus de beide rechten $m$ en $n$, die door $P$ gaan, en deelen van ontaardingen zijn.

In het net is een kromme aanwezig, die in $P$ een dubbelpunt bezit. Voor deze is $\lambda_1 = \lambda_3 \dfrac{c_1}{p_2 q_2 b_1}$, $\lambda_2 = \lambda_3 \dfrac{c_2}{p_3 q_3 b_1}$, terwijl de dubbelpuntsraaklijnen worden gevonden uit:

$$-a_1 b_3 c_2 r^2 + (-a_1 b_3 c_1 - a_1 b_2 c_2 + a_1 b_1 c_3) r - a_1 b_2 c_1 = 0 \quad \left(r = \frac{x_2}{x_3}\right)$$

welke vergelijking dezelfde blijkt te zijn als de boven voor $r$ gevonden vergelijking.

Onze hulpstelling luidt dus:

*Wanneer in een net van kubische krommen met vijf basispunten de verbindingsrechten van eén daarvan met de vier overige deelen zijn van ontaardingen, die tot eenzelfden bundel behooren, dan zullen de beide andere rechten, eveneens deelen van ontaardingen, door dat basispunt, de dubbelpuntsraaklijnen zijn van die kromme van het net, die in dat basispunt een dubbelpunt bezit.*

Enkele gevolgen laten zich uit deze stelling gemakkelijk afleiden. De krommen van den bundel, die de ontaardingen bevat, hebben volgens § 2 alle een buigpunt in $P$ en bezitten een gemeenschappelijke harmonische poollijn $l$. Elke rechte door $P$, dus ook de rechten $m$ en $n$, wordt buiten $P$ nog in twee punten gesneden, die harmonisch liggen t.o.v. $A$ en het snijpunt met $l$. Er is dus een kromme van den bundel, die $m$, resp. $n$ raakt in het punt $(l, m)$ resp. $(l, n)$, en een kromme, die in $P$ de rechte $m$ resp. $n$ tot buigraaklijn heeft.

Door een complex van kubische krommen $S_3{}^4$ met vier basispunten $A_1, \ldots, A_4$ wordt een oppervlak van den 5den graad $\Phi_5$ met een dubbelkromme van den 5den graad afgebeeld [1]). Het punt $P$ beantwoordt daarbij aan een punt $P'$ van $\Phi_5$; de bundel krommen, die de ontaardingen $PA_1, \ldots, PA_4$ bevat, aan de doorsneden van $\Phi_5$ met een vlakkenbundel, waarvan de as door $P$ gaat, welke as $\Phi_5$ snijdt in de punten $B_1', \ldots, B_4'$, overeenkomende met de punten $B_1, \ldots B_4$ in de afbeelding. De rechte $m$ beantwoordt aan een vlakke kubische kromme $c_3{}^m$ (gelegen in een vlak $V$) door $P$. Deze $c_3{}^m$ heeft een dubbelpunt in een der snijpunten van $V$ met

[1]) CAPORALI, „*Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine*", Annali di Matematica, Ser. II, t. VII, 1875, p. 149.

de dubbelkromme $\varrho_5$. Elke kromme van $\Phi_5$, gelegen in een vlak van den bundel $(P', B'_i)$ snijdt $c_3{}^m$ nog in 2 punten op een zelfde rechte door $P'$. Blijkens de afbeelding moet het éénmaal gebeuren, dat deze beide snijpunten in $P'$ samenvallen, m. a. w. $P'$ is een buigpunt voor $c_3{}^m$. Om dezelfde reden is $P'$ eveneens buigpunt voor de vlakke kubische kromme $c_3{}^n$, die afgebeeld wordt door de rechte $n$. We vinden dus:

*De punten, die uit $S_3{}^4$ een net bepalen, waarbij de verbindingsrechten van die punten met de basispunten van het stelsel deelen van ontaardingen zijn, die tot eenzelfden bundel behooren, zijn de afbeeldingen van die punten van $\Phi_5$, waarin twee krommen, behoorende tot een der vijf stelsels van vlakke kubische krommen op dit oppervlak, beide een buigpunt bezitten*; of ook:

*Deze punten zijn de afbeeldingen van die punten van $\Phi_5$, waarbij door elk der hoofdraaklijnen een vlak gaat, dat een kubische kromme van een der stelsels van deze krommen bevat.*

Nemen we in aanmerking, dat de doorsnede van $\Phi_5$ met het raakvlak in $P'$ wordt afgebeeld als de kubische kromme, die in $P$ een dubbelpunt heeft, dan hebben we hier een nieuw bewijs voor de algebraisch bewezen hulpstelling.

Het snijpunt van $m$ met de gemeenschappelijke harmonische poollijn $l$ is de afbeelding van het raakpunt $Q'$ met de raaklijn uit $P'$ aan $c_3{}^m$ getrokken. Het dubbelpunt $D'$ van $c_3{}^m$ wordt afgebeeld als een puntenpaar op de rechte $m$, nl. als de twee toegevoegde punten op $m$ van de kromme, die beantwoordt aan de dubbelkromme $\varrho_5$ van $\Phi_5$. Dit puntenpaar wordt door een kromme van den bundel op $m$ ingesneden en ligt dus harmonisch met $P$ en $(l, m)$.

Behalve $P'$ bezit $c_3{}^m$ nog 2 buigpunten, met $P'$ op een zelfde rechte gelegen; ze worden dus op $c_3{}^m$ ingesneden door een kromme van den bundel $(P', B'_i)$. Hieruit blijkt dat de overeenkomstige punten in de afbeelding eveneens harmonisch zijn gelegen t.o.v. $P$ en $(l, m)$. De krommen van het net, die in deze beide punten dubbelpunten bezitten, moeten $m$ tot één der dubbelpuntsraaklijnen hebben [1]). Hetzelfde geldt voor de rechte $n$.

6. We gaan thans weer terug naar den complex $S_3{}^5$ van kubische krommen met 5 basispunten $A_1, \ldots, A_5$ en veronderstellen dat het

[1]) Op de rechten $m$ en $n$ zijn dus 3 punten gevonden, waarbij elk dezer rechten een der dubbelpuntsraaklijnen is van de kromme van $S_3$, die daar een dubbelpunt heeft. In 't algemeen zijn er op een willekeurige rechte vijf van deze punten te vinden. Genoemde drie punten worden hier aangevuld door de beide snijpunten van $m$ of $n$ met hun bijbehoorende kegelsneden (Caporali, l. c.)

punt $P$ zoodanig op $A_1 A_2$ is geconstrueerd, dat de rechten $PA_3, \ldots, PA_5$ deelen van ontaardingen zijn, die tot eenzelfden bundel behooren.

Van de beide andere rechten, deelen van ontaardingen door $P$, valt steeds een samen met $A_1 A_2$; de andere gaat door een vast punt $O$. De kromme, die in $P$ een dubbelpunt heeft, valt uiteen in $A_1 A_2$ en een kegelsnede door $A_3$, $A_4$, $A_5$, $P$ en een vast punt $Q$ [1]).

Volgens bovenstaande hulpstelling zal de laatstgenoemde rechte door $P$ aan deze kegelsnede moeten raken.

Denken we in elk snijpunt van $A_1 A_2$ met een kegelsnede van den bundel ($A_3$, $A_4$, $A_5$, $Q$) de raaklijnen aan die kegelsnede getrokken, dan omhullen deze rechten een kromme van de 3[de] klasse [2]), aan welke omhullende uit $O$ drie raaklijnen zijn te trekken; m. a. w. op $A_1 A_2$ liggen drie punten $P$, zoodanig, dat de raaklijn in $P$ aan de kegelsnede ($P$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $Q$) door $O$ gaat, waarmee weer het reeds in § 4 gevonden resultaat is bereikt.

7. We zullen nu de m.p. der punten $S$ zoeken, waarvoor een der dubbelpuntsraaklijnen aan de kromme van $S_3$, die in $S$ een dubbelpunt bezit, door het vaste punt $O$ gaat.

Een punt $P$ van een rechte $l$ is dubbelpunt van een kromme van $S_3$; deze snijdt $l$ nog in een punt $P'$. Omgekeerd bepaalt $P'$ uit $S_3$ een net van kubische krommen met zes basispunten ($A_1, \ldots, A_5, P'$). De m.p. der dubbelpunten van de krommen van dit net is van den 6[den] graad met dubbelpunten in $A_1, \ldots, A_5$ en $P'$, snijdt dus $l$ buiten $P'$ nog in 4 punten. Tusschen $P$ en $P'$ bestaat dus een verwantschap (1, 4) met 5 coincidenties, d. w. z. *op elke rechte $l$ liggen 5 punten $P$, zoodanig dat een der dubbelpuntsraaklijnen van de kromme, die in $P$ een dubbelpunt bezit, langs $l$ valt.*

Hieruit is af te leiden, dat de omhullende der dubbelpuntsraaklijnen van de krommen in $S_3$, die in de punten van de rechte $l$ dubbelpunten hebben, van de 7[de] klasse is.

Zoo zijn dus ook uit het punt $O$ 7 raaklijnen aan deze bij $l$ behoorende kromme te trekken, zoodat blijkt, dat op $l$ zeven punten liggen, waarbij een der dubbelpuntsraaklijnen een rechte is, die als deel van een ontaarding kan worden opgevat.

Nochtans is het duidelijk, dat tot deze 7 punten ook gerekend moeten worden de beide snijpunten van $l$ met de kegelsnede ($A_1, \ldots, A_5$), zoodat het resultaat is:

*De punten, die dubbelpunten van krommen van $S_3$ zijn, waarbij*

---

[1]) STURM, l. c. S. 306.

[2]) SPORER, „*Ueber eine besondere mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Curve*", Zeitschrift für Mathematik und Physik, 38 Jahrgang, 1893, S. 34.

*een der dubbelpuntsraaklijnen deel van een ontaarding is, liggen op een kromme van den* $5^{den}$ *graad.*

Uit § 5 is reeds bekend, dat de punten van deze kromme $\bar{c}_5$ overeenkomen met de buigpunten van dat stelsel van vlakke kubische krommen op het oppervlak van den $4^{den}$ graad $\Phi_4$ door $S_3$ afgebeeld, dat overeenkomt met de rechten door $O$. Elk van deze kubische krommen bezit 3 buigpunten, zoodat elke rechte door $O$ de $\bar{c}_5$ in 3 punten mag snijden. Het punt $O$ is dubbelpunt van $\bar{c}_5$; de dubbelpuntsraaklijnen zijn de raaklijnen in $O$ van die kromme van $S_3$, die in $O$ een dubbelpunt heeft.

Verder blijkt, dat de basispunten $A_1, \ldots, A_5$ buigpunten zijn van $\bar{c}_5$; de buigraaklijnen gaan alle door $O$.

Behalve deze zijn uit $O$ nog 4 enkelvoudige raaklijnen aan $\bar{c}_5$ te trekken; nl. de verbindingsrechten van $O$ met de vier punten $K_i$, die overeenkomen met de klempunten van het afgebeelde oppervlak $\Phi_4$.

De dubbelkegelsnede $d_2$ van $\Phi_4$ beantwoordt aan een kubische kromme $\bar{c}_3$ door $O, A_1, \ldots, A_5$. De toegevoegde puntenparen, afbeeldingen van de punten van $d_2$, zijn de snijpunten van $\bar{c}_3$ met de rechten door $O$; in de vier raakpunten $K_i$ van de raaklijnen uit $O$ en $\bar{c}_3$ getrokken vallen twee toegevoegde punten samen [1]); de met deze rechten overeenkomende krommen op $\Phi_4$ bezitten dan een keerpunt, en dus éen buigpunt.

Deze vier rechten $OK_i$ raken $\bar{c}_5$ in $K$ en bezitten verder met $\bar{c}_5$ een vrij snijpunt. De krommen $\bar{c}_3$ en $\bar{c}_5$ raken elkaar in de punten $K$ en hebben behalve deze en de punten $O, A_1, \ldots, A_5$ geen snijpunten.

Bepalen we nu de snijpunten van $A_i A_k$ met deze $\bar{c}_5$, dan vinden we drie punten, welke reeds in § 4 en § 6 zijn gevonden.

---

[1]) De toegevoegde punten van $\bar{c}_3$ bepalen samen slechts een net uit $S_3$. Zie o. a. STURM, l. c. S. 309.

**Natuurkunde**. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. A. SCHOUTEN en D. J. STRUIK: *„Over het verband tusschen meetkunde en mechanica by statische problemen."*

(Mede aangeboden door den Heer CARDINAAL).

*Betrekkingen tusschen de geodetische differentiaties behoorende bij verschillende fundamentaaltensoren.*

Zijn in een uitgebreidheid twee verschillende fundamentaal-tensoren $^2\mathbf{l}$ en $^2\mathbf{j}$ gegeven [1]), dan geldt de volgende algemeene stelling:

*Het geodetische differentiaalquotient van een gegeven affinor ten opzichte van* $^2\mathbf{j}$ *is gelijk aan het geodetische differentiaalquotient ten opzichte van* $^2\mathbf{l}$ *vermeerderd met een product van den affinor met een simultaankovariante van* $^2\mathbf{j}$ *en* $^2\mathbf{l}$. *Hetzelfde geldt voor de geodetische differentialen.*

Het bewijs worde in de eerste plaats geleverd voor een vector. Zij

$$\begin{aligned} &{}^2\mathbf{l} = \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}_1{}^2 = \dots \qquad &&{}^2\mathbf{j} = \mathbf{z}^2 = \mathbf{z}_1{}^2 = \dots \\ &{}^2\mathbf{l}' = \mathbf{a}'^2 = \mathbf{a}'_1{}^2 = \dots &&{}^2\mathbf{j}' = \mathbf{z}'^2 = \mathbf{z}'_1{}^2 = \dots\ {}^2) \end{aligned} \quad \dots \quad (1)$$

dan is:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}' &= {}^2\mathbf{l}' \overset{1}{.}\, \mathbf{a} \qquad & \mathbf{z}' &= {}^2\mathbf{j}' \overset{1}{.}\, \mathbf{z} \\ \mathbf{a} &= {}^2\mathbf{l} \overset{1}{.}\, \mathbf{a}' & \mathbf{z} &= {}^2\mathbf{j} \overset{1}{.}\, \mathbf{z}' \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (2)$$

$$\mathbf{aa}' = \mathbf{zz}' = \sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda{}' \ {}^3) \quad \dots \dots \quad (3)$$

Zijn $\nabla$ en $d$ de symbolen der geodetische differentiatie, behoorende bij $^2\mathbf{l}$ en $'\nabla$ en $'d$ die, behoorende bij $^2\mathbf{j}$, dan bestaan voor een willekeurigen skalar $p$ en voor een willekeurigen vector $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{v}'$ de betrekkingen:

$$'\nabla p = \nabla p \quad \dots \dots \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &'\nabla \mathbf{v} = {}'\nabla(\mathbf{z}' \overset{1}{.}\, \mathbf{v})\mathbf{z} = \nabla(\mathbf{z}' \overset{1}{.}\, \mathbf{v})\mathbf{z} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \overset{1}{.}\, \mathbf{a}' \nabla(\mathbf{a} \overset{1}{.}\, \mathbf{z}')\mathbf{z} = \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \overset{1}{.}\, \mathbf{z}' \nabla (\mathbf{z} \overset{1}{.}\, \mathbf{a}')\mathbf{a} \\ &'\nabla \mathbf{v}' = {}'\nabla(\mathbf{z} \overset{1}{.}\, \mathbf{v}')\mathbf{z}' = \nabla(\mathbf{z} \overset{1}{.}\, \mathbf{v}')\mathbf{z}' = \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \overset{1}{.}\, \mathbf{a} \nabla(\mathbf{a}' \overset{1}{.}\, \mathbf{z})\mathbf{z}' = \nabla \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \overset{1}{.}\, \mathbf{z} \nabla (\mathbf{z}' \overset{1}{.}\, \mathbf{a})\mathbf{a}' \ {}^4) \end{aligned} \quad (5)$$

of bij invoering der notatie [4]):

[1]) Men zie voor de in deze mededeeling gebruikte notaties J. A. SCHOUTEN, Die Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. der Kon. Akad. v. Wet Dl. XII N⁰. 6, hier verder geciteerd als A. R.

[2]) Daar verschillende fundamentaaltensoren ter sprake zullen komen, moeten we onderscheid maken tusschen kovariante en kontravariante grootheden, wat anders niet noodig is. Tusschen twee grootheden p en p' besta geen verband, tenzij dit uitdrukkelijk is aangegeven.

[3]) Verg. A. R. bldz. 44.

[4]) Verg. A. R. blz. 89 formule (101).

$$\overset{3\,..,}{A} = a\nabla(z \overset{1}{.} a')z' = -z\nabla(a \overset{1}{.} z')a' = a\ \nabla a' - z\nabla z'\ ^{1}) \quad . \quad . \quad (6)$$

korter:

$$\left.\begin{aligned} '\nabla v &= \nabla v - \overset{3\,..,}{A} \overset{1}{.} v \\ '\nabla v' &= \nabla v' + v \overset{1}{.} \overset{3\,..,}{A} \quad . \end{aligned}\right\} {}^{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De affinor $\overset{3\,..,}{\mathbf{A}}$ is een simultaankovariante van ${}^{2}\mathbf{I}$ en ${}^{2}\mathbf{j}$, die symmetrisch is in de beide eerste ideale factoren, daar $\nabla \times \mathbf{v} = '\nabla \times \mathbf{v}$ onafhankelijk is van den fundamentaaltensor [3]). Evenzoo is:

$$'dp = dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} 'dv &= dv - dx' \overset{1}{.} \overset{3\,..,}{A} \overset{1}{.} v \\ 'dv' &= dv + dx'v \overset{2}{.} \overset{3\,..,}{A} \end{aligned}\right\} {}^{4}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Tengevolge der voor iederen kovarianten affinor $\overset{p}{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_p$ geldende identiteiten:

$$\overset{p}{v} = (a' \overset{1}{.} v_i)\, v_1 \ldots v_{i-1}\, a\, v_{i+1} \ldots v_p \ {}^{5}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

met als gevolg:

$$\overset{p}{v} = a_1 \ldots a_p\, (a_1'.v_1) \ldots (a_p'.v_p) = a_1 \ldots a_p\, a_p' \ldots a_1' \overset{p}{.} \overset{p}{v} \quad . \quad (10a)$$

geeft toepassing van (7) de betrekking:

$$\left.\begin{aligned} '\nabla \overset{p}{v} &= \sum_i^{1,..,p} ('\nabla v_i) \overset{1}{.} a' v_1 \ldots v_{i-1}\, a\, v_{i+1} \ldots v_p = \\ &= \nabla \overset{p}{v} - \sum_i^{1,..,p} (\overset{3\,..,}{A} \overset{1}{.} v_i) \overset{1}{.} a'\, v_1 \ldots v_{i-1}\, a v_{i+1} \ldots v_p = \\ &= \nabla \overset{p}{v} - \left\{ \sum_i^{1,..,p} (\overset{3\,..,}{A} \overset{1}{.} a_i) \overset{1}{.} a'\, a_1 \ldots a_{i-1}\, a\, a_{i+1} \ldots a_p\, a_p' \ldots a_1' \right\} \overset{p}{.} \overset{p}{v} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

en dientengevolge:

$$'d\overset{p}{v} = d\overset{p}{v} - dx' \overset{1}{.} \left\{ \sum_i^{1,..,p} (\overset{3\,..,}{A} \overset{1}{.} a_i) \overset{1}{.} a'\, a_1 \ldots a_{i-1}\, a\, a_{i+1} \ldots a_p\, a_p' \ldots a_1' \right\} \overset{p}{.} \overset{p}{v} \,. \quad (12)$$

en daarmede is het bewijs voor een kovarianten affinor geleverd. Voor kontravariante en gemengde affinoren verloopt het bewijs op dezelfde wijze.

Voor het speciale geval, dat:

$${}^{2}I = \sum_\lambda e_\lambda\, e_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

---

[1]) Een gemengden affinor geven we een index van punten en komma's, aangevende de plaats der kovariante en kontravariante ideale vectoren.

[2]) Verg. A. R. bldz. 89 form. (103*b*).

[3]) Verg. A. R. bldz. 55.

[4]) Verg. A. R. bldz. 89 form. (103*a*).

[5]) Verg. A. R. blz. 54 formule (74).

gaan de vergelijkingen tusschen de kentallen over in de bekende betrekkingen tusschen de geodetische differentiatie en de gewone partieele afgeleiden naar de grondvariabelen $x^\lambda$. De kentallen van $\overset{3.}{\mathbf{A}}{}'$ worden voor dat geval de Christoffelsche symbolen $\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\}$.

Wij passen de bewezen stelling toe op een statisch probleem der relativiteitstheorie.

*Ruimte en tijd bij statische problemen.*

In het algemeen kan in de relativiteitstheorie niet met zin van „de" ruimte gesproken worden. Alleen bij zoogenaamde statische problemen, bij welke het lijnelement den vorm heeft:

$$ds^2 = g_{aa}\, dx^{a^2} + \sum_{\lambda\mu}^{b,c,d} g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = g_{aa}\, dx^{a^2} - dl^2 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

in welken vorm $g_{aa}$ en $g_{\lambda\mu}$ *alleen* van $x^b$, $x^c$ en $x^d$ afhangen, kan men, $dx^a$ opvattende als differentiaal van den tijd, $dt$, en $dl^2$ als lijnelement van de ruimte, zoolang men het probleem als statisch *blijft* opvatten, aan de woorden ruimte en tijd een eenduidige beteekenis hechten.

*De beweging van een massapunt in een statisch gravitatieveld.*

De bewegingsvergelijkingen van een massapunt (dat verondersteld wordt het veld niet te wijzigen) zijn:

$$\delta \int ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Deze vergelijking kan herleid worden tot:

$$\delta \int \sqrt{g_{aa}\, dt^2 - dl^2} = \delta \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{g_{aa} - \left(\frac{dl}{dt}\right)^2}\, dt = 0 \quad . \quad . \quad (16)$$

Is nu $g_{aa}$ van den vorm $(1-\varepsilon)c^2$, waarin $\varepsilon$ klein is, en is $\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$ van de orde van grootte van $\varepsilon c^2$, dan is, bij verwaarloozing van grootheden van de orde $\varepsilon^2$:

$$\delta \int ds = \delta \int_{t_2}^{t_1} \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) c^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \right\} dt = -\delta \int_{t_2}^{t_1} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} c^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \right\} dt = 0. \; (17)$$

*Bewegingsvergelijkingen van een niet-euklidische klassieke mechanica.*

Onder een „klassieke" mechanica in een ruimte met het lijnelement $dl$ verstaan we een mechanica met de grondvergelijking:

$$ {}^{2}\mathbf{I}'^{1}_{\cdot}\,\mathbf{K} = m\,\frac{d}{dt}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\ ^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (18) $$

waarin ${}^{2}\mathbf{I}'$ de kontravariante fundamentaaltensor, **K** de kracht en $d\mathbf{x}'$ het lijnelement voorstelt, en waarin de tweede differentiatie natuurlijk een geodetische is. Daar uit (18) volgt:

$$ {}^{2}\mathbf{I}'^{1}_{\cdot}\,\mathbf{K} = m\,\frac{d^2 l}{dt^2}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dl} + m\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \frac{d}{dl}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dl}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (19) $$

beweegt een vrij punt zich in zulk een mechanica volgens een geodetische lijn:

$$ \frac{d}{dl}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dl} = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20) $$

Is $\dfrac{\mathbf{K}}{m}$ de gradient van een krachtfunctie $U$, dan geldt voor een dergelijke mechanica de variatiestelling:

$$ \delta\int_{t_2}^{t_1} \left\{ U + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \right\} dt = 0 \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21) $$

want:

$$ \left.\begin{aligned} &\delta\int_{t_2}^{t_1} \left\{ U + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \right\} dt = \delta\int_{t_2}^{t_1} \left( U + \tfrac{1}{2}\,{}^{2}\mathbf{I}^{2}_{\cdot}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right) dt = \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \left\{ \delta\mathbf{x}'^{1}_{\cdot}\,\nabla U + {}^{2}\mathbf{I}^{2}_{\cdot}\left( \frac{d\mathbf{x}'}{dt}\,\delta\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right) \right\} dt = \int_{t_2}^{t_1} \left\{ \delta\mathbf{x}'^{1}_{\cdot}\,\nabla U + {}^{2}\mathbf{I}^{2}_{\cdot}\left( \frac{d\mathbf{x}'}{dt}\,d\,\frac{\delta\mathbf{x}'}{dt} \right) \right\} dt\ ^{2)} = \\ &= \Big/_{t_2}^{t_1}\, {}^{2}\mathbf{I}^{2}_{\cdot}\left( \frac{d\mathbf{x}'}{dt}\,\delta\mathbf{x}' \right) + \int_{t_2}^{t_1} \delta\mathbf{x}'^{1}_{\cdot} \left\{ \nabla U - {}^{2}\mathbf{I}^{1}_{\cdot}\,\frac{d}{dt}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right\} dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad (22) $$

en uit (18) volgt:

$$ {}^{2}\mathbf{I}'^{1}_{\cdot}\,\nabla U = \frac{d}{dt}\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt} \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23) $$

---

[1]) Daar een kracht een kovariante vector is en een versnelling een kontravariante, worden, zoodra we de beide soorten van grootheden niet meer mogen identificeeren, kracht en versnelling ongelijksoortige grootheden. De massa wordt in dat geval een grootheid met de oriënteeringswijze van den kovarianten fundamentaaltensor.

[2]) Omdat voor de geodetische differentiaties $d$ en $\delta$ geldt $\delta d\mathbf{x}' = d\delta\mathbf{x}'$, zie A.R. bldz. 57 form. (103).

*Terugvoering van het vierdimensionale probleem tot een driedimensionaal.*

Vergelijking van (17) en (21) leert nu, dat de beweging van een massapunt kan worden opgevat als een beweging volgens een klassieke mechanica in een ruimte met lijnelement $dl$ en een krachtfunctie:

$$U = \frac{\varepsilon}{2} c^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ^{1)} \ (24)$$

Gebruiken we het door SCHWARZSCHILD berekende lijnelement:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - dl^2 \\ dl^2 &= \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

voor het gravitatieveld van één enkel centrum, dan wordt

$$U = \frac{\alpha c^2}{2r} = \varkappa^2 \frac{M_0}{r} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

waarin $\varkappa$ een gravitatieconstante en $M_0$ de massa van het centrum voorstelt, en de terugvoering geldt met verwaarloozing van grootheden van de orde $\frac{\alpha^2}{r^2}$ voor snelheden van de orde van grootte van $\frac{\alpha}{r} c$. Uit de vergelijkingen (18) kan de beweging, en dus ook bijv. de periheliumbeweging van Mercurius, evengoed worden afgeleid als uit de vergelijkidgen (15). Het heeft dus in dit verband zin te zeggen, dat de periheliumbeweging „veroorzaakt" wordt door het niet-euclidisch zijn der ruimte in de nabijheid van de zon, en daarmede is dan een „verklaring" van dat verschijnsel gegeven van het standpunt van een klassieke, zij het dan ook een niet-euclidische mechanica.

*Overgang tot een ander lijnelement.*

Naast de fundamentaaltensoren:

$$\left. \begin{aligned} {}^2\mathbf{l} = \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}_1{}^2 = \ldots &= \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \mathbf{e}_r \, \mathbf{e}_r + r^2 \sin^2 \theta \, \mathbf{e}_\varphi \, \mathbf{e}_\varphi + r^2 \, \mathbf{e}_\theta \, \mathbf{e}_\theta \\ {}^2\mathbf{l}' = \mathbf{a}'^2 = \mathbf{a}_1'^2 = \ldots &= \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \mathbf{e}'_r \, \mathbf{e}'_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{e}'_\varphi \, \mathbf{e}'_\varphi + \frac{1}{r^2} \mathbf{e}'_\theta \, \mathbf{e}'_\theta \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (27)$$

---

1) T. LEVI CIVITA heeft in zijn artikel Statica Einsteiniana, Rend. dei Lincei 21 (17) 449—470, aangetoond, dat het vierdimensionale probleem zonder verwaarloozing van grootheden van de orde $\varepsilon^2$ terug te voeren is tot een driedimensionaal. Daarbij treedt dan echter een nieuwe hulpvariabele $t^*$ als „tijd" op. A. PALATINI heeft dit toegepast op het lijnelement van SCHWARZSCHILD en de periheliumbeweging: Lo spostamento del perielio di mercurio etc., Nuovo Cimento 14 (17) 12—54.

met de betrekkingen:

$$\mathbf{a} = {}^2\mathbf{l}^1_{\cdot}\,\mathbf{a}' \quad , \quad \mathbf{a}' = {}^2\mathbf{l}'^1_{\cdot}\,\mathbf{a} \quad , \quad {}^2\mathbf{l}^1_{\cdot}\,{}^2\mathbf{l}' = \sum_{\lambda}^{r,\varphi,\theta} \mathbf{e}_\lambda\,\mathbf{e}'_\lambda , \quad . \quad . \quad (28)$$

voeren we in de fundamentaaltensoren:

$$\left.\begin{aligned} {}^2\mathbf{j} &= \mathbf{z}^2 = \mathbf{z}_1{}^2 = \ldots = \mathbf{e}_r\,\mathbf{e}_r + r^2 \sin^2\theta\, \mathbf{e}_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + r^2\, \mathbf{e}_\theta\,\mathbf{e}_\theta \\ {}^2\mathbf{j}' &= \mathbf{z}'^2 = \mathbf{z}'_1{}^2 = \ldots = \mathbf{e}'_r\,\mathbf{e}'_r + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\mathbf{e}'_\varphi \mathbf{e}'_\varphi + \frac{1}{r^2}\,\mathbf{e}'_\theta\,\mathbf{e}'_\theta \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

met de betrekkingen:

$$\mathbf{z} = {}^2\mathbf{j}^1_{\cdot}\,\mathbf{z}' \quad , \quad \mathbf{z}' = {}^2\mathbf{j}'^1_{\cdot}\,\mathbf{z} \quad , \quad {}^2\mathbf{j}^1_{\cdot}\,{}^2\mathbf{j}' = {}^2\mathbf{l}^1_{\cdot}\,{}^2\mathbf{l}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

De fundamentaaltensoren ${}^2\mathbf{j}$ en ${}^2\mathbf{j}'$ geven blijkbaar een euclidisch lijnelement.

Voor de aangegeven waarden ${}^2\mathbf{l}$ en ${}^2\mathbf{j}$ is dan:

$$\left.\begin{aligned} \overset{3..,}{\mathbf{A}} &= \Sigma (z_{\lambda\mu}\,z^\nu - a_{\lambda\mu}\,a^\nu)\, \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}'_\nu = \\ &= -\tfrac{1}{2}\frac{a}{r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r\mathbf{e}'_r - r\left(1-\frac{a}{r}\right)\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}'_r + r\,\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}'_r - \\ &\qquad - r\sin^2\theta\left(1-\frac{a}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}'_r + r\sin^2\mathbf{e}\theta_\varphi\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}'_r \\ &\qquad - \sin\theta\cos\mathbf{e}\theta_\varphi\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}'_\theta + \sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}'_\theta = \\ &= -\tfrac{1}{2}\frac{a}{r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)\mathbf{e}_r\,\mathbf{e}_r\,\mathbf{e}'_r + a\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}'_r + a\sin^2\theta\,\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}'_r \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

*Bewegingsvergelijkingen voor den euclidischen fundamentaaltensor* ${}^2\mathbf{j}$.

Passen we nu de verkregen betrekkingen (9) toe op de bewegingsvergelijkingen:

$${}^2\mathbf{l}'^1_{\cdot}\,\nabla\,U = \frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{x}'}{dt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

dan ontstaat:

$${}^2\mathbf{l}'^1_{\cdot}\,\nabla\,U = \frac{'d}{dt}\frac{d\mathbf{x}'}{dt} - \frac{d\mathbf{x}'}{dt}\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\overset{2}{\cdot}\overset{3..,}{\mathbf{A}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

De vergelijkingen eener klassieke mechanica voor ${}^2\mathbf{j}$ zouden luiden:

$${}^2\mathbf{j}'^1_{\cdot}\,{}'\nabla\,U = \frac{'d}{dt}\frac{d\mathbf{x}'}{dt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

en, daar ${}'\nabla\,U = \nabla\,U$, kan het probleem dus ook worden opgevat als een probleem eener euclidische klassieke mechanica met een toegevoegde kracht:

$$\mathbf{K}_l = {}^2\mathbf{j}^1_{\cdot}\left\{({}^2\mathbf{l}' - {}^2\mathbf{j}')\overset{1}{\cdot}\,\nabla\,U + \frac{d\mathbf{x}'}{dt}\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\overset{2}{\cdot}\overset{3..,}{\mathbf{A}}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

per eenheid van massa.

Daar:

$$\nabla U = \frac{ac^2}{2} \nabla \frac{1}{r} = -\frac{ac^2}{2r^2} \mathbf{e}_r \, , \quad \dots \dots \quad (36)$$

en $\mathbf{e}'_r$ dezelfde richting heeft als $\mathbf{e}_r$, heeft $\mathbf{K}_l$ de richting van $\mathbf{e}_r$. Uit de vergelijkingen:

$$^2\mathbf{j}'^1 \cdot (\nabla U + \mathbf{K}_l) = \frac{'d}{dt} \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \quad \dots \dots \quad (37)$$

kan de beweging evengoed worden afgeleid als uit (18). Het heeft dus in dit verband zin te zeggen, dat de periheliumbeweging van Mercurius „veroorzaakt" wordt, doordat de zwaartekracht slechts bij eerste benadering omgekeerd evenredig is met het kwadraat van den afstand, en er een correctie bijkomt, die een functie is van de snelheid en van twee in elk punt der euclidische ruimte bepaald gegeven affinoren $^2\mathbf{j}$ en $\mathbf{A}^{\cdot\cdot\cdot}$. Daarmede is dan weer een andere „verklaring" van het verschijnsel gevonden, en wel nu een van het standpunt eener klassieke euclidische mechanica met een correctiekracht.

Voert men een willekeurigen anderen fundamentaaltensor in in plaats van $^2\mathbf{j}$, dan moet er een andere kracht toegevoegd worden. Daarmede is dan weer een andere „verklaring" gevonden en wel een van het standpunt eener klassieke mechanica in een ruimte met een geheel willekeurig lijnelement met een correctiekracht. Het is wel onnoodig te zeggen, dat al deze tot op grootheden van de orde $\varepsilon$ nauwkeurige „verklaringen" van het standpunt der relativiteitstheorie volkomen gelijkwaardig zijn.

De het eerst door Riemann gemaakte opmerking, die later met zooveel klem op den voorgrond gebracht werd, o.a. door Poincaré, namelijk dat de vraag naar de geldigheid van een bepaalde meetkunde onafscheidelijk is van de vraag naar de geldigheid van bepaalde natuurwetten, treedt hier voor de mechanica duidelijk aan het licht. Vergelijkingen (35) en (37) stellen in staat over te gaan tot de bij iedere nieuwe maatbepaling behoorende nieuwe mechanica.

*Geodetische kromming der baan.*

De bewegingsvergelijkingen voor $^2\mathbf{l}$ en $^2\mathbf{j}$ kunnen in den volgenden vorm gebracht worden:

$$\frac{1}{m} {}^2\mathbf{l}'^1 \cdot \mathbf{K} = \frac{d^2 l}{dt^2} \frac{d\mathbf{x}'}{dl} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \frac{d}{dl} \frac{d\mathbf{x}'}{dl} \quad \dots \dots \quad (38)$$

$$\frac{1}{m} {}^2\mathbf{j}'^1 \cdot (\mathbf{K} + m\mathbf{K}_l) = \frac{d^2 j}{dt^2} \frac{d\mathbf{x}'}{dj} + \left(\frac{dj}{dt}\right)^2 \frac{'d}{dj} \frac{d\mathbf{x}'}{dj}, \quad \dots \dots \quad (39)$$

waarin $dl$ en $dj$ de lijnelementen gemeten met ${}^2\mathbf{l}$ resp. ${}^2\mathbf{j}$ voorstellen. De kromtevector (d. i. de vector $\perp$ op de baan, die een lengte heeft gelijk aan de geodetische kromming, en die gericht is naar de zijde der kromming [1]) is dus in ${}^2\mathbf{l}$-maat $\frac{d}{dl}\frac{d\mathbf{x}'}{dl}$, en gelijk aan de komponente van ${}^2\mathbf{l}'^1 \, \mathbf{K}$ loodrecht (in ${}^2\mathbf{l}$-maat) op de baan gedeeld door $m\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$. In ${}^2\mathbf{j}$-maat is de kromtevector $\frac{'d}{dj}\frac{d\mathbf{x}'}{dj}$ gelijk aan de komponente van ${}^2\mathbf{j}'^1 \, (\mathbf{K} + m\mathbf{K}_l)$ loodrecht (in ${}^2\mathbf{j}$-maat) op de baan, gedeeld door $m\left(\frac{dj}{dt}\right)^2$. Wordt de uitwendige kracht nul, dan gaat (38) over in:

$$0 = \frac{d^2 l}{dt^2}\frac{d\mathbf{x}'}{dl} + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \frac{d}{dl}\frac{d\mathbf{x}'}{dl} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

of:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dl}\frac{d\mathbf{x}'}{dl} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

en (39) onder toepassing van (35) in:

$$0 = \frac{d^2 j}{dt^2}\frac{d\mathbf{x}'}{dj} + \left(\frac{dj}{dt}\right)^2 \left\{ \frac{'d}{dj}\frac{d\mathbf{x}'}{dj} - \frac{d\mathbf{x}'}{dj}\frac{d\mathbf{x}'}{dj} \overset{2}{\cdot} \overset{3..}{\mathrm{A}} \right\} \quad \ldots \quad (42)$$

De kromtevector is dan in ${}^2\mathbf{l}$-maat nul en in ${}^2\mathbf{j}$-maat de komponente van $\frac{d\mathbf{x}'}{dj}\frac{d\mathbf{x}'}{dj} \overset{2}{\cdot} \overset{3..}{\mathrm{A}}$ loodrecht op de baan.

De gevonden vergelijkingen geven volledig uitsluitsel over de verandering der geodetische kromming.

Beweegt men een vector $\mathbf{p}$ eenmaal ten opzichte van ${}^2\mathbf{l}$ geodetisch langs $d\mathbf{x}'$ en een andermaal ten opzichte van ${}^2\mathbf{j}$ geodetisch, dan zullen de richtingen der twee eindstanden een zekere afwijking ten opzichte van elkaar vertoonen. Men zou nu geneigd zijn aan te nemen, dat deze afwijking per lengteeenheid het verschil is der in de beide verschillende maten gemeten krommingen. Immers is ook het verschil tusschen $d\mathbf{p}$ en $'d\mathbf{p}$ juist het verschil tusschen twee eerst met $\mathbf{p}$ samenvallende en daarna langs $d\mathbf{x}'$ op de twee verschillende wijzen geodetisch bewogen vectoren. De zaak is echter niet zoo eenvoudig, wat al dadelijk blijkt uit de vraag, of nu de afwijking en de lengte-

---

[1]) Is $\mathbf{i}_j$ een hypercongruentie, dan is de kromtevector $\mathbf{i}_j \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j$.

Verg. G. Ricci en T. Levi Civita, Calcul différentiel absolu, Math. Ann. 54 (01) bldz. 154 of J. E. Wright, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge (08) bldz. 78.

eenheid in ${}^2\mathbf{l}$- of in ${}^2\mathbf{j}$-maat gemeten moeten worden. In ${}^2\mathbf{l}$-maat is de kromming:

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dl}\frac{d\mathbf{x}'}{dl}\right)^2 ? \; {}^2\mathbf{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

en in ${}^2\mathbf{j}$-maat:

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dj}\frac{d\mathbf{x}'}{dj}\right)^2 ? \; {}^2\mathbf{j},} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

en het verschil staat niet in een eenvoudig verband tot de in de een of andere maat gemeten onderlinge afwijking der beide mogelijke geodetisch meebewegende assenstelsels.

**Sterrenkunde**. — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. W. J. A. SCHOUTEN: „*De verdeeling der absolute magnituden onder de sterren in en buiten den Melkweg*". (Tweede mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer W. DE SITTER).

In een vorige mededeeling hebben we de uitkomsten medegedeeld van een onderzoek, waarbij we de gemiddelde lichtkrachtkromme voor den geheelen hemel en de overeenkomstige krommen voor zones van verschillende galactische breedte bepaalden volgens de methode van KAPTEYN. We stellen ons voor in dit opstel de resultaten mede te deelen, die gevonden werden door hetzelfde materiaal te behandelen volgens een methode, die door SCHWARZSCHILD het eerst is voorgesteld en toegepast.

1. SCHWARZSCHILD's *methode en zijn uitkomsten.*

SCHWARZSCHILD gaat uit van de integraalformules, die het eerst door SEELIGER zijn opgesteld. SEELIGER maakte gebruik van het totaal aantal sterren van af de helderste tot een bepaalde magnitude. SCHWARZSCHILD echter rekent met het aantal sterren van iedere magnitude. Dit geeft reeds een groote vereenvoudiging. Zijn werk munt verder uit door een strenge mathematische behandeling. Het is zijn verdienste, dat hij een elegante algemeene methode gaf, die op alle fundamenteele problemen der statistische astronomie is toe te passen [1]).

Zij $N_h dh$ het aantal sterren met een schijnbare helderheid tusschen $h$ en $h + dh$ en $\pi_h$ hun gemiddelde parallax, dan gelden — wanneer we weer de dichtheid met $D(r)$ en de frequentiekromme der absolute magnituden met $\varphi(i)$ aanduiden — de betrekkingen:

$$N_h = 4\pi \int_0^\infty D(r)\, \varphi\,(hr^2)\, r^4\, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{en } N_h\, \pi_h = 4\,\pi \int_0^\infty D(r)\, \varphi\,(hr^2)\, r^3\, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

[1]) Zijn verhandelingen verschenen in *Astron. Nachr.* Nos. 4422, 4557 en 4740

In *Astron. Nachr.* N°. 4422 zijn de volgende problemen besproken:

*a.* Zij $N_h$ en $\varphi(i)$ gegeven. Gevraagd wordt $D(r)$ te bepalen door oplossing van de integraalvergelijking (1).

*b.* Zij $N_h$ en $\pi_h$ gegeven. Gevraagd wordt $D(r)$ en $\varphi(i)$ beide te bepalen door de gelijktijdige oplossing der integraalvergelijkingen (1) en (2).

De integraalvergelijkingen zijn door SCHWARZSCHILD opgelost met behulp der bekende eigenschappen van FOURIER coëfficienten [1]).

Het is duidelijk, dat men de snelheidswet op dezelfde manier kan vinden.

Wanneer gevraagd wordt tegelijkertijd de densiteits-, lichtkracht- en snelheidswetten te bepalen, kan dit op de volgende manieren:

1° Uit $N_m$, $N_\mu$ en $\pi_m$,
2° „ $N_m$, $N_\mu$ „ $\pi_\mu$,
3° „ $N_m$, $\pi_m$ „ $\pi_\mu$,
4° „ $N_\mu$, $\pi_m$ „ $\pi_\mu$,

Wanneer wij onderstellen, dat er geen verband bestaat tusschen lichtkracht en snelheid, zouden $N_{m,\mu}$ en $\pi_{m,\mu}$ voldoende gegevens zijn om er de drie gezochte functies uit te bepalen.

In de practijk hebben we rekening te houden met de nauwkeurigheid, waarmee de vereischte gegevens uit de waarnemingen kunnen worden afgeleid. Theoretisch kunnen we echter $D(r)$, $\varphi(i)$ en de snelheidswet $\psi(V)$ in ieder der genoemde gevallen bepalen door de integraalvergelijkingen op te lossen volgens SCHWARZSCHILD's methode.

Er bestaan evenwel ernstige bezwaren tegen het gebruik van dergelijke integraalformules. Wanneer $N_m$, $\pi_m$, enz. ons bekend waren als continue analytische functies der variabelen zou SCHWARZSCHILD's methode heel goed geschikt zijn om de gezochte functies uit deze gegevens af te leiden. In den regel kennen we echter alleen de waarden van $N_m$ en $\pi_m$ voor geheele waarden van $m$. Wanneer we nu deze getallen door een formule voorstellen, zijn dergelijke betrekkingen inderdaad heel geschikt voor interpolatie. Wanneer echter deze betrekkingen geen theoretischen grondslag hebben en de parameters physische beteekenis missen, dan kunnen we er geen andere waarde aan toekennen dan aan interpolatieformules. Er bestaat dan altijd gevaar, dat wij door dergelijke betrekkingen te gebruiken, eigenschappen der oorspronkelijke gegevens verborgen houden. Een tweede bezwaar is dit, dat empirische betrekkingen geëxtrapoleerd worden buiten het interval, waarvoor waarnemingen

[1]) Zie ook EDDINGTON, *Stellar Movements*, Chapter X.

beschikbaar zijn. Wanneer een functie in een bepaald interval de waarnemingen met voldoende nauwkeurigheid voorstelt, behoeft zij daarom nog niet van kracht te zijn buiten dit interval. En vooral bij de integralenmethode kan moeilijk worden nagegaan in hoeverre de resultaten op extrapolatie berusten [1]).

Een ander nadeel der methode is, dat we niet kunnen nagaan, of $\varphi(i)$ of $\psi(V)$ van $r$ afhangt. Ook zijn we genoodzaakt aan te nemen, dat er geen absorptie van het licht in de ruimte bestaat.

Bij SCHWARZSCHILD's toepassing der methode is niet nagegaan, hoe de densiteit varieert met de galactische breedte. Dit is echter wel mogelijk, wanneer we over voldoende gegevens beschikken.

Verschillende bezwaren, die tegen SCHWARZSCHILD's methode kunnen worden ingebracht, bestaan niet bij KAPTEYN's methode, waarover we in een vorige mededeeling berichtten.

Toch hebben we ook volgens SCHWARZSCHILD's methode de frequentiekromme der absolute magnituden bepaald uit het voor ons beschikbare waarnemingsmateriaal. Geen enkele der tot dusver voorgestelde methoden is volkomen onaanvechtbaar. Door meerdere methoden toe te passen, die op verschillende hypothesen berusten, kunnen we ons een oordeel vormen over de juistheid der gemaakte onderstellingen en meer betrouwbare resultaten afleiden.

Een groot voordeel van SCHWARZSCHILD's methode is, dat zij een duidelijk beeld geeft van het verband, dat tusschen de verschillende grootheden bestaat en ons in staat stelt te beoordeelen, of de waarden, die voor de onbekenden gevonden zijn, bij elkaar passen en een sluitend systeem vormen. Ook is de methode zeer geschikt om den invloed van systematische waarnemingsfouten te schatten.

In *Astron. Nachr.* N°. 4422 heeft SCHWARZSCHILD de twee bovengenoemde problemen opgelost en bovendien numerieke resultaten voor de onbekende grootheden gegeven. Daarbij werd gebruik gemaakt van de lichtkrachtkromme, die KAPTEYN in *Astron. Journal* N°. 566 en de aantallen $N_m$, die hij in *Publ. Groningen* N°. 18 publiceerde. Voor $log.\ N_m$ vond SCHWARZSCHILD:

$$log.\ N_m = 0.596 + 0.5612\, m - 0.0055\, m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit deze gegevens werden de densiteit en de gemiddelde parallaxen $\pi_m$ afgeleid.

In zijn tweede artikel onderzocht SCHWARZSCHILD op welke wijze

[1]) Hoe men door zulk een ongeoorloofde extrapolatie tot vreemde resultaten kan komen, blijkt b.v. wanneer CHARLIER (*Meddelanden Observ. Lund*, Serie II, N°. 8, p. 21) uit de formule van KAPTEYN en SCHWARZSCHILD, die we in deze mededeeling met (3) aanduiden, afleidt, dat de getallen $N_m$ toenemen tot $m = 51$.

de voornaamste stellair-statistische grootheden afhangen van de drie hoofdwetten en gaf hij formules om de verschillende grootheden te berekenen. Een exacte toepassing der methode eischt, wanneer we den algemeenen vorm der functies gebruiken, een veelomvattend rekenwerk. Het is gewenscht hiermee te wachten tot we over een uitgebreid waarnemingsmateriaal beschikken. Daarom werden onderstellingen gemaakt over den vorm der onbekende functies.

SCHWARZSCHILD onderstelt:

$$D(r) = 10^{a_0 - a_1 \rho - a_2 \rho^2} \qquad (\rho = -5.0 \; log.\, r)$$
$$\varphi(i) = 10^{b_0 - b_1 M - b_2 M^2} \qquad (M = -2.5 \; log.\, i)$$
$$\psi(V) = 10^{c_0 - c_1 G - c_2 G^2} \qquad (G = -5.0 \; log.\, V)$$

In tegenstelling met de onderstellingen van SEELIGER over den vorm der densiteits- en lichtkrachtwetten zijn deze onderstellingen niet ongemotiveerd. De vorm van $\varphi(i)$ is empirisch gevonden door KAPTEYN en de vorm der densiteitsfunctie is in *Astron. Nachr.* N°. 4422 afgeleid met behulp van de aan de waarneming ontleende aantallen sterren van bepaalde magnitude. De vorm der functie $\psi(V)$ „ist zunächst rein formal der Bequemlichkeit der Rechnung wegen eingeführt." Aan de waarnemingen ontleende SCHWARZSCHILD, behalve de bovengenoemde formule (3):

$$log.\, \pi_m = -1.108 - 0.125\, m$$
$$log.\, \pi_{m,\mu} = -0.766 - R_1\, m - 0.1243\, g$$

waarbij $g$ gelijk is aan $-5.0 \; log.\, \mu$.

Uit deze gegevens zijn de drie hoofdwetten en verschillende andere grootheden, ook de coëfficient $R_1$, afgeleid.

Volgens SCHWARZSCHILD kan de door hem gevonden verdeeling der lichtkrachten ook zoo worden geformuleerd, dat de absolute magnituden om de gemiddelde waarde $11^m.5$ (in SCHWARZSCHILD's notatie [1])) gespreid zijn volgens de foutenwet met een middelbare fout van $3^m.8$. Dit is onjuist. Uit de door hem gebruikte gegevens wordt met behulp van de coëfficiententafel in *Astron. Nachr.* N°. 4557 gemakkelijk gevonden, dat bij zijn lichtkrachtkromme de gemiddelde $M = 25^m.1$ is, dus in KAPTEYN's notatie $30^m.1$.

De door SCHWARZSCHILD gevonden frequentiecurve verschilt aanmerkelijk van de verdeeling der lichtkrachten, die KAPTEYN in *Publ. Groningen* N°. 11 afleidde. Dit blijkt uit de teekening, die we aan het einde van dit opstel hebben opgenomen en waarop beide

[1]) SCHWARZSCHILD gebruikt als eenheid van afstand den afstand, die correspondeert met $\pi = 1''$. Dan is $M = m + 5 \; log.\, \pi$, zoodat de betrekking geldt $M_{\text{KAPTEYN}} = M_{\text{SCHWARZSCHILD}} + 5$.

krommen voorkomen. Dit verschil is raadselachtig, daar beide onderzoekers hetzelfde materiaal gebruikten.

Het is ons niet gelukt een afdoende verklaring te vinden voor deze slechte overeenstemming. Men zou kunnen meenen, dat een correlatie tusschen de absolute magnitude en de snelheid der sterren hier haar invloed deed gelden. Inderdaad heeft men den laatsten tijd van verschillende zijden de aandacht gevestigd op eenige aanduidingen van een verband tusschen lichtkracht en snelheid [1]). Maar toch kan zeker niet worden aangenomen, dat een dergelijke relatie van zoo vèr-strekkende beteekenis is en een zoo grooten invloed heeft op het resultaat bij toepassing van SCHWARZSCHILD's methode. Bovendien vonden we, toen we het voor ons beschikbare waarnemingsmateriaal volgens deze methode bewerkten, dezelfde lichtkrachtkromme, die we volgens de methode van KAPTEYN hadden gevonden.

Het komt ons voor, dat, waar er geen overeenstemming is, KAPTEYN's uitkomst het meeste vertrouwen verdient. Zijn methode toch is te verkiezen boven die van SCHWARZSCHILD en wel voornamelijk op de volgende gronden:

1°. KAPTEYN maakt geen onderstellingen over den vorm der functies, die bepaald moeten worden;

2°. bij KAPTEYN's methode is het mogelijk na te gaan, of de frequentiefunctie der absolute magnituden op alle afstanden van de zon dezelfde is;

3°. wanneer KAPTEYN's methode wordt toegepast, is het terstond duidelijk in hoeverre de uitkomsten op waarnemingen berusten en waar de extrapolatie begint;

4°. KAPTEYN's methode behoeft niet veranderd te worden, indien het mocht blijken, dat de snelheid een functie is van de lichtkracht, terwijl SCHWARZSCHILD's formules in dit geval belangrijke modificaties ondergaan; en

5°. SCHWARZSCHILD's resultaten zijn in hooge mate afhankelijk van de waarde van eenige grootheden (b.v. de coëfficient $\alpha_2$), die moeilijk met voldoende nauwkeurigheid uit de waarnemingen kunnen worden afgeleid.

Toch moesten de methoden van SCHWARZSCHILD en KAPTEYN, wanneer zij met zorg op hetzelfde materiaal toegepast worden, dezelfde uitkomsten geven. Het gevonden verschil is waarschijnlijk in hoofd-

[1]) Zie b.v. EDDINGTON, *Observatory* Vol. 38, p. 392 e. v. Wellicht zal ook deze kwestie worden opgelost door het onderzoek, dat thans op het Astronomisch Laboratorium te Groningen in bewerking is en waarop we in onze vorige mededeeling reeds de aandacht vestigden.

zaak toe te schrijven aan het vijfde bezwaar, dat we tegen SCHWARZSCHILD's methode aanvoerden.

De interpolatieformules, die wij voor $N_m$ afleidden en de formules, die wij voor $\pi_m$ en $\pi_{m,\mu}$ gebruikten, zijn meer betrouwbaar dan die van SCHWARZSCHILD, omdat zij op vollediger en nauwkeuriger gegevens berusten. Daarom is bij onze bepaling van het genoemde bezwaar minder gevaar te duchten. Zoo kan het misschien verklaard worden, dat SCHWARZSCHILD een afwijkende uitkomst vond, terwijl wij volgens beide methoden hetzelfde resultaat bereikten.

## 2. *De resultaten van ons onderzoek.*

We hebben SCHWARZSCHILD's methode op hetzelfde waarnemingsmateriaal toegepast, dat we, zooals in een vorig artikel werd meegedeeld, ook volgens KAPTEYN's methode hebben behandeld.

De gegevens, die we behoeven zijn:

1°. de aantallen sterren van bepaalde magnitude $N_m$,

2°. de gemiddelde parallaxen der sterren van bepaalde grootte $\pi_m$,

3°. twee coëfficiënten der formule voor $\pi_{m,\mu}$.

We hebben de gemiddelde lichtkrachtwet en ook de gemiddelde densiteits- en snelheidswetten bepaald voor den geheelen hemel en bovendien deze hoofdwetten voor de 5 galactische zones afzonderlijk afgeleid.

De getallen $N_m$ werden afgeleid uit Table V van *Publ. Groningen* N°. 27. Het was noodig de gevonden aantallen voor te stellen door interpolatieformules. Hiervoor werden de volgende uitdrukkingen gevonden:

| | | |
|---|---|---|
| Geheele Hemel | log. $N_m$ | $= -4.2395 + 0.63812\,m - 0.011677\,m^2$ |
| Zone I | | $= -4.1848 + 0.65736 \quad -0.011243$ |
| II | | $= -4.1841 + 0.63322 \quad -0.011463$ |
| III | | $= -4.6159 + 0.71857 \quad -0.017257$ |
| IV | | $= -4.4638 + 0.67891 \quad -0.016289$ |
| V | | $= -4.5120 + 0.69565 \quad -0.017976$ |

De gemiddelde parallaxen $\pi_m$, die, zooals vroeger reeds is meegedeeld, ons voor ons onderzoek zeer welwillend door Prof. KAPTEYN en Dr. VAN RHIJN ten gebruike zijn afgestaan, kunnen als volgt worden voorgesteld:

| | | |
|---|---|---|
| Geheele Hemel | log. $\pi_m$ | $= 8.943 - 0.142\,m$ |
| Zone I | | $= 8.883 - 0.142\,m$ |
| II | | $= 8.904 - 0.142\,m$ |
| III | | $= 8.957 - 0.142\,m$ |
| IV | | $= 9.024 - 0.142\,m$ |
| V | | $= 9.066 - 0.142\,m$ |

De gemiddelde parallaxen $\pi_{m,\mu}$ hebben we afgeleid uit die, welke KAPTEYN in *Publ. Groningen* N°. 8 publiceerde, door de constante $a$ in de formule

$$\pi_{m,\mu} = a\mu^b \varepsilon^{m-5.0}$$

in overeenstemming te brengen met de juist genoemde waarden voor $\pi_{m,\mu}$. We vinden dan de volgende formules:

| | | |
|---|---|---|
| Geheele Hemel | $\log. \pi_{m,\mu}$ | $= -0.717 - 0.062\, m - 0.142\, g$ |
| Zone I | | $= -0.777 - 0.062\, m - 0.142\, g$ |
| Zone II | | $= -0.756 - 0.062\, m - 0.142\, g$ |
| Zone III | | $= -0.703 - 0.062\, m - 0.142\, g$ |
| Zone IV | | $= -0.636 - 0.062\, m - 0.142\, g$ |
| Zone V | | $= -0.594 - 0.062\, m - 0.142\, g$ |

Uit deze gegevens hebben we de hoofdwetten afgeleid volgens de methode, die SCHWARZSCHILD heeft ontwikkeld in zijn artikel in *Astron. Nachr.* N°. 4557. Daar zijn ook de betrekkingen, die tusschen de coëfficienten der verschillende formules bestaan, *in extenso* medegedeeld. De geheele berekening is gemaakt met behulp van de daar opgegeven formules. Een eventueele correlatie tusschen lichtkracht en snelheid is buiten beschouwing gelaten. Ook hebben we, in navolging van SCHWARZSCHILD, geen gebruik gemaakt van den coëfficient van $m$ in de formule voor $\pi_{m,\mu}$. We deelen hier de gevonden resultaten mede en voegen er ter vergelijking SCHWARZSCHILD's uitkomst bij.

De dichtheids-, lichtkracht- en snelheidsfunctie duiden we resp. aan met $D(r)$, $\varphi(i)$ en $\psi(V)$, terwijl we onder $M_m$ verstaan de gemiddelde absolute helderheid (in grootteklassen) van de sterren van de magnitude $m$.

In alle formules hebben we gebruik gemaakt van SCHWARZSCHILD's definitie van de absolute magnitude.

SCHWARZSCHILD's Uitkomsten.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= +0.488 - 0.097\, \varrho - 0.0088\, \varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -2.879 + 0.737\, M - 0.0147\, M^2 \\ \log. \psi(V) &= -0.922 - 0.165\, G - 0.0581\, G^2 \\ M_m &= -11.9 + 0.374\, m \end{aligned}$$

Onze Uitkomsten voor den geheelen hemel.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= -2.350 - 0.242\, \varrho - 0.0165\, \varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -0.853 + 0.141\, M - 0.0403\, M^2 \\ \log. \psi(V) &= -1.331 - 0.611\, G - 0.1400\, G^2 \\ M_m &= -7.9 + 0.290\, m \end{aligned}$$

Zone I.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= -3.113 - 0.263\,\varrho - 0.0158\,\varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -0.902 + 0.154\,M - 0.0387\,M^2 \\ \log. \psi(V) &= -1.536 - 0.659\,G - 0.1344\,G^2 \\ M_m &= -8.4 + 0.289\,m \end{aligned}$$

Zone II.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= -2.805 - 0.240\,\varrho - 0.0162\,\varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -0.841 + 0.127\,M - 0.0397\,M^2 \\ \log. \psi(V) &= -1.603 - 0\,727\,G - 0.1477\,G^2 \\ M_m &= -8.2 + 0.289\,m \end{aligned}$$

Zone III.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= -4.103 - 0.402\,\varrho - 0.0244\,\varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -0.646 + 0.025\,M - 0.0597\,M^2 \\ \log. \psi(V) &= -0.728 - 0.972\,G - 0.2074\,G^2 \\ M_m &= -7.0 + 0.290\,m \end{aligned}$$

Zone IV.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= -3.690 - 0.332\,\varrho - 0.0230\,\varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -0.671 + 0.057\,M - 0.0564\,M^2 \\ \log. \psi(V) &= -1.300 - 0.775\,G - 0.1958\,G^2 \\ M_m &= -6.8 + 0.289\,m \end{aligned}$$

Zone V.

$$\begin{aligned} \log. D(r) &= -4.207 - 0.362\,\varrho - 0.0254\,\varrho^2 \\ \log. \varphi(i) &= -0.636 + 0.045\,M - 0.0621\,M^2 \\ \log. \psi(V) &= -1.186 - 0.784\,G - 0.2158\,G^2 \\ M_m &= -6.4 + 0.290\,m \end{aligned}$$

De waarden, die wij voor de verschillende coëfficienten vonden, verschillen tamelijk veel van die van SCHWARZSCHILD. Dit geldt vooral voor de formules voor $\varphi(i)$ en $\psi(V)$.

Het is vooral van belang de lichtkrachtkromme te vergelijken met die van SCHWARZSCHILD en de frequentiekrommen, die voor de verschillende zones gevonden zijn, onderling te vergelijken. Om dit te vergemakkelijken hebben we de formules in een anderen vorm geschreven. Ter vergelijking hebben we KAPTEYN's uitkomst in denzelfden vorm geschreven en ook hier $M$ uitgedrukt in de eenheid, die SCHWARZSCHILD gebruikt. We stellen de lichtkrachtkromme voor door de formule:

$$\varphi(M) = Ce^{-h^2(M-k)^2}$$

Een eenvoudige berekening doet ons het verband vinden tusschen de nieuwe parameters en de boven gebruikte.

De gevonden lichtkrachtkrommen zijn voor te stellen door formules van den gevonden vorm met de volgende waarden der parameters.

| | | $k$ | $h$ |
|---|---|---|---|
| Geheele Hemel . . | | 1.76 | 0.385 |
| Zone I . . . . | | 2.00 | 0.378 |
| Zone II . . . . | | 1.61 | 0.382 |
| Zone III . . . . | | 0.21 | 0.469 |
| Zone IV . . . . | | 0.51 | 0.456 |
| Zone V . . . . | | 0.36 | 0.478 |
| SCHWARZSCHILD . . | | 25.07 | 0.184 |
| KAPTEYN [1]) | type I | 3 95 | 0.243 |
| | type II | 5.30 | 0.247 |

Het verschil tusschen de door ons gevonden waarden en die van SCHWARZSCHILD is heel groot, veel grooter dan wij hadden kunnen verwachten. Er is meer overeenstemming met de door KAPTEYN gevonden waarden, hoewel ook hier het verschil op het eerste gezicht vrij groot schijnt te zijn. Er kan echter geen groote beteekenis worden toegekend aan de waarden, die voor $k$ zijn gevonden. Deze uitkomsten berusten op extrapolatie, daar de gedeelten der frequentiekrommen, die rechtstreeks op waarnemingen berusten, zich niet tot het maximum uitstrekken. Uit de figuur, die wij aan dit opstel toevoegen, blijkt, dat KAPTEYN's curve niet, zooals men uit de waarden van $h$ en $k$ zou afleiden, veel verschilt van onze bepaling, maar er mee in goede overeenstemming is.

Aan het door ons gevonden maximum bij de lichtkrachtkrommen kan ook geen reëele beteekenis worden toegekend, daar de aantallen voor de magnituden 5 en 6, enz. (notatie van KAPTEYN) berusten op de getallen, die in de naaste omgeving der zon gevonden werden. Maar daar zijn onze tellingen weinig volledig, daar wij sterren met een E.B. $> 50''$ uitsloten. Hieraan kan de gevonden vermindering in de aantallen worden toegeschreven.

Zeer opmerkelijk is de overeenstemming tusschen de waarden, die in de verschillende zones voor $k$ gevonden zijn. Er zijn weliswaar aanduidingen van een systematisch verschil tusschen de waarden voor $k$ voor hoogere en lagere galactische breedten; maar de verschillen zijn niet zoo groot dat daaruit, wanneer we de nauwkeurigheid der gegevens in aanmerking nemen, met zekerheid kan worden afgeleid, dat de lichtkrachtkrommen der verschillende galactische zones onderling verschillen. Hoe goed de verschillende krommen overeenstemmen, blijkt het best uit de teekening, die we in de eerste

[1]) *Astron. Journ.* N⁰. 566.

mededeeling hebben opgenomen. In die figuur hebben de zes bovenste lijnen betrekking op het thans besproken onderzoek.

Wij meenen, dat wij uit deze resultaten met tamelijk groote waarschijnlijkheid mogen afleiden, dat de frequentiekromme der absolute magnituden niet varieert met de galactische breedte. En indien dit niet geheel juist mocht zijn, dan is de verandering toch zeker heel gering.

### 3. *Vergelijking met de uitkomsten van andere onderzoekers.*

Wanneer we de lichtkrachtkrommen, die in den loop der tijden door verschillende onderzoekers afgeleid of aangenomen zijn, willen vergelijken, dan kunnen we dit het best graphisch doen. De voornaamste hebben we geteekend in de bijgevoegde figuur.

De kromme met het bijschrift „KAPTEYN" stelt de lichtkrachtwet voor, die in *Publ. Groningen* N°. 11 gepubliceerd is. Onze bepaling volgens dezelfde methode, die we met het cijfer II aanduidden, leverde volkomen dezelfde uitkomst. Zij stemmen niet slechts in vorm overeen, maar ook de aantallen sterren van iedere absolute magnitude, die per volumeneenheid in de omgeving der zon gevonden werden, zijn precies dezelfde.

Bij de andere krommen hebben we, om vergelijking mogelijk te maken, ieder getal $log. N_M$ met een constant bedrag vermeerderd.

Verder is de lichtkrachtcurve geteekend, die SCHWARZSCHILD in *Astron. Nachr.* N°. 4557 afleidde en ook de frequentiefunctie, die wij volgens dezelfde methode vonden en die wij met het cijfer I hebben aangeduid. Terwijl de eerste totaal verschilt van KAPTEYN's lichtkrachtwet, is de tweede ermee in goede overeenstemming.

In *Astron. Nachr.* N°. 4422 nam HERTZSPRUNG, zonder opgave van argumenten, aan, dat de verdeelingsfunctie der absolute magnituden een kromme van Gauss is met een gemiddelde waarde van $+ 2^m.7$ en een gemiddelde afwijking van $\pm 3^m.0$.

HALM [1]) heeft bij zijn bepaling der lichtkrachtwet aangenomen, dat de densiteit constant is en dat er een merkbare extinctie van het licht in de ruimte bestaaat. Met behulp van deze hypothesen werd de lichtkrachtkromme afgeleid uit de aantallen sterren van bepaalde magnitude, die CHAPMAN en MELOTTE bepaald hebben en de gemiddelde parallaxen van KAPTEYN en COMSTOCK. Het is merkwaardig, dat de zoo gevonden kromme vrij goed overeenstemt met die van KAPTEYN.

DYSON heeft in *Monthly Notices* Vol. 72 een onderzoek gepubliceerd,

---

1) *Monthly Notices*, Vol. 77.

dat berustte op de dwarscomponenten der sterren van Carrington's Circumpolar Catalogue. In de onderstelling, dat de densiteit overal in de door deze sterren ingenomen ruimte dezelfde is, bepaalde hij de lichtkrachtwet. De zoo gevonden kromme is door ons geteekend.

COMSTOCK [1]) en WALKEY [2]) hebben de frequentiefunctie der absolute magnituden afgeleid uit de lichtkracht der sterren, wier parallax gemeten is.

SEELIGER heeft bij zijn onderzoekingen over den bouw van het heelal in de eerste plaats de dichtheidswet bepaald. Deze bepaling berust op het volgende theorema, dat door hem ontdekt is [3]):

Als, voor $m < n$, $A_m = C h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$ is, is de dichtheid $D(r) = \gamma r^{-\lambda}$, onafhankelijk van $\varphi(i)$.

Hierin is $A_m$ het aantal sterren van de helderste tot die van de magnitude $m$ en $h_m$ de helderheid der sterren van de schijnbare grootte $m$, terwijl $r$ den afstand tot de zon voorstelt.

We kunnen deze stelling van SEELIGER ook aldus formuleeren:

Wanneer de aantallen sterren van bepaalde magnitude een meetkundige reeks vormen, is de dichtheid evenredig met een negatieve macht van $r$.

We hebben in ons proefschrift [4]) aangetoond, dat tegen de algemeene geldigheid van dit theorema verschillende bezwaren zijn in te brengen. SEELIGER meende, dat door de waarnemingen de praemisse van zijn stelling werd bevestigd. Deze conclusie was voorbarig en blijkt bij vergelijking met nauwkeuriger materiaal onjuist te zijn. Daardoor kan de dichtheidswet, die SEELIGER afleidde, niet aanvaard worden. Ook missen zijn beschouwingen over een door hem gevonden grens van het sterrensysteem voldoenden grond.

SEELIGER bepaalde de lichtkrachtwet door de oplossing van een, in de stellairastronomie welbekende integraalvergelijking met behulp van de gevonden dichtheid. Aan de zoo gevonden uitkomst kan geen groote beteekenis worden gehecht.

Bij de lichtkrachtwet, die we met „SEELIGER I" aanduidden, werd gebruik gemaakt van de densiteitswet $D(r) = \gamma r^{-\lambda}$, terwijl bij de kromme „SEELIGER II" de dichtheid werd voorgesteld door $D(r) = \gamma r^{-\lambda} - \alpha r^{-\lambda_1}$. Deze laatste vorm is onvoldoende gemotiveerd.

---

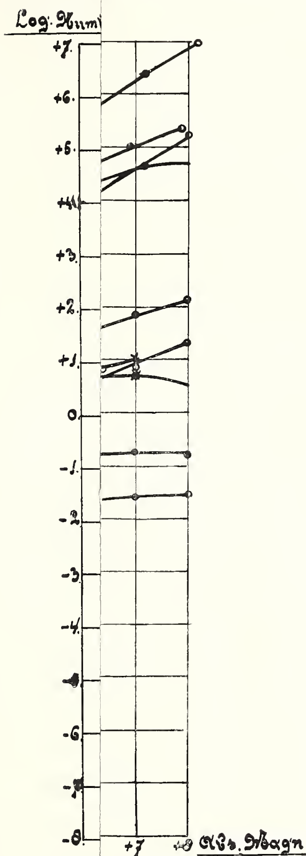
1) *Astron. Journ.* N⁰. 569.

2) *Astron. Nachr.* N⁰. 4754.

3) Het bewijs, dat SEELIGER geeft, is heel ingewikkeld. We hebben echter in ons proefschrift een zeer eenvoudig bewijs opgenomen, dat we aan Prof KAPTEYN danken.

4) On the Determination of the Principal Laws of Statistical Astronomy. Amsterdam, KIRCHNER. 1918.

Dr. W. J uiten den Melkweg".



dat berustte op de dwarscomponenten der sterren van Carrington's Circumpolar Catalogue. In de onderstelling, dat de densiteit overal in de door deze sterren ingenomen ruimte dezelfde is, bepaalde hij de lichtkrachtwet. De zoo gevonden kromme is door ons geteekend.

COMSTOCK [1]) en WALKEY [2]) hebben de frequentiefunctie der absolute magnituden afgeleid uit de lichtkracht der sterren, wier parallax gemeten is.

SEELIGER heeft bij zijn onderzoekingen over den bouw van het heelal in de eerste plaats de dichtheidswet bepaald. Deze bepaling berust op het volgende theorema, dat door hem ontdekt is [3]):

Als, voor $m < n$, $A_m = C h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$ is, is de dichtheid $D(r) = \gamma r^{-\lambda}$, onafhankelijk van $\varphi(i)$.

Hierin is $A_m$ het aantal sterren van de helderste tot die van de magnitude $m$ en $h_m$ de helderheid der sterren van de schijnbare grootte $m$, terwijl $r$ den afstand tot de zon voorstelt.

We kunnen deze stelling van SEELIGER ook aldus formuleeren:

Wanneer de aantallen sterren van bepaalde magnitude een meetkundige reeks vormen, is de dichtheid evenredig met een negatieve macht van $r$.

We hebben in ons proefschrift [4]) aangetoond, dat tegen de algemeene geldigheid van dit theorema verschillende bezwaren zijn in te brengen. SEELIGER meende, dat door de waarnemingen de praemisse van zijn stelling werd bevestigd. Deze conclusie was voorbarig en blijkt bij vergelijking met nauwkeuriger materiaal onjuist te zijn. Daardoor kan de dichtheidswet, die SEELIGER afleidde, niet aanvaard worden. Ook missen zijn beschouwingen over een door hem gevonden grens van het sterrensysteem voldoenden grond.

SEELIGER bepaalde de lichtkrachtwet door de oplossing van een, in de stellairastronomie welbekende integraalvergelijking met behulp van de gevonden dichtheid. Aan de zoo gevonden uitkomst kan geen groote beteekenis worden gehecht.

Bij de lichtkrachtwet, die we met „SEELIGER I" aanduidden, werd gebruik gemaakt van de densiteitswet $D(r) = \gamma r^{-\lambda}$, terwijl bij de kromme „SEELIGER II" de dichtheid werd voorgesteld door $D(r) = \gamma r^{-\lambda} - \alpha r^{-\lambda_1}$. Deze laatste vorm is onvoldoende gemotiveerd.

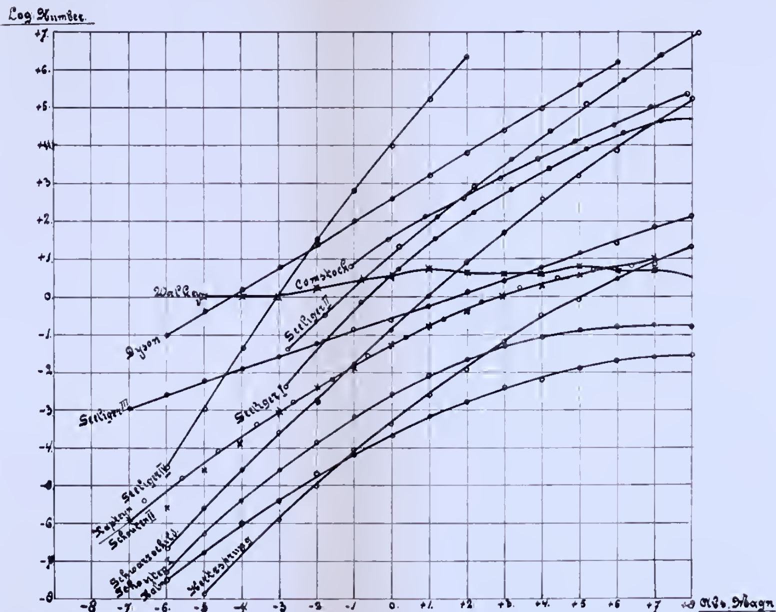
---

[1]) *Astron. Journ.* N⁰. 569.

[2]) *Astron. Nachr.* N⁰. 4754.

[3]) Het bewijs, dat SEELIGER geeft, is heel ingewikkeld. We hebben echter in ons proefschrift een zeer eenvoudig bewijs opgenomen, dat we aan Prof KAPTEYN danken.

[4]) On the Determination of the Principal Laws of Statistical Astronomy. Amsterdam, KIRCHNER. 1918.


Log Number
+7
+6
+5
+3
+2
+1
0
-1
-2
-3
-4
-6
-8
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
+1
+2
+3
+4
+5
+6
+7
Abs. Magn
Comstock
Dyson
Seeliger III
Seeliger II
Seeliger I
Seeliger IV
Kapteyn
Schwarzschild
Hertzsprung

Bovendien werd bij beide bepalingen een bepaalde vorm voor de functie $\varphi(i)$ tevoren aangenomen, wat ongewenscht en onnoodig is.

De lijn, die in onze figuur het bijschrift „SEELIGER III" draagt, is niet door SEELIGER bepaald, maar wel een consequentie van zijn theorie. Wanneer we n.l. — zooals Prof. KAPTEYN opmerkte — SEELIGER's theorema uitbreiden tot sterren zwakker dan de grens-magnitude[1]), dan vinden we:

Wanneer, voor $m > n$, $A_m = Ch_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$ is, dan is $\varphi(i) = Ai^{\frac{3-\lambda}{2}}$, onafhankelijk van $D(r)$.

Nu hebben we volgens *Publ. Groningen* N°. 27 met zekere benadering voor $12.0 < m < 16.0$:

$$\log A_m = 1.797 + 0.340\,(m-12).$$

Dit geeft de lichtkrachtkromme $\varphi(i) = Ai^{0.85}$, die we in de figuur met „SEELIGER III" hebben aangeduid.

De graphische voorstelling toont aan, hoezeer de frequentiekrommen, die door verschillende onderzoekers gevonden zijn, onderling verschillen. Des te meer is het van belang op te merken, dat ons onafhankelijk onderzoek een volkomen bevestiging opleverde van de lichtkrachtwet, die door Prof. KAPTEYN in 1901 uit het toen nog zoo schaarsche waarnemingsmateriaal is afgeleid.

*Kampen*, September 1918.

---

[1]) De waarde van $n$ is volgens SEELIGER ongeveer 11.5.

**Wiskunde.** — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer N. G. W. H. BEEGER: „*Over de deellichamen van het cirkellichaam der $l^h$-de-machts-wortels uit de eenheid en hunne klassenaantallen.*" (3de gedeelte).

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

De formule voor het aantal klassen van de primaire deellichamen is geschreven als het product van twee breuken, als $b$ oneven is. Evenals dit het geval is met het klassenaantal van het cirkellichaam $k\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ zelf, zijn hier die beide breuken geheele getallen. We zullen dit bewijzen en daarbij de breuken de eerste en de tweede factor van het klassenaantal noemen.

Voor het bewijs zijn een paar hulptheorema's noodig.

*Theorema* 1.

Ieder stel grondeenheden van 't primaire deellichaam ten opzichte waarvan $k\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ van den relatieven graad $2b$ is, is ook een stel grondeenheden van 't primaire deellichaam ten opzichte waarvan $k\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ van den relatieven graad $b$ is, als $b$ oneven is.

Bewijs: Noemen we het eerste deellichaam $k$ en 't tweede $K$, dan is $k$ een deellichaam van $K$. De graad van $k$ is $\frac{l^{h-1}(l-1)}{2b} = \frac{1}{2}c$ en die van $K$ is $c$. We toonen eerst aan dat $k$ het deellichaam van $K$ is, dat behoort bij de substitutie

$$s^{1/_2 bc} \text{ als } s = (Z : Z^r)$$

Het voortbrengend getal van $K$ is

$$\eta_K = Z^{r^c} + Z^{r^{2c}} + \ldots + Z^{r^{bc}} \text{ dus}$$

$$s^{1/_2 bc}\, \eta_K = Z^{r^{c+1/_2 bc}} + Z^{r^{2c+1/_2 bc}} + \ldots + Z^{r^{bc+1/_2 bc}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Na eenige herleiding vindt men

$$s^{1/_2 bc}\, \eta_K = Z^{r^{1/_2 c}} + Z^{r^{3/_2 c}} + \ldots + Z^{r^{(2b-1)1/_2 c}}$$

Het voortbrengend getal van $k$ is $\eta_k$ en

$$\eta^k = Z^{r^{1/_2 c}} + Z^{r^{2 \cdot 1/_2 c}} + \ldots + Z^{r^{(2b-1)1/_2 c}}$$

zoodat

$$\eta_k = \eta_K + s^{1/_2 bc}\,\eta_K$$

Het getal $\eta_k$ verandert dus niet voor de substitutie $s^{1/_2 bc}$ zoodat $k$ het deellichaam van $K$ is dat tot deze substitutie behoort.

Omdat verder $r^{1/_2 bc} \equiv -1 \pmod{l^h}$, blijkt uit (1) dat $s^{1/_2 bc}\eta_K$ geconjugeerd complex is met $\eta_K$.

Zij nu $E$ een eenheid van $K$ dan is dus $s^{1/_2 bc}E$ geconjugeerd met $E$, zoodat

$$\left|\frac{E}{s^{1/_2 bc}E}\right| = 1$$

$\frac{E}{s^{1/_2 bc}E}$ is dus een eenheid, die met al hare geconjugeerden de absolute waarde 1 bezit. Zulk een eenheid is een wortel uit de eenheid [1]). Zooals echter in het vorige stuk reeds is opgemerkt, bestaan in $K$ slechts de beide wortels uit de eenheid $\pm$ 1, zoodat

$$\frac{E}{s^{1/_2 bc}E} = \pm 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Was nu $E = -s^{1/_2 bc}E$ dan zou daaruit volgen dat 't reëele deel van $E$ gelijk aan nul was. En dus is $E$ zuiver imaginair en $E^2$ reëel $= \varepsilon$ dus $E = \sqrt{\varepsilon}$. De relatieve different van 't getal $E$ [2]) ten opzichte van het lichaam $k$ is dus $2\sqrt{\varepsilon}$, omdat het relatief geconjugeerde getal van $\sqrt{\varepsilon}$ gelijk is aan $-\sqrt{\varepsilon}$. De relatieve different van $E$ is dus niet deelbaar door $l$, dus kan het relatieve grondideaal [3]) ook niet deelbaar zijn door $l$.

Nu is 't lichaam $K$ relatief-cyclisch t.o.v. $k$. Men kan daarom een theorema der relatief-cyclische lichamen toepassen, waarvan de relatieve graad $= 2$ is [4]). Dus zij $\mathfrak{l}$ een in $l$ opgaand priemideaal van $k$, dan gaat $\mathfrak{l}$ niet in 't relatieve grondideaal op, zoodat volgens het aangehaalde theorema [4]), $\mathfrak{l}$ in $K$ niet deelbaar is door het kwadraat van een priemideaal. Nu is echter volgens theorema 4 in $k$:

$$l = \mathfrak{l}^{1/_2 c}$$

en in $K$ $\qquad l = \mathfrak{l}_1^{\,c}$ als $\mathfrak{l}_1 = (1-Z)^b$ (6)

Wanneer nu in $K$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1^{\,x}$$

dan moet $x = 2$ zijn. Dus $\mathfrak{l}$ is in $K$ wel door het kwadraat van een

1) H. Satz 48.

2) H. pag. 204.

3) = Relatif-Differente des Körpers. H. pag. 205.

4) H. Satz 93.

priemideaal deelbaar. Uit deze tegenstrijdigheid volgt dat aan de gelijkheid $E = -s^{1/2bc} E$ niet kan voldaan zijn. Dan moet echter volgens (2)

$$E = s^{1/2bc} E$$

waaruit volgt dat $E$ een eenheid is van $k$.

Hiermede is 't theorema bewezen.

*Theorema* 2.

De tweede factor van 't aantal klassen van $K$ is een geheel getal en is gelijk aan 't aantal klassen van $k$.

Bewijs: Volgens de afgeleide formules zijn de $\Delta$'s van de beide lichamen gelijk. Volgens theorema 1 is ook $R = R'$, zoodat de tweede factor van het aantal klassen van $K$ gelijk is aan 't aantal klassen van $k$ en dus gelijk aan een heel getal.

*Theorema* 3.

De eerste factor van het aantal klassen van $K$ is een geheel getal.

Bewijs:

Gemakkelijk wordt aangetoond dat

$$r_t + r_{t+c} + \ldots + r_{t+(b-1)c}$$

deelbaar is door $l^h$.

Men behoeft dus alleen nog maar aan te toonen dat

$$\Pi_u \sum_{t=1}^{c} e^{\frac{2\pi u t i}{c}} (r_t + r_{t+c} + \ldots + r_{t+(b-1)c})$$

deelbaar is door $2^{1/2c-1}$. De in dit product voorkomende som splitsen we daartoe in twee deelen:

$$\sum_{t=1}^{1/2c} \text{ en } \sum_{t=1/2c+1}^{c}$$

Voor deze laatste kan worden geschreven:

$$\sum_{t=1}^{1/2c} e^{\frac{2\pi u (t+1/2c) i}{c}} (r_{t+1/2c} + r_{t+3/2c} + \ldots + r_{t+(b-1/2)c})$$

Nu is echter

$$r_{t+n} \equiv r^{t+n} \equiv - r^{t+n\pm 1/2bc} \equiv - r_{t+n\pm 1/2bc} \pmod{l^h}$$

dus

$$r_{t+n} = l^h - r_{t+n\pm 1/2bc}.$$

Hieruit volgt, na een kleine herleiding, dat de in de laatste som voorkomende vorm tusschen haakjes, gelijk is aan

$$b \,.\, l^h - (r_t + r_{t+c} \ldots r_{t+(b-1)c})$$

zoodat, mede omdat $u$ oneven is, voor de in het product voorkomende som gevonden wordt:

$$2\sum_{t=1}^{\frac{1}{2}c} e^{\frac{2\pi uti}{c}} (r_t + r_{t+c} + \dots + r_{t+(b-1)c}) + 2b \,.\, l^h \sum^{\frac{1}{2}c} e^{\frac{2\pi uti}{c}}$$

Door de laatste som te berekenen vindt men dan

$$(1-e^{\frac{-2\pi ui}{c}}) \sum_{t=1}^{c} e^{\frac{2\pi uti}{c}} (r_t + r_{t+c} + \dots + r_{t+(b-1)c}) =$$

$$= 2 \left\{ b \,.\, l^h + \sum_{t=1}^{\frac{1}{2}c} e^{\frac{2\pi uti}{c}} (r_t + \dots + r_{t+(b-1)c}) \right\}$$

Neemt men nu het product over $u = 1, 3, \dots . c-1$ en bedenkt dat

$$\Pi_u (1-e^{\frac{-2\pi ui}{c}}) = 2$$

dan blijkt dat het product, dat in den teller van den eersten factor van het klassenaantal voorkomt, deelbaar is door $2^{\frac{1}{2}c-1}$.

Het theorema kan ook bewezen worden op de wijze waarop door Kummer en Kronecker is aangetoond dat de eerste factor van het klassenaantal van ieder cirkellichaam een heel getal is of een breuk met noemer gelijk aan 2 [1]).

Tabel van de waarde van den eersten factor van het klassenaantal der deellichamen.

| $l$ | $h$ | $b$ | 1ste factor. |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 3 | 1 |
| 7 | 2 | 3 | 1 |
| 11 | 1 | 5 | 1 |
| 13 | 1 | 3 | 1 |
| 19 | 1 | 3 | 1 |
| 23 | 1 | 11 | 3 |
| 29 | 1 | 7 | 1 |
| 31 | 1 | 15 | 3 |
| 37 | 1 | 9 | 1 |
| 37 | 1 | 3 | 1 |
| 47 | 1 | 23 | 5 |

[1]) Monatsber. Berlin 1863 en Crelle's Journ. Band 40.

*Theorema* 4.

De eerste factor van het aantal klassen van 't deellichaam, waarvoor het getal $b$ oneven is, is een deeler van den eersten factor van het aantal klassen van het cirkellichaam zelf.

Bewijs:

Het cirkellichaam $k\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$ heeft als eersten factor van het aantal klassen [1])

$$\frac{\underset{u}{\Pi}\ \sum_{t=1}^{l^{h-1}(l-1)} e^{\frac{2\pi uti}{l^{h-1}(l-1)}} r_t}{2^{1/2\varphi-1} l^{h(1/2\varphi-1)}}.$$

Ter bekorting is hier $\varphi$ inplaats van $\varphi(l^h)$ geschreven en $u$ doorloopt de waarden $1, 3, \ldots . \varphi-1$.

Men weet dat dit een geheel getal voorstelt.

De in den teller voorkomende som kan geschreven worden in den volgenden vorm:

$$\sum_{t=1}^{c} \left\{ e^{\frac{2\pi uti}{\varphi}} r_t + e^{\frac{2\pi u(t+c)i}{\varphi}} r_{t+c} + \cdots + e^{\frac{2\pi u(t+(b-1)c)i}{\varphi}} r_{t+(b-1)c} \right\}$$

Voor $u = bu'$ $u' = 1, 3, \ldots . c-1$ gaat deze uitdrukking over in de som die voorkomt in den teller van den 1[sten] factor van het klassenaantal van 't deellichaam dat behoort bij den relatieven graad $b$. Hieruit volgt dat de laatstbedoelde teller een deeler is van den teller van het klassenaantal van $k\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$.

Het quotient van de beide eerste factoren der klassenaantallen is nu blijkbaar gelijk aan

$$\frac{1}{2^{1/2\varphi-1/2c}\, l^{h(1/2\varphi-1/2c-1)}} \underset{u}{\Pi} \sum_{t=1}^{\varphi} e^{\frac{2\pi uti}{\varphi}} r_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarbij $u$ alle oneven (—) getallen doorloopt van de rij $1, 3, \ldots,$ $l^{h-1}(l-1)-1$, uitgezonderd die door $b$ deelbaar zijn.

Nu is

$$\left(re^{\frac{2\pi ui}{\varphi}}-1\right) \sum_{t=1}^{\varphi} e^{\frac{2\pi uti}{\varphi}} r_t = \sum_{t=1}^{\varphi} e^{\frac{2\pi u(t+1)i}{\varphi}} (rr_t - r_{t+1})$$

en $rr_t - r_{t+1} \equiv 0 \ (mod\ l^h)$. Verder is

[1]) H. Satz 141.

$$\prod_u \left(re^{\frac{2\pi u i}{\varphi}}-1\right)=\frac{\prod\limits_u \left(re^{\frac{2\pi u i}{\varphi}}-1\right)}{\prod\limits_{u'} \left(re^{\frac{2\pi u' i}{\varphi}}-1\right)}=\frac{r^{\frac{1}{2}\varphi}+1}{r^{\frac{1}{2}c}+1}$$

als in 't eerste product $u$ alle waarden $1, 3, \ldots . \varphi-1$ doorloopt die niet door $b$ deelbaar zijn; in 't tweede product alle waarden $1, 3, \ldots . \varphi-1$.

Van deze laatste breuk is de teller door $l^h$ deelbaar en de noemer niet; bovendien kan de primitieve wortel $r$ zoo gekozen worden dat de teller niet deelbaar is door een hoogere macht van $l$ dan $l^h$. Uit dit alles volgt dat de teller van (3) deelbaar is door de macht van $l$ die in den noemer staat.

Op dezelfde manier als bij het bewijs van theorema 3 toont men aan dat de teller van (3) deelbaar is door de macht van 2 die in den noemer voorkomt.

*Theorema* 5.

Als een deellichaam $k$ vervat is in een deellichaam $K$ dan is de eerste factor van het klassenaantal van $k$ een deeler van die van $K$. ($b$ is dus van beide oneven).

Men bewijst dit op geheel dezelfde wijze als het vorige theorema.

---

Ten slotte wil ik nog een paar onnauwkeurigheden verbeteren die in theorema (6) bl. 332 zijn ingeslopen. Vóór den eersten factor van 't aantal klassen ($b$ oneven) moet geplaatst worden

$$(-1)^{1/2a}$$

Het teeken van den determinant $\Delta$ (voor $b$ oneven) moet niet zijn $(-1)^{1/8(a-2)(a-4)}$ maar $(-1)^{1/8(c-4)(c-6)}$.

---

ERRATA.

bl. 565. Theorema IV. Aan de eerste vergelijking toe te voegen: Als $u \neq \frac{1}{2} al^{h-1}$.

" 568 7[de] regel van onderen moet zijn: 1° over alle waarden van $u$ die *niet* door $l$ deelbaar zijn.

" 571 Formule (7). In den teller van de eerste breuk moet staan $(-1)^{al^{h-1}}-1$ in plaats van $(-1)\,al^{h-1}-1$.

" 572 5[de] regel $\prod\limits_{u=1}^{al^{h-1}-1}$ in plaats van $\prod\limits_{u=1}^{al^{h-1}}$

" 572 Achter den laatsten regel te voegen: $= \log \varepsilon_l$.

**Natuurkunde**. — De Heer P. ZEEMAN biedt een mededeeling aan over: *„Enkele proeven over de zwaartekracht. De trage en de zware massa van kristallen en radioactieve stoffen"*. (2e gedeelte).

(Deze mededeeling zal in een volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Secretaris, namens den Heer L. BOLK aangeboden het manuscript van diens verhandeling: „Die Topographie der Orbita beim Menschen und Anthropoiden und ihre Bedeutung für die Frage nach der Beziehung zwischen Menschen- und Affenschädel."

De vergadering wordt gesloten.

---

**25 Maart 1919**.